

**Bora Yıldırım**  
Y. Doç. Dr.

Osmangazi Üniversitesi  
Makina Mühendisliği Bölümü  
26480, Eskişehir

**Serkan Dağ**  
Y. Doç. Dr.

Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Makina Mühendisliği Bölümü  
06531, Ankara

## Arayüz Çatlaklarının Düğüm Noktası ile Zenginleştirilmiş Sonlu Elemanlar ile Modellenmesi ve Dört Nokta Eğme Testi

*Mekanik ve ısı özellikleri farklı olan malzemelerin kullanıldığı mühendislik uygulamalarında yapısal bütünlüğü tehdit eden problemlerden bir kısmı arayüz çatlaklarından kaynaklanmaktadır. Bu çatlakların oluşabileceği ve daha sonra yüklemeye koşullarına bağlı olarak ilerleyebileceği kırılma mekaniği ile ilgili uygulamalarda, çatlak ucundaki gerilme şiddeti çarpanlarını ve şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarını hesaplamak gerekmektedir. Bu çalışmada, bu değişkenleri sonlu elemanlar yöntemiyle hesaplayabilmek için bir sonlu eleman geliştirilmiş ve bu elemanın uygulaması yapılmıştır. Literatürde düğüm noktası ile zenginleştirilmiş sonlu eleman olarak tanımlanan bu elemanın yerdeğiştirme alanına teorik elastisite analizinden elde edilen asimptotik çatlak ucu yerdeğiştirme alanı eklenmiştir. Analitik çözümleri bilinen sonsuz homojen düzlemdeki çatlak ve sonsuz düzlemdeki arayüz çatlakları problemleri çözülmüş ve geliştirilen metodun yüksek doğruluk derecesinde sonuç verdiği gösterilmiştir. Son olarak yarı-iletken elektronik paketlerde arayüz bağ dayanımını belirlemek için uygulanan dört nokta eğme testi, geliştirilen sonlu elemanlar ile modellenmiş ve elde edilen sonuçlar kısaca tartışılmıştır.*

*Anahtar Kelimeler: Arayüz çatlakları, Düğüm noktası ile zenginleştirilmiş sonlu elemanlar, Gerilme şiddeti çarpanları, Şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı, Dört nokta eğme testi.*

### GİRİŞ

Günümüzde birçok mühendislik uygulamasında kullanılan malzeme sistemlerinde ısı ve mekanik özellikleri farklı olan malzemeler bir arada kullanılmaktadır. Bu tür değişik malzeme katmanlarından oluşan sistemlere örnek olarak, yüksek sıcaklık ve aşınmaya karşı kullanılan koruyucu kaplamaları, elektronik paketlerde kullanılan ince film/alt tabaka sistemlerini ve farklı tabakalardan oluşan kompozit yapıları gösterebiliriz. Bu tür mühendislik uygulamalarının yapısal bütünlüğü ile ilgili tasarımlarda kırılma mekaniği yöntemleri de kullanılmaktadır. Son yıllarda özellikle bilgisayarlar, mobil telefonlar ve daha birçok uygulamada kullanılan elektronik paketlerde, periyodik ısı yüklemeye sonucunda oluşan çatlak problemlerine rastlanılmakta ve bu durumda bu tür uygulamalarda yapısal bütünlüğü tehdit edebilecek sonuçlar ortaya çıkabilmektedir. Bu çalışmada, birden farklı malzemedan oluşan sistemlerde sıklıkla rastlanabilen arayüz çatlakları ele alınmıştır. Bu çatlakların elastisite teorisi çerçevesindeki mekaniği

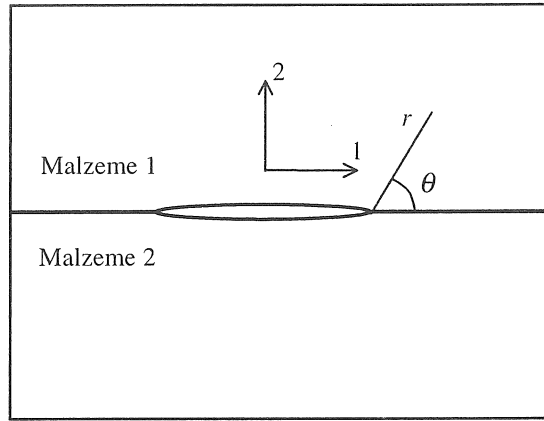
iki farklı malzemenin arayüzünde bulunan arayüz çatlakları Şekil 1'de gösterilmiştir. Bu çatlak dışarıdan yeterli yüklemeye uygulandığında malzeme özelliklerine ve yüklemeye durumuna bağlı olarak arayüz boyunca yada malzemelerden birinin bulunduğu yöne saparak ilerleyebilir. Çatlak ilerlemesinin başlayıp başlamayacağı şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı olarak tanımlanan bir kırılma mekaniği değişkeni hesaplanarak tahmin edilebilir. Kırılma mekaniğinde bu değişken kritik bir değere ulaştığında çatlak ilerlemesinin başlayacağı kabul edilir. Bu çalışmada arayüz çatlaklarına özel bir sonlu eleman geliştirilmiş ve şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarının sonlu elemanlar yöntemi ile nasıl hesaplanabileceği gösterilmiştir.

Arayüz çatlakları ile ilgili ilk teorik araştırmaların yapıldığı tarihler kırılma mekaniği alanının gelişmeye başladığı 1950'li yıllara kadar uzanır. Bu yıllarda Williams'ın homojen ortamda bulunan çatlaklar için geliştirdiği ve çatlak mekaniğinin anlaşılması açısından büyük önem taşıyan özfonksiyon açılımı tekniğini arayüz çatlakları içinde uyguladığını [1],

Erdoğan'ın ise Muskhelishvili [2] tarafından geliştirilen kompleks değişken tekniğini kullanarak sonsuz ortamda bulunan arayüz çatlakları için gerilme dağılımlarını belirlediğini görüyoruz [3]. Bu çalışmalardan sonra arayüz çatlakları ile ilgili birçok analitik çalışma yapılmıştır [4,5,6]. Arayüz çatlağı ile ilgili olarak Rice'in yaptığı çalışma [7] bir derleme makalesi olarak nitelenebilir. Yine arayüz çatlaklarının bulunduğu değişik geometriler için analitik çözümler, [8]'de bulunabilir.

Arayüz çatlağı probleminin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü konusunda da çalışmalar yapılmıştır. Van der Zande ve Grootenboer [9] hibrid bir sonlu elemanlar yöntemi ve çatlak ucunda tekil elemanlar kullanarak gerilme şiddeti çarpanlarını hesaplamışlardır. Venkatesha ve diğerleri [10] ise çatlak ucunu kapama yöntemini kullanarak arayüz

çatlakları için şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarını belirlemişlerdir. Sun ve Jih [11] tarafından yapılan çalışmada ise sonlu elemanlar yöntemiyle bulunan sonuçlar analitik çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bu çalışmadaki sayısal sonuçlar yine çatlak ucunu kapama yöntemiyle, diğer bir deyişle global enerji hesaplamalarıyla elde edilmiştir. Zenginleştirilmiş sonlu elemanların arayüz çatlaklarının incelenmesi için kullanıldığı çalışmalar ise sayıca oldukça sınırlıdır. Chen [12] tarafından yapılan çalışmada zenginleştirilmiş sonlu elemanlar izotropik iki ayrı malzeme arasında bulunan arayüz çatlaklarının incelenmesi için kullanılmıştır. Kaya ve Nied [13] ise bu zenginleştirilmiş sonlu elemanlar yaklaşımını ortotropik malzemeleri de kapsayacak şekilde geliştirmişlerdir.



Şekil 1. Arayüz çatlağı ve çatlak ucunda kutupsal koordinat sistemi

Bu çalışmada ilk olarak arayüz çatlağı ucundaki asimptotik yerdeğiştirme alanları verilmiştir. Zenginleştirilmiş sonlu elemanların formülasyonunda bu alanlar kullanılmakta, ve çatlak ucuna yerleştirilen sonlu elemandaki yerdeğiştirme alanının elastisite teorisinden elde edilen alanı kapsamı sağlanmaktadır. Gerilmelerin çatlak ucundaki tekil davranışı, bu şekilde sonlu elemanlar formülasyonuna eklenmektedir. Bunu izleyen bölümde ise zenginleştirilmiş sonlu elemanların nasıl formüle edildiği gösterilmiştir. Daha sonra, analitik olarak çözümü bilinen bazı arayüz çatlağı problemleri, geliştirilen sonlu elemanlar metodu ile çözülmüş ve bu metod ile elde edilen sonuçlardaki hatanın oldukça küçük olduğu gösterilmiştir. Son bölümde ise geliştirilen teknik ile elektronik paketlerdeki arayüzlerin kırılma dayanımının ölçülmesinde kullanılan dört nokta eğme testi modellenmiş ve elde edilen sonuçlar kısaca tartışılmıştır.

## ARAYÜZ ÇATLAĞI UCUNDA YERDEĞİŞTİRME ALANLARI

Şekil 1'de elastik davranış gösteren 1 ve 2 numaralı malzemelerin arayüzünde yer alan bir çatlak gösterilmiştir. Kırılma mekaniği ve yorulma analizleri açısından bu çatlağın ucundaki tekil gerilme ve yerdeğiştirme alanları büyük önem taşımaktadır. Şekil 1'de gösterilen çatlak ucundaki asimptotik gerilme ve yerdeğiştirme dağılımları giriş bölümünde bahsedilen kaynaklarda bulunabilir. Sonlu elemanlar analizinde kullanılacak olan çatlak ucu yerdeğiştirme alanları aşağıda verilmiştir, [14, 15]:

$$(u_1)_j = H^{(j)}(r, \theta)K_I + L^{(j)}(r, \theta)K_{II} \quad (1a)$$

$$(u_2)_j = I^{(j)}(r, \theta)K_I + M^{(j)}(r, \theta)K_{II} \quad (1b)$$

Bu eşitliklerde  $j$  malzeme numarasını göstermektedir ve 1 veya 2 olabilir.  $H^{(j)}, L^{(j)}, I^{(j)}$  ve

$M^{(j)}$  fonksiyonları Ek A'da verildiği gibi kutupsal koordinatlar  $r$  ve  $\theta$ 'nın fonksiyonlarıdır.  $K_I$  ve  $K_{II}$  sırasıyla, 1. mod ve 2. mod gerilme şiddeti çarpanlarıdır. Gerilme şiddeti çarpanlarının gerilmeler cinsinden tanımı ise aşağıdaki gibi yapılabilir [14,15]:

$$K_I + iK_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r}^{1/2-i\epsilon} (\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta}) \quad (2a)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{\kappa_1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) / \left( \frac{\kappa_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \right] \quad (2b)$$

$$\kappa_j = \begin{cases} 3 - 4\nu_j & \text{düzlem gerinim için} \\ 3 - \nu_j & \text{düzlem gerilme için} \end{cases} \quad (2c)$$

$\mu$  malzemelerin kesme modülü,  $\nu$  ise Poisson sabitidir. Arayüz çatlakları ile ilgili olarak ilk belirtilmesi gereken nokta yüklemenin asimptotik alan üzerindeki etkisini taşıyan  $K_I$  ve  $K_{II}$  çarpanlarının mod I ve mod II yüklemesinin etkisini ayrı ayrı göstermedikleridir. Sadece normal gerilme yüklemesi altında olan bir arayüz çatlakında dahi, genel olarak  $K_{II}$  değeri sıfıra eşit değildir. Ayrıca arayüz çatlaklarında bulunan çatlak ucundaki tekillik homojen ortamda bulunan çatlaklardaki gibi karekök tekilliği değildir. Çatlak ucundaki gerilmeler osilasyonlu bir davranışa sahiptir. Zenginleştirilmiş sonlu elemanlar yönteminde çatlak ucundaki yer değiştirme alanları, çatlak ucunda kullanılan sonlu elemanların yer değiştirme alanına dahil edilmektedir. Bu yüzden formülasyonda gerilme alanları yerine yer değiştirme alanları kullanılmaktadır. Arayüz çatlakları için gerilme şiddeti çarpanları sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplandıktan sonra şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı  $G$ , bu çarpanlar cinsinden rahatlıkla hesaplanabilir.

#### ARAYÜZ ÇATLAĞI ANALİZİNDE KULLANILAN DÜĞÜM NOKTASI İLE ZENGİNLEŞTİRİLMİŞ KÜBİK SONLU ELEMAN

Zenginleştirilmiş sonlu elemanların formülasyonunda yukarıda verilen asimptotik yer değiştirme alanları kullanılmıştır. Bu elemanların yer değiştirme alanında, her bir düğüm noktasında bulunan 2 yer değiştirme değerine ek olarak gerilme şiddeti çarpanları  $K_I$  ve  $K_{II}$  de bilinmeyen olarak bulunmaktadır. Bu çalışmada 10 düğüm noktasına sahip üçüncü dereceden yer değiştirme alanı olan üçgen elemanlar kullanılarak zenginleştirilmiş sonlu elemanlar geliştirilmiştir. Zenginleştirilmiş 10 düğümlü üçgen elemanda toplam bilinmeyen sayısı 22'ye eşittir. Şekil 2, 10 düğümlü kübik üçgen elemanı göstermektedir. Şekil 2'de gösterilen 10

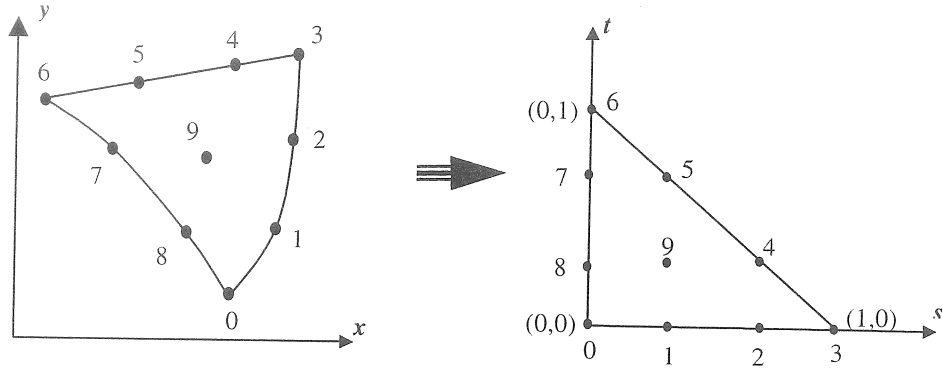
düğümlü zenginleştirilmiş üçgen sonlu elemanın yer değiştirme alanı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 & 0 & \dots & Z_0(H^{(j)} - [N]H^{(j)}) & Z_0(L^{(j)} - [N]L^{(j)}) \\ 0 & N_0 & \dots & Z_0(I^{(j)} - [N]I^{(j)}) & Z_0(M^{(j)} - [N]M^{(j)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \quad (3a)$$

$$[N] = [N_0 \ N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9] \quad (3b)$$

Bu eşitlikteki  $u_1^{(j)}$  ve  $u_2^{(j)}$ , sırasıyla 1 ve 2 yönlerindeki yer değiştirmelerdir.  $j$  ise 1. denkleme olduğu gibi malzeme numarasını göstermektedir.  $[N]$  şekil fonksiyonlarından oluşan  $1 \times 10$  boyutunda bir matristir. 10 - düğümlü üçgen kübik elemanın şekil fonksiyonları Ek B'de verilmiştir. (3a) numaralı eşitliğin sağ tarafındaki bilinmeyenler vektörü her bir düğüm noktasındaki yer değiştirmelerden ve gerilme şiddeti çarpanlarından oluşmaktadır.  $Z_0$  fonksiyonu ise sıfırlama fonksiyonudur. Bu fonksiyon zenginleştirilmiş sonlu eleman ile onu çevreleyen elemanlar arasındaki uyumluluğu sağlamak için kullanılmaktadır. Çatlak ucunu çevreleyen zenginleştirilmiş sonlu elemanlarda  $Z_0$  bire eşit iken, bu elemanları çevreleyen geçiş elemanlarında  $Z_0$  birden sıfıra doğrusal olarak değişmektedir. Üçgen elemanın düğüm noktalarında ve kenarlarında  $Z_0$  fonksiyonu izoparametrik koordinat sisteminde Ek B'de verilmiştir. Denklem (3a)'da kullanılan  $\{H^{(j)}\}$ ,  $\{L^{(j)}\}$ ,  $\{I^{(j)}\}$  ve  $\{M^{(j)}\}$  vektörleri  $H^{(j)}$ ,  $L^{(j)}$ ,  $I^{(j)}$ , ve  $M^{(j)}$  fonksiyonları her bir düğüm noktasında hesaplanarak elde edilebilir. Asimptotik alan bu şekilde zenginleştirilmiş eleman formülasyonuna eklendikten sonra gerinim matrisi aşağıdaki gibi kolaylıkla hesaplanabilir:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(j)} \\ \epsilon_{yy}^{(j)} \\ \gamma_{xy}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$



Şekil 2. 10 – düğümlü kübik üçgen eleman ve izoparametrik koordinat sistemine izdüşümü

(3) ve (4) numaralı eşitlikleri ve sanal iş prensibini kullanarak zenginleştirilmiş 10 düğüm noktalı üçgen sonlu elemanın elastikiyet matrisini aşağıdaki gibi oluşturmak mümkündür:

$$[K] = \int_{A_e} [B]^T [D][B] dA \quad (5)$$

$A_e$ , 10 – düğümlü bir üçgen elemanın alanıdır.  $[B]$  ve  $[D]$  matrislerinin nasıl hesaplanacağı ise Ek C’de gösterilmiştir. Zenginleştirilmiş sonlu eleman için elastikiyet matrisini bu şekilde elde ettikten sonra, herhangi bir sonlu elemanlar kodu üzerinde yukarıda belirtilen değişiklikleri yaparak zenginleştirilmiş sonlu elemanlar tekniğini uygulamak mümkündür. Bu çalışmada Lehigh Üniversitesi’nde geliştirilen FRAC2D [15] isimli sonlu elemanlar programı üzerinde gerekli değişiklikler yapılmış ve üçüncü dereceden yerdeğiştirme alanına sahip zenginleştirilmiş sonlu elemanların kullanıldığı bir sonlu elemanlar kodu geliştirilmiştir. Aşağıda da gösterileceği gibi, bu programı kullanarak arayüz çatlak problemlerini yüksek bir doğruluk derecesinde çözmek mümkün olmaktadır.

#### ÖRNEK PROBLEMLER VE KARŞILAŞTIRