Deformasyonlarının Modellemesi- Bölüm II: LOKP Bünye Denklemleri

Mehmet Fırat
Yardımcı Doçent

Makina Mühendisliği Bölümü
Sakarya Üniversitesi
Esentepe, 54040 SAKARYA

Bu makalede iç bünye değişkenleri termodinamik kuramına dayanan gözlemsel bünye modellerinden, Lineer Olmayan Kinematik Pekleşme (LOKP) plastisite modelleri incelenecektir. İlk olarak deformasyon hızından bağımsız gözlemsel bünye modellerin temel kabulleri ve ortak matematiksel bağıntılar üzerinde duruldu. Daha sonra, literatürde önerilen akma yüzeyi kavramına dayalı üç değişik kinematik pekleşme modeli incelendi. Son olarak gerilme kontrollü orantısal eksensel yükleme altında 1026 karbon çeliğinin çevrimsel deformasyonları her üç LOKP modeli kullanılarak hesaplandı ve deneysel sonuçlarla karsılaştırıldı. Üç farklı LOKP modeliyle hesaplanan eksensel gerinimlerin, niteliksel ve niceliksel olarak ölçülen gerinimlerle uyumluluğu olduğu görüldü.

Anahtar Kelimeler: Orantısal Olmayan Yükleme, Lineer Olmayan Kinematik Pekleşme, Sayısal Benzetim

SİMGELER LİSTESİ

$\underline{\underline{\sigma}}$	gerilme tensörü
$\underline{\underline{S}}$	deviatorik gerilme tensörü
σ_m	hidrostatik gerilme
$\underline{\underline{\alpha}}$	(akma yüzeyi) öteleme tensörü
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	gerinim tensörü
$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$	plastik gerinim tensörü
ε_m	hidrostatik gerinim
$\underline{\underline{n}}$	(akma yüzeyi) birim normal tensörü
σ_y	akma gerilmesi
dp	eşdeğer plastik gerinim adımı
f	akma yüzeyi fonksiyonu
h	plastik pekleşme modülü fonksiyonu
$\underline{\underline{L}}^{(i)}$	(i) öteleme tensörü bileşeni birim tensörü
E	elastik modül
K	hacimsel elastiklik modülü
ν	Poisson sabiti

GİRİŞ

İç bünye değişkenleri termodinamik kuramına dayanan gözlemsel plastisite bünye modelleri incelendiğinde, bu modellerin tamamında ortak olan bir dizi kuramsal kabuller olduğu görülür. Bu bünye modellerinde, malzeme deformasyon davranışı anlık gerinim ve sıcaklık durumu gibi gözlemlenebilen değişkenlerin değerlerine ve bir dizi hayali iç değişkene bağlı olarak kurulur. Oluşturulacak matematiksel modelin karmaşıklığı, gerek malzeme deformasyon özelliklerine ve gerekse benzetimi yapılacak koşulların gereksinimlerine bağlıdır. Bu makalede incelenen Lineer Olmayan Kinematik Pekleşme (LOKP) bünye modellerinde öngörülen temel kabuller aşağıdaki gibi açıklanabilir;

Malzeme iç yapısı

Malzeme iç yapısı başlangıçta izotrop ve makro düzeyde homojendir. Malzeme çentiksiz numunesinin değişik genliklerde gerinim kontrollü tam çevrimli çekme-basma testlerinden elde edilen ve Masing kuralına uyan/uymayan dengelenmiş histerisiz eğrileri kullanılarak çevrimsel gerilme-gerinim eğrisi oluşturulur. Bu eğride doğrusallığın gözlendiği en yüksek gerilme, çevrimsel akma gerilmesi olarak alınır.

Deformasyon özellikleri

Deformasyonların oda sıcaklığı ve ona yakın sıcaklıklarda olduğu kabul edilecektir. Bu sıcaklık aralığında birçok metal malzemede, sıcaklık değişimi geçmişinin çevrimsel deformasyonlara olan etkisi mekanik yükleme formu ve yükleme geçmişine göre ihmal edilebilir. Ayrıca malzeme deformasyonları yükleme hızından bağımsızdır.

Geometrik kabuller

Çevrimsel yüklemeler altında geometrik değişimler ihmal edilebilir ve gözlenen deformasyonlar "küçük gerinim" hipotezine uygundur. Bu kabul çerçevesinde belli bir malzeme noktasındaki toplam gerinim tensörü elastik ve plastik bileşenlere toplamalı olarak ayrıştırılabilir.

Çevrimsel yükleme

Metal malzemeye uygulanan çevrimsel yüklerin uygulama frekanslarının deformasyonlara etkisi ihmal edilebilir. Bu çerçevede çok-eksenli yüklemelerin zaman formu, dinamik karakteristiklerine göre daha önemlidir.

Sonraki bölümlerde yukarıda verilen kabuller çerçevesinde deformasyon hızından bağımsız plastisite modellerinin dayandığı temel bünye denklemleri ve LOKP pekleşme kurallarının tanıtımı yapılacaktır. Daha sonra gerilme kontrollü orantısal eksensel yükleme altında 1026 karbon çeliğinin çevrimsel deformasyonları her üç LOKP modeli kullanılarak hesaplanacak ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

HIZDAN BAĞIMSIZ PLASTİSİTE: TEMEL DENKLEMLER

Deformasyon hızından bağımsız iç bünye değişkenleri termodinamik kurulumuna dayanan plastisite modellerinin tamamında ortak olan bir dizi temel matematiksel bağıntılar mevcuttur. Bunlar sırasıyla elastik gerilme-gerinim bağıntıları, akma fonksiyonu, akma kuralı ve tutarlılık şartı olarak verilebilir.

Elastik gerilme-gerinim bağıntıları

Toplam gerinim tensörü adımı elastik ve plastik bileşenlere ayrıştırılır:

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{\varepsilon}}^e + d\underline{\underline{\varepsilon}}^p \tag{1}$$

burada $d\underline{\underline{\varepsilon}}$ toplam gerinim tensörü adımını, ve $d\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ ile $d\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ de sırasıyla elastik ve plastik gerinim tensörü adımlarını göstermektedir. Aynı toplam gerinim tensörü adımı, $d\underline{\underline{\varepsilon}}$, aşağıdaki gibi deviatorik ve hidrostatik adımlara ayrıştırılabilir:

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{e}} + d\varepsilon_m \underline{\underline{I}} \tag{2}$$

burada $d\underline{\underline{e}}$ deviatorik gerinim adımını, $d\varepsilon_m$ ise hidrostatik gerinim adımını ifade eder:

$$d\varepsilon_m = \frac{\left(d\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{I}}\right)}{\left(\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{I}}\right)} \tag{3a}$$

veya,

$$d\varepsilon_m = \frac{1}{3}\left(d\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{I}}\right) \tag{3b}$$

burada deviatorik gerinim tensörü adımının birinci değişmezi sıfırdır.

$$tr\,(d\underline{\underline{e}}) = d\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{I}} = 0 \tag{4}$$

Gerinim tensörü adımı ayrıca deviatorik elastik ve hidrostatik elastik ve deviatorik plastik ve hidrostatik plastik bileşenlere ayrılabilir:

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{e}}^e + d\underline{\underline{e}}^p + \left(d\varepsilon^e{}_m + d\varepsilon^p{}_m\right)\underline{\underline{I}} \tag{5}$$

Metal malzemelerin plastik sıkıştırılmasızlığı kabulü kullanılarak, hidrostatik plastik gerinim, $d\varepsilon^p{}_m$, sıfır olarak alınır. Bununla birlikte, toplam hidrostatik gerinim elastik olduğu kabul edilir. Elastik hidrostatik gerinim ve plastik sıkıştırılmazlık koşulları kullanılarak toplam gerinim tensörü adımını aşağıdaki gibi tekrar ifade edilir:

$$d\underline{\underline{\varepsilon}} = d\underline{\underline{e}}^e + d\underline{\underline{e}}^p + d\varepsilon_m \underline{\underline{I}} \tag{6}$$

Benzer şekilde gerilme tensörü adımı, $d\underline{\underline{\sigma}}$ deviatorik ve hidrostatik adımlara ayrıştırıla bilinir:

$$d\underline{\underline{\sigma}} = d\underline{\underline{S}} + d\sigma_m \underline{\underline{I}} \tag{7}$$

burada hidrostatik adım

$$d\sigma_m = \frac{\left(d\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}\right)}{\left(\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{I}}\right)} \tag{8a}$$

ya da,

$$d\sigma_m = \frac{1}{3}\left(d\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}\right) = \frac{1}{3} tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) \tag{8b}$$

olarak tanımlanır. Deviatorik gerilme tensörü adımının birinci değişmezi sıfırdır:

$$tr\ d\underline{\underline{S}} = d\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{I}} = 0 \tag{9}$$

Bu aşamada malzeme gerilme tensörü adımı ve gerinim tensörü adımı arasındaki bağıntıların deviatorik ve hidrostatik kısımlar için bağımsız olarak yazılır ve ilgili bağıntılar aşağıdaki formdadır:

$$d\sigma_m = 3\mathrm{K} d\varepsilon_m \tag{10}$$

ve,

$$d\underline{\underline{S}} = 2\mathrm{G} d\underline{\underline{e}}^e \tag{11}$$

Burada K ve G sırayla malzeme hacim elastiklik ve elastik kayma modülleridir. Küçük deformasyonlar kabulü ve malzeme iç yapısında bozulma olmadığı varsayımı kullanılarak elastik malzeme parametrelerinin çevrimsel plastik deformasyonlardan etkilenmediği ve izotrop olarak kaldıkları varsayılacaktır. Ayrıca plastik deformasyonlar sırasında elastik yapı değişmez.

Eşitlik (5) kullanılarak deviatorik gerilme adımı ile toplam ve plastik deviatorik gerinim adımları arasındaki eşitlik kurulabilir.

$$d\underline{\underline{S}} = 2G\,(d\underline{\underline{e}} - d\underline{\underline{e}}^{p}) \tag{12}$$

Akma fonksiyonu

Akma fonksiyonu, gerilme uzayında akma yüzeyi olarak adlandırılan elastik gerilme bölgesinin sınırlarını tanımlar ve çok-eksenli gerilme durumunda her bir gerilme bileşeninin bir akma kriteri ile kurduğu özel kombinasyonu ifade eder. Deformasyon hızdan bağımsız bünye modellerinde anlık gerilme noktası akma yüzeyi içinde olduğu tüm hallerde malzemenin elastik davrandığı kabul edilir. Tüm elastik ve elastik-plastik deformasyonlar sırasında anlık gerilme tensörü akma yüzeyinin içerisinde veya akma yüzeyinin üzerinde olduğu varsayılır ve akma koşulu ile ifade edilir. Deneysel çalışmalar Von Misss akma fonksiyonunun metal malzemelerin orantılı yüklemeler altındaki davranışını oldukça hassas tanımlayabildiği göstermektedir. Von Mises akma fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle tanımlanabilir:

$$f = \left\| \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{\alpha}} \right\| - \sqrt{2}k \tag{13}$$

burada $\underline{\underline{\alpha}}$ tensörü akma yüzeyinin merkezini ifade eder ve toplam öteleme tensörü olarak adlandırılır (Şekil 1). k parametresi malzeme kayma akma gerilmedir ve başlangıçta tam çevrimli burkma veya çekme-basma testinden elde edilen elastiklik limiti olarak alınır. Von Mises akma fonksiyonu, çevrimsel deformasyonlar esnasında, deviatorik gerilme uzayında öteleme yapabilen ve genişleyebilen bir hiperküre yüzeyi ifade eder. Ancak akma yüzeyinin gerek dönmesine ve gerekse şekil değiştirmesine izin verilmez.

Akma kuralı

Akma yada deformasyon kuralı, malzemenin elastik ve plastik deformasyonları esnasında, plastik gerinim adımını gerilme artışlarına ilişkilendiren bir matematiksel bağıntı olarak ifade edilebilir. Metal malzemeler üzerinde yapılan deneysel çalışmalar, Drucker [1] tarafından önerilen Normal akma kuralının uygun bir eşitlik ifade ettiğini göstermektedir. Normal akma kuralına göre, deviatorik gerilme uzayı ile plastik gerinim uzayının üst üste bindirildiğinde; plastik gerinim tensörü adımının, akma yüzeyinin anlık gerinim noktasındaki yüzey normali ile paralel olduğunu kabul edilir. Normal akma kuralı matematiksel olarak aşağıdaki eşitlikle ifade edilebilir:

$$d\underline{\underline{e}}^{p} = \frac{1}{h}\left\langle d\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{n}} \right\rangle \underline{\underline{n}} \tag{14}$$

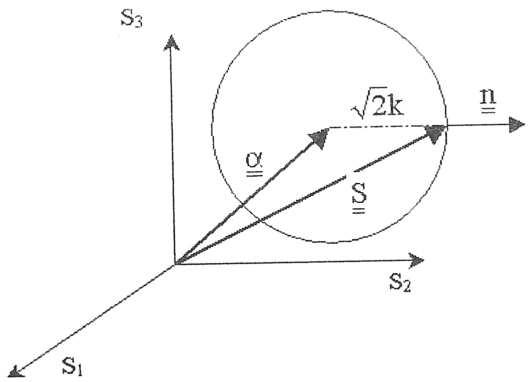
Burada h plastik pekleşme modülü olarak tanımlanır, ve $\underline{\underline{n}}$ gerilme uzayında anlık gerilme noktasında akma yüzeyi normalini ifade eden birim tensördür. $\langle\ \rangle$ sembolü McCauley parantezidir.

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}}{\left| \dfrac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right|} \tag{15}$$

Tutarlılık şartı

Tutarlılık şartı; plastik deformasyonlar esnasında akma koşulunun sağlanmasının devamını ifade eder ve anlık gerilme noktasının akma yüzeyi üzerine kalması koşulu olarak tanımlanır [3]. Tutarlılık şartı matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$df(\underline{\underline{S}},\underline{\underline{\alpha}},k) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{S}}} : d\underline{\underline{S}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} : d\underline{\underline{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial k} : dk = 0 \tag{16}$$



Şekil 1. Deviatorik (asal) gerilme uzayında von Mises akma yüzeyinin gösterimi.

Akma yüzeyi von Mises fonksiyonu ile tanımlandığında tutarlılık şartı aşağıdaki eşitlikle verilir,

$$d\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{n}} - d\underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{n}} + \sqrt{2}\,dk = 0 \tag{17}$$

Sabit genlikli çevrimsel yükleme koşullarında, bir çok metal malzemede çevrimsel olarak dengelenmiş malzeme davranışı gözlenen bir durumdur, ve belli bir cevrim sonrasında akma yüzeyinin büyüklüğü değişmez. Dengelenmiş deformasyon esnasında ve çevrimsel olarak dengelenmiş malzeme davranışının göz önüne alınarak tutarlılık şartı akma gerilmeden bağımsız hale gelir.

$$d\underline{\underline{S}}:\underline{\underline{n}} - d\underline{\underline{\alpha}}:\underline{\underline{n}} = 0 \qquad (18)$$

Bu aşamada bir eşdeğer plastik gerinim adımı tanımlanabilir:

$$dp = \left\| d\underline{\underline{e}}^{p} \right\| \qquad (19)$$

ve normal akma kuralı kullanılarak plastik pekleşme modülü fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle ifade edilir,

$$h = \frac{d\underline{\underline{S}}:\underline{\underline{n}}}{dp} \qquad (20)$$

Von Mises akma fonksiyonu ve tutarlılık şartı kullanılarak, plastik pekleşme modülü fonksiyonu tekrar yazılabilir:

$$h = \frac{d\underline{\underline{\alpha}}:\underline{\underline{n}}}{dp} - \sqrt{2}\frac{dk}{dp} \qquad (21)$$

LİNEER OLMAYAN KİNEMATİK PEKLEŞME MODELLERİ

Önceki bölümde verilen temel bağıntılar ile birlikte, akma yüzeyinin gerilme uzayında ötelemesini ve büyüklük değişimini tanımlayan bir pekleşme kuralı tanımlanarak iç değişkenler plastisite bünye modellemesi tamamlanır. Belli bir pekleşme kuralının tanımlanmasında iki farklı yaklaşım izlenmektedir. Birinci yaklaşımda akma yüzeyi öteleme miktarı ve yönü verilerek, plastik pekleşme modülü hesaplanabilir. Alternatif olarak akma yüzeyi öteleme yönü ve plastik pekleşme modülü eşitliği verilerek, öteleme miktarı hesaplanabilir. Akma yüzeyi öteleme tensörü ile pekleşme modülü arasındaki bağıntı, eşitlik (21) de açıkça görülmektedir.

Anlık gerinim tensörünün, akma yüzeyi öteleme denkleminde kullanıldığı pekleşme bünye modelleri literatürde Lineer Olmayan Kinematik Pekleşme (LOPK) modelleri olarak adlandırılmaktadır, ve Armstrong ve Frederich [14] tarafından önerilen akma yüzeyi öteleme denklemi sonraki yıllarda önerilen bir dizi pekleşme kuralına temel teşkil etmektedir(Şekil 2).

$$d\underline{\underline{\alpha}} = a_p\, d\underline{\underline{\varepsilon}}^{p} - c_a \underline{\underline{\alpha}}\, dp \qquad (22)$$

Yukarıdaki verilen akma yüzeyi öteleme eşitliğinde a_p bir malzeme sabitidir ve c_a plastik gerinim geçmişinin bir skalar fonksiyonudur. $c_a \underline{\underline{\alpha}}\, dp$ terimi literatürde "gerinim hafızası" olarak adlandırılmaktadır. Chaboche [5,9,10] tarafından önerilen toplam öteleme tensörü $\underline{\underline{\alpha}}$ kavramı ve akma yüzeyi öteleme tensörünün m sayıda, eşitlik (22) verilen formda, tensör bileşeninden oluşması fikri lineer olmayan kinematik pekleşme modellerinin temel kabullerinden birini oluşturur.

$$\underline{\underline{\alpha}} = \sum_{i=1}^{m} \underline{\underline{\alpha}}^{(i)} \qquad (23)$$

Metal malzemelerde; gerinim kontrollü yüklemelerde gözlenen gerilme rahatlaması ve gerilme kontrollü yüklemelerde gözlenen gerinim birikim oranının çevrim sayısına, yükleme genliğine bağlı olarak değişkenlik göstermesi, çevrimsel malzeme davranışının daha hassas modellenmesi gereksinimi doğurmuştur. Chaboche, Onno-Wang ve Jiang-Şehitoğlu çevrimsel gerinim birikiminde değişken oranların benzetimi için öteleme tensörü bileşenleri için "kritik gerinim durumu" şartları öne sürmüşlerdir. Jiang [14] toplam öteleme tensörü kavramına dayalı her üç model için limit yüzey kavramını ortaya atmış ve akma yüzeyi öteleme bileşenleri denklemleri için genel bir format önermişlerdir.

$$d\underline{\underline{\alpha}}^{(i)} = c^{(i)} r^{(i)} \left(\underline{\underline{n}} - W^{(i)} \underline{\underline{L}}^{(i)} \right) dp \quad (i = 1,2,...,m) \qquad (24)$$

$$\underline{\underline{n}} = \frac{\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{\alpha}}}{\left\| \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{\alpha}} \right\|} \qquad (25)$$

$$\underline{\underline{L}}^{(i)} = \frac{\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}}{\left\| \underline{\underline{\alpha}}^{(i)} \right\|} \quad (i = 1,2,...,m) \qquad (26)$$

Yukarıdaki pekleşme denkleminde, $c^{(i)}$ ve $r^{(i)}$ malzeme parametreleridir ve her bir öteleme tensörü bileşeni için hesaplanır. $\underline{\underline{n}}$ tensörü ise akma yüzeyinin anlık gerilme noktasındaki birim normali ifade eder. $\underline{\underline{L}}^{(i)}$ tensörü her bir öteleme tensörü bileşeni birim tensörünü göstermektedir. dp eşdeğer plastik gerinim adımıdır. $W^{(i)}$ ise her bir öteleme tensörü bileşeni için tanımlanan bir tensör skalar fonksiyondur. Chaboche, Onno-Wang ve Jiang-Şehitoğlu tarafından önerilen "kritik gerinim durumu" tanımlamaları $W^{(i)}$ fonksiyonları ile özetlenebilir:

Chaboche :

$$W^{(i)} = \left\langle 1 - \frac{\kappa^{(i)}}{\left\|\alpha^{(i)}\right\|} \right\rangle \qquad (i = 1,2,...,m) \qquad (27)$$

Onno-Wang :

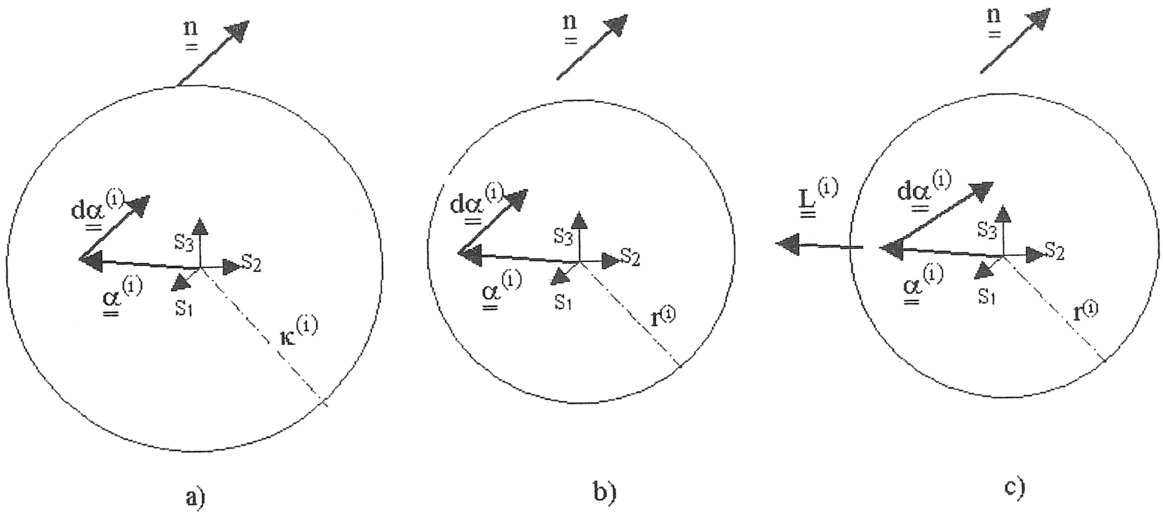
$$W^{(i)} = \left(\frac{\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}} \left\langle \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{L}}^{(i)} \right\rangle \quad (i = 1,2,...,m) \qquad (28a)$$

$$g^{(i)} = \left\|\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}\right\| - r^{(i)} \leq 0 \quad (i = 1,2,...,m) \qquad (28b)$$

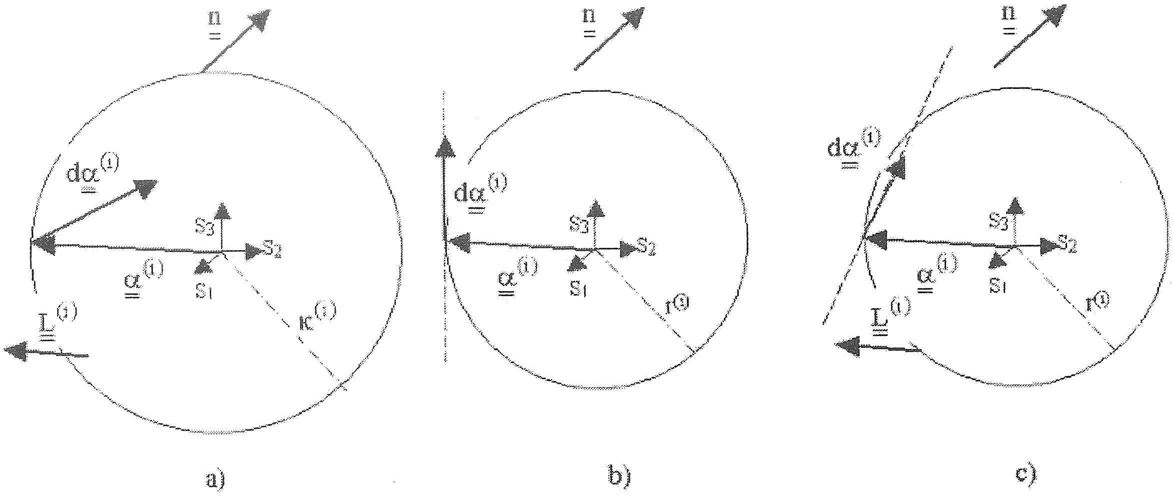
Jiang-Şehitoğlu:

$$W^{(i)} = \left(\frac{\left\|\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}\right\|}{r^{(i)}} \right)^{\chi^{(i)}+1} \qquad (i = 1,2,...,m) \qquad (29)$$

Chaboche modelinde her bir öteleme tensörü bileşeni için tanımlanan $\kappa^{(i)}$ sabitleri kritik gerilme parametresi olarak ifade edilebilir. Belli bir öteleme tensörü bileşeni normu, $\left\|\alpha^{(i)}\right\|$, $\kappa^{(i)}$ değerinden küçükken pekleşme kuralı lineerdir, ve $\kappa^{(i)}$ değerinden büyük olduğunda pekleşme kuralında gerinim belleği etkisi orantısal olarak etkin hale gelir. Onno-Wang tarafından önerilen pekleşme modelinde her bir öteleme tensörü bileşeni için tanımlanan sınırlama yüzeyi, $g^{(i)}$, lineer ve lineer olmayan pekleşme kurallarının etkinliğinde belirleyici olmakla birlikte yeterli değildir. Bununla birlikte gerinim belleği etkisinde belli bir öteleme tensörü bileşeninin yönüne göre aktif hale gelmektedir. Onno-Wang eşitliğinde H(x) fonksiyonu Heaviside adım fonksiyonudur. Chaboche ve Onno-Wang pekleşme modellerine göre gerinim bellek etkisi akma yüzeyi öteleme tensörü bileşeninin sınırlama yüzeyi, $g^{(i)}$, içinde olduğu durumlarda ortadan kalmaktadır. Diğer taraftan Jiang-Şehitoğlu modelinde süreklilik söz konusudur ve ancak birikim üst kat sayıları, $\chi^{(i)}$, sıfırdan farklı olduğunda lineer kural sınır yüzey içinde yaklaşık olarak sağlanmaktadır. Gerinim bellek etkisinin her üç modele göre akma yüzeyi öteleme tensörü bileşeninin sınırlama yüzeyi içinde ve üzerinde olduğu durumlarda pekleşmeye olan katkısı Şekil 2 ve Şekil 3'de şematik olarak verilmiştir.



Şekil 2. Öteleme tensörü bileşeninin sınırlama yüzeyi içinde değişimi; a)Chaboche modeli, b)Onno-Wang modeli, c)Jiang-Sehitoglu modeli.



Şekil 3. Öteleme tensörü bileşeninin sınırlama yüzeyi üzerinde değişimi; a) Chaboche modeli, b) Onno-Wang modeli, c) Jiang-Sehitoglu modeli.

Her üç modelde de akma yüzeyi toplam öteleme tensörünün yönü ve öteleme büyüklüğü tanımlanır ve tutarlılık şartı kullanılarak anlık plastik pekleşme modülü hesaplanır.

Chaboche :

$$h=\sum_{i=1}^{m}\frac{3}{2}c^{(i)}r^{(i)}\left(1-\left\langle 1-\frac{\kappa^{(i)}}{\left\|\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}\right\|}\right\rangle \underline{\underline{L}}^{(i)}:\underline{\underline{n}}\right)dp-\sqrt{2}\frac{dk}{dp}$$

$(i=1,2,\ldots,m)$

(30)

Onno-Wang :

$$h=\sum_{i=1}^{m}c^{(i)}r^{(i)}\left(1-H(g^{(i)})\left(\frac{\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}}{r^{(i)}}\right)^{\chi^{(i)}}\left\langle\underline{\underline{n}}:\underline{\underline{L}}^{(i)}\right\rangle\right)dp-\sqrt{2}\frac{dk}{dp}$$

$(i=1,2,\ldots,m)$

(31)

Jiang-Şehitoğlu :

$$h=\sum_{i=1}^{m}c^{(i)}r^{(i)}\left(1-\left(\frac{\left\|\underline{\underline{\alpha}}^{(i)}\right\|}{r^{(i)}}\right)^{\chi^{(i)}+1}\underline{\underline{L}}^{(i)}:\underline{\underline{n}}\right)dp-\sqrt{2}\frac{dk}{dp}$$

$(i=1,2,\ldots,m)$

(32)

Peklesme modulu ifadelerinde; soldaki toplamlı terim, deviatorik gerilme uzayında akma yüzeyi ötelemesinin ve sağdaki terimse akma yüzeyinin büyüklük değişiminin pekleşmeye olan etkisini ifade eder. Esitliklerdeki malzeme parametreleri, çevrimsel davranışını modellemede üstlendikleri farklı fonksiyonlar nedeniyle iki gruba ayrılır. $\kappa^{(i)}$ ve $\chi^{(i)}$ parametreleri, dengelenmiş orantısal yükleme koşulu altında minimal etkiye sahiptir; ancak dengelenmemiş orantısal olmayan yükleme koşullarında bu iki parametre grubu çevrimsel gerinim birikimi davranışı belirleyen sayısal parametrelerdir. Bu parametrelerinde hesaplanmasında, tek-eksenli dengelenmemiş orantısal ve çift-eksenli orantısal olmayan çevrimsel test verilerine ihtiyaç vardır. Bu testlerde malzemenin ince-cidarlı boru numunelerinin eksensel çekme-basma ve burkma yükleri uygulanır. Her iki parametre seti sıfır olarak alınabilir ve bu durumda dengelenmemiş yükler altında yükleme genliğine bağlı olarak daha hızlı bir çevrimsel dengelenme elde edilmiş olur. Diğer taraftan, $c^{(i)}$ ve $r^{(i)}$ parametre setlerinin belirlenmesinde, tam çevrimli çekme-basma testleriyle farklı gerinim genliklerinde elde edilen çevrimsel olarak dengelenmiş malzeme histeresiz eğrisi kullanılır. Histeresis gerilme-gerinim eğrisinden, çevrimsel elastik limit ile maksimum gerilme arasındaki aralıkta m adet nokta seçilir (Şekil 4). Belli bir öteleme tensör bileşeni için $c^{(i)}$ ve $r^{(i)}$ parametreleri sırasıyla aşağıdaki iki denklem kullanılarak hesaplanır,

$$c^{(i)}=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\underline{\varepsilon}_{a(i)}^{\,p}}\qquad (i=1,2,\ldots,m)\qquad (33)$$

$$r^{(i)}=\frac{2}{3}\frac{H_{(i)}-H_{(i+1)}}{c^{(i)}}\qquad (i=1,2,\ldots,m)\qquad (34)$$

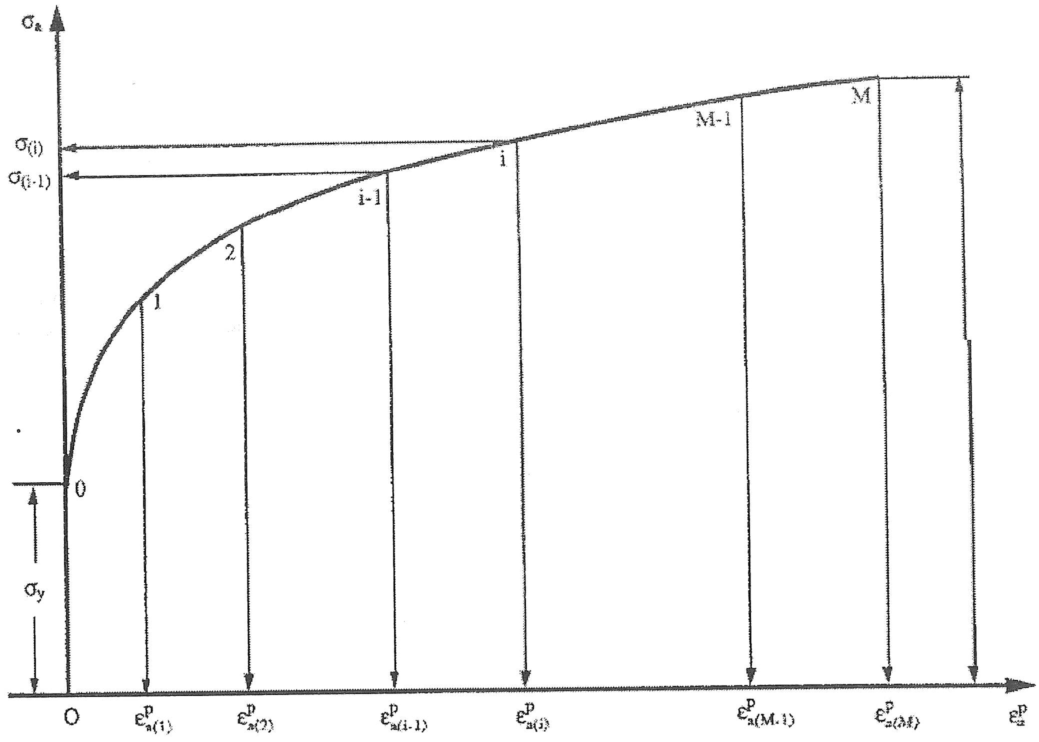
burada (i-1) ile (i) noktaları arasındaki eğim $H_{(i)}$ dır ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$H_{(i)} = \frac{\sigma_{a(i)} - \sigma_{a(i-1)}}{\varepsilon_{a(i)}{}^{p} - \varepsilon_{a(i-1)}{}^{p}} \qquad (i = 1,2,...,m) \qquad (35)$$

hesaplamada aşağıda verilen koşullar geçerlidir:

$$\sigma_{a(0)} = \sigma_0 = ; \varepsilon_{a(0)} = 0 \; ; H_{(m+1)} = 0 \qquad (36)$$

Literatürde, LOKP bünye denklemlerinin sayısal çözümüne yönelik temel iki yaklaşım önerilmiştir [18-20]. En çok uygulanan sayısal çözüm yöntemi; gerilme uzayında geometrik-trigonometrik bağıntılara dayanan ve önceki kısımlarda diferansiyel forma verilen bünye denklemlerinin, belli bir gerilme veya gerinim zaman değişiminin temel yükleme girdisi olarak alındığı eksplisit yaklaşımlardır. Ancak özellikle fazla sayıda cevrimden oluşan yüklemelerde, sayısal çözüm hatasının birikimi geometrik yaklaşımlarla belirlenmesi mümkün değildir. Diğer yaklaşım da ise, özellikle sonlu elemanlar yönteminde ağırlıklı olarak uygulanan ve belli bir gerilme veya gerinim zaman değişiminin temel yükleme girdisi olarak alındığı, zaman adımlama yöntemleridir. Bu makalede diferansiyel formda verilen bünye denklemleri zaman adımlamalı çözümü, gerek uygulama basitliği gerekse adım büyüklüğünden bağımsız bir yakınsama nitelikleri nedeniyle kapalı(implisit) "Euler geri-adım ayrıklaştırması" yöntemiyle yapılmıştır [18]. Chaboche ve Cailletaud [19] tarafından önerilen adımlı çözüm algoritmasında belli bir zaman adımında gerçek çözüme yakınsama koşulu; Hartmann ve Haupt [20] tarafından eşdeğer gerilme adımı için önerilen bir lineer olmayan skalar fonksiyon kullanılarak tanımlanmıştır. Lineer olmayan skalar denklem, birbirini takip eden yerine koymalarla gerçekleştirilen yinelemelerle ve bu yinelemeler sırasında toplam öteleme tensörünü ve akma fonksiyonunu güncellenmesiyle çözülür, bu yaklaşım "tekrarlı hesaplama ve yerine koyma algoritması" olarak da adlandırılır. Verilen bir zaman adımı için birikmiş plastik gerinim adımının yakınsama değeri bulunduğunda, zaman adımı sonundaki gerilme-gerinim tensörleri güncellenir. Bu yaklaşımın detayları [19]'da verilmiştir.



Şekil 4. Dengelenmiş çevrimsel gerilme-gerinim eğrisinden m noktanın seçimini gösteren şematik.

UYGULAMA ÖRNEĞİ

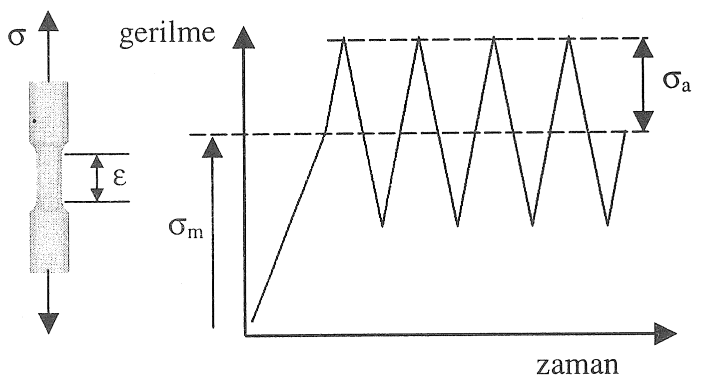
Literatürde farklı mikro yapılarda metallerle üzerinde yapılmış tek-eksenli ve çok-eksenli gerilme ve/veya gerinim kontrollü çevrimsel yükleme deneyleri yayınlanmıştır. Bu deneylerin bir kısmında kullanılan malzemeler çevrimsel sertleşme ve yumuşama özelliklerine sahiptir veya tek-eksenli çekme-basma davranışları simetrik değildir. Ayrıca çok-eksenli gerilme veya gerinim kontrollü yüklemeler altında, birçok malzemede gözlenen orantısal olmayan pekleşme davranışı belli bir çevrimsel bünye modellinin değerlendirmesinde belirsizliklere yol açabilir. Bu çerçevede, önceki bölümlerde açıklanan LOKP bünye modellerinin değerlendirilmesinde; Masing davranışı gösteren(tek-eksenli çekme-basma davranışları simetrik) ve çevrimsel dengelenmesi hızlı bir malzemenin, orantısal ve gerilme kontrollü, tek-eksenli çevrimsel yükleme deneyleri uygun olacaktır. Bu amaçla, Hassan ve Kyriakides [17] tarafından 1026 Karbon çeliği kullanılarak çentiksiz malzeme numunelerinin çevrimsel eksensel gerilme-kontrollü testleri, her üç LOKP modelinin değerlendirilmesinde kullanıldı. Gerek test edilen malzemenin genel imalat sektöründe sıkça kullanılan bir malzeme olması ve gerekse seçilen yükleme yollarının otomotiv sektöründe. yapısal elemanların mekanik yorulma testlerinde uygulanan servis yüklerinin genel formlarında olmaları endüstriyel önem taşımaktadır.

Sabit Genlikli Eksensel Yükleme Testleri

Hassan ve Kyriakides [17], önerdikleri iki-yüzey plastisite bünye modelini doğruma amacıyla, 1026 karbon çeliğinden yapılmış silindirik çentiksiz malzeme numunelerinin çevrimsel eksensel gerilme-kontrollü testlerini yapmışlardır. Bu testlerde önce statik bir eksensel çekme gerilme malzemeye uygulanır ve sabit genlikli çevrimsel bir gerilme bu statik yüke eklenir (Şekil 5). Statik ve çevrimsel gerilme değeri değiştirilerek, oluşan çevrimsel eksensel gerinim ölçülür. 1026 karbon çeliğinin çevrimsel gerilme-gerinim eğrisi adımlı test ile elde edilmiştir ve çevrimsel olarak simetrik bir histeresis eğrisi rapor edilmiştir. Malzeme elastiklik limiti ve modülü sırasıyla 200 MPa ve 190 GPa' dır, ve Poisson's sabiti 0.28 olarak verilmiştir. Çevrimsel gerinim-gerinim eğrisi Ramberg-Osgood eşitliğiyle ifade edilebilir ve mukavemet katsayısı ve üst sabiti sırasıyla 1155 MPa ve 0.208 olarak belirlenmiştir. Burada, testlerden çevrimsel gerinim genliğinin sabit ve statik gerilme değerinin değiştirildiği tek bir set incelenecektir (Şekil 5). Seçilen sette statik gerinim değerleri elastiklik sınırları içindedir ve elastik-plastik gerinimler sadece çevrimsel yükleme bileşeni sebebiyle oluşmaktadır. Bu koşul, çevrimsel gerinim birikiminin hesaplanmasında her üç LOKP kuralında önerilen "kritik gerinim durumu", $W^{(i)}$, fonksiyonlarının direk değerlendirilmesine imkan sağlamaktadır. Bu kısımda önceki bölümlerde açıklanan üç LOKP modeli kullanılarak bu testlerden bir setinin benzetimi yapıldı.

Malzeme Davranışının Bilgisayar Benzetimi

Çevrimsel eksensel deformasyonun hesaplanmasında her üç modelde akma yüzeyi toplam öteleme tensörü 5 bileşenden oluşturuldu ve malzeme $c^{(i)}$ ve $r^{(i)}$ parametreleri önceki bölümde açıklanan prosedür göre gerilme-gerinim eğrisi kullanılarak hesaplandı. Chaboche modelinde belli bir öteleme tensör bileşeni için gerinim bellek parametresi, $\kappa^{(i)}$, öteleme bileşeni limit yüzey büyüklük parametresi $r^{(i)}$'ne eşit alınmıştır. Seçilen yükleme yolunun orantısal olmasından dolayı tüm öteleme tensör bileşenleri için $\chi^{(i)}$ parametreleri sıfır olarak alındı.



TESTLER	1	2
σ_m (MPa)	100	200
σ_a (MPa)	250	250

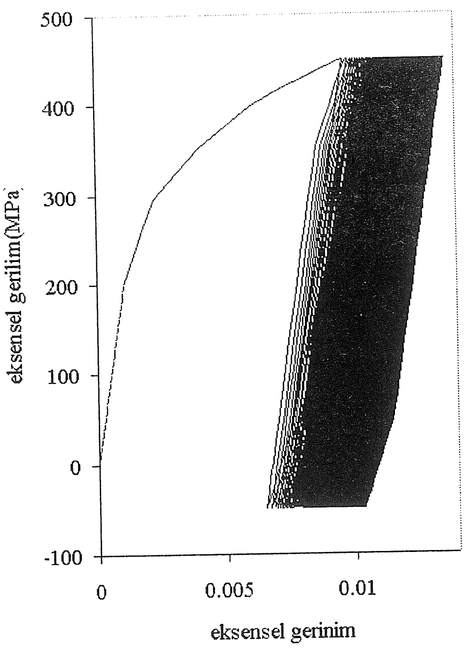
Şekil 5. Hassan ve Kyriakides [17] testlerinde statik ve çevrimsel gerilme değeri gösteren şematik.

Bu yolla her üç LOKP modelinde tanımlanan "kritik gerilme durumu" şartlarının, dengelenmemiş orantısal yükleme koşullarında tutarlılıkları karşılaştırılması ve değerlendirilmesi mümkün olacaktır. Hesaplanan $c^{(i)}$ ve $r^{(i)}$ parametreleri Tablo 1'de verilmiştir. Her iki test esnasında çevrimsel gerinim birikimini gözlenmektedir (Şekil 6a) ve bu sebeple belli bir cevrim için eksensel gerilme-gerinim döngüsü kapanmamaktadır (Şekil 6b). Gerek deneysel gerekse benzetim sonuçlarının değerlendirilmesi amacıyla tanımlanan çevrime bağlı gerinim birikimi, $\Delta\varepsilon^{(i)}$, ve çevrimsel gerinim, $\varepsilon^{(i)}$, Şekil 6 de verilmiştir.

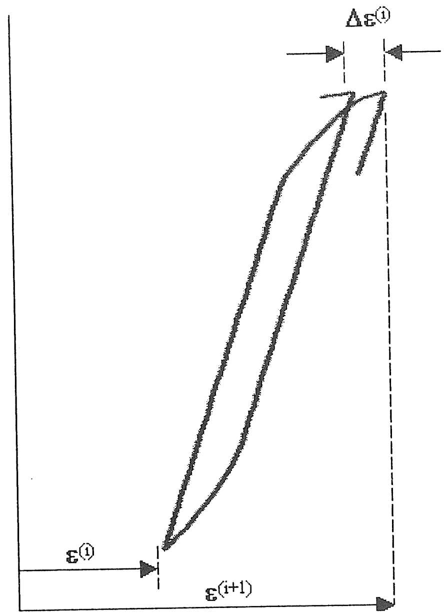
Tablo 1. LOKP modeli malzeme parametreleri

Tensör Bileşeni	C(i)	r(i)(MPa)
1	2367.0	17.8
2	794.2	23.8
3	363.3	26.2
4	191.4	27.3
5	110.2	84.6

Test 1 ve test 2 benzetimleri, deneysel verilere paralel olarak, ilk 10,000 ve 6,000 çevrim için yapılmıştır. Üç LOKP modeliyle her iki test için hesaplanan eksensel gerinim ve ölçülen gerinimlerin çevrimsel değişimi incelendiğinde, tüm modellerin niteliksel olarak uyumluluğu gözlenmektedir (Şekil 7). Deneysel gözlenen gerinim-cevrim eğrilerinin eğimi, $d\varepsilon/dN$, statik gerilme büyüklüğüne bağlıdır. İlk testte gözlenen gerinim-cevrim eğrilerinin eğimi, 0-10,000 cevrim bandı incelendiğinde sabit olarak alınabilir, diğer taraftansa ikinci test için bu durum daha çok lineer bir nitelik taşımaktadır. Bu kapsamda deneysel gerinim değişimiyle en iyi korelasyon Onno-Wang ve Jiang-Sehitoglu modellerinde gözlenmektedir. Bununla birlikte Chaboche tarafından önerilen öteleme tensörü "kritik gerilme durumu" formunun ortalama gerilme değerinden etkilenmesinin, 1026 çeliğinin gözlenen davranışına uygun olmadığı söylene bilir. Ancak literatürde 316 paslanmaz çeliğiyle yapılan testlerde, bu etkileşimin daha tutarlı sonuçlar verdiği rapor edilmiştir [21]. Tek-eksenli sabit genlikli yüklemeler için çevrime bağlı gerinim birikiminde, $\Delta\varepsilon^{(i)}$, ortalama gerilmeinin belirleyici parametre olarak öne çıkmaktadır, ayrıca mekanik yorulma değerlendirmesinde oldukça önemli olan bu olgunun LOKP modelleriyle niteliksel ve niceliksel olarak uygun benzetimi yapılabilmektedir.

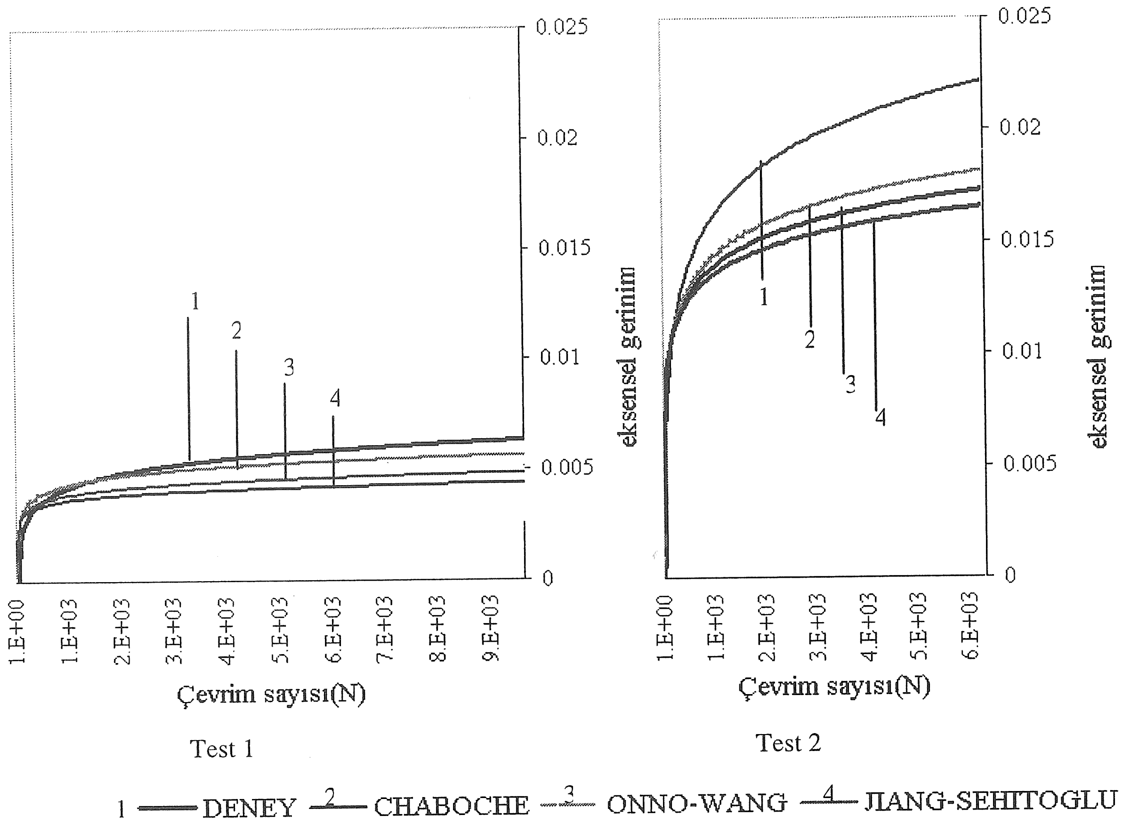


a)



b)

Şekil 6. a) Onno-Wang modeliyle test 2 benzetimi, b) tipik bir eksensel gerilme-gerinim döngüsünü gösteren şematik.



Şekil 7. Test 1 ve test 2 için deneysel ve hesaplanan çevrimsel gerinim değişimi.

SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Bu makalede, tipik mühendislik metallerinin çevrimsel deformasyonlarının bilgisayar benzetimine yönelik gözlemsel plastisite modellerinin temel kabulleri ve ortak matematiksel bağıntılar incelendi. Deformasyon hızından bağımsız Lineer Olamayan Kinematik Pekleşme bünye modellerinin temel özellikleri ve literatürde önerilen toplam akma yüzeyi kavramına dayalı üç kinematik pekleşme modeli ve ilgili "kritik gerilme durum" fonksiyonları incelendi. Daha sonra Hassan ve Kyriakides tarafından yapılan 1026 karbon çeliğinin gerilme-kontrollü orantısal eksensel yükleme testlerinde gözlenen çevrimsel deformasyonlar, her üç LOKP modeli kullanılarak hesaplandı. Çentiksiz malzeme numunesinin basit çevrimsel testlerinden elde edilen gerilme-gerinim eğrilerinin, her üç modellin "kritik gerilme durumu" belirlenmesinde yeteri hassasiyette sonuçlar verdiği görüldü. Üç LOKP modeliyle hesaplanan eksensel gerinimlerin, niteliksel ve niceliksel olarak ölçülen gerinimlerle uyumluluğu olduğu görüldü. Bununla birlikte Chaboche tarafından önerilen öteleme tensörü "kritik gerilme durumu" formunun ortalama gerilme değerinden etkilenmesinin, 1026 çeliğinin gözlenen davranışına uygun olmadığı sonucuna varıldı. Mühendislik metallerinin yorulma dayananım hesaplamalarına ortalama gerilme etkilerinin LOKP modelleriyle uygun şekilde modellenebileceğine dikkat çekildi.

MODELING OF CYCLIC MATERIAL DEFORMATIONS PART II: NONLINEAR KINEMATIC HARDENING MODELS

In this paper, the fundamental assumptions and mathematical relationships of phenomenological plasticity models used in the computer simulation of cyclic deformation of typical engineering metals are summarized. Firstly, the rate-independent plasticity models in conjunction with the kinematic hardening models and the corresponding "critical stress state" functions are investigated. Then, the stress-controlled tests of 1026 carbon steel performed by Hassan ve Kyriakides under cyclic uniaxial loading are simulated with the three nonlinear kinematic hardening models. The use of cyclically-stabilized

stress-strain curves of the material for the determination of "critical stress state" functions in each of three models is regarded as an appropriate approach from a practical point of view. Furthermore, the simulations of the cyclic deformations based on three kinematic models are observed to be in agreement with experimental results both qualitatively and quantitatively. However, the relatively poor-performance with the Chaboche model is observed to be the dependence of "critical stress state" function on the mean stress in the particular case considered here. Finally, the capability of nonlinear kinematic hardening models in the modeling of mean stress effects in the fatigue damage assessment of metallic structures under complex cyclic deformations is pointed out.

KAYNAKÇA

1. Lemaitre, J., Chaboche, J.L., "Mechanics of Solid Materials", Cambridge University Press, New York, 1990.
2. Lubliner, J., "Plasticity Theory", Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
3. Khan, A.S., Huang, S., "Continuum Theory of Plasticity", ", John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.
4. Drucker, D.C., Palgen, L., "On the Stress-Strain Relations Suitable for Cyclic and Other Loadings", Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 479-485,1981.
5. Chaboche, J.L., "Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity", International Journal of Plasticity, Vol. 5, pp. 247-302, 1989.
6. Hashiguchi, K., "Mechanical Requirements and Structures of Cyclic Plasticity Models", International Journal of Plasticity, Vol. 9, pp.721-748, 1993.
7. Watanabe,O., Atluri, S.N, "Constitutive Modeling of Cyclic Plasticity and Creep Using an Internal Time Concept", International Journal of Plasticity, Vol. 2, No.2, pp.107-134, 1986.
8. Valanis, K.C., "Fundamental Consequences of a New Intrinsic Time Measure Plasticity as a Limit of the Endochronic Theory", Archives of Mechanics, Vol.32, No.2, pp. 171-191, Warsaw, 1980.
9. Chaboche, J.L., "Time-Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity", International Journal of Plasticity, Vol. 2, No.2, pp. 149-188, 1986.
10. Chaboche, J.L., "On Some Modifications of Kinematic Hardening to Improve the Description of Ratcheting Effects", International Journal of Plasticity, Vol. 7, pp. 641-678, 1991.
11. Ohno, N., Wang, J.D., " Two Equivalent Forms of Nonlinear Kinematic Hardening: Application to Non- Isothermal Plasticity" International Journal of Plasticity, Vol. 7, pp. 637-650, 1991.
12. Ohno, N., Wang, J.D., "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part I: Formulation and Basic Features for Ratcheting Behavior", International Journal of Plasticity, Vol. 9, pp. 375-390-650, 1993.
13. Ohno, N., Wang, J.D., "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part II: Applications to Experiments of Ratcheting Behavior", International Journal of Plasticity, Vol. 9, pp. 391-403, 1993.
14. Jiang, Y., "Cyclic Plasticity with an Emphasis on Ratcheting", Doktora Tezi, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1993.
15. Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Modeling of Cyclic Ratcheting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations", Journal of Applied Mechanics, Vol.63, pp.720-725, 1996.
16. Jiang, Y., Sehitoglu, H., "Modeling of Cyclic Ratcheting Plasticity, Part II: Comparison of Model Simulations With Experiments", Journal of Applied Mechanics, Vol.63, pp.726-733, 1996.
17. Hassan, T., Kyriakides, S., "Ratcheting in Cyclic Plasticity, Part I: Uniaxial Behavior", International Journal of Plasticity, Vol. 8, pp.91-116, 1992.
18. Simo, J.C., Hughes, T.J.R, "Computational Inelasticity", Springer-Verlag New York Inc., New York, 1998.
19. Chaboche, J.L., Cailletaud, G., "Integration Methods for Complex Plastic Constitutive Equations", Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 133, pp. 125-155, 1996.
20. Hartmann, S., Haupth P., "Stress Computation and Consistent Tangent Operator Using Non-Linear Kinematic Hardening Models", International Journal For Numerical Methods in Engineering", Vol.36, 3801-3814, 1993.
21. Chaboche, J.L., Rousselier, G., "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations, Part II: Application of Internal Variable Concepts to the 316 Stainless Steels", Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 105, pp. 159-164, 1983.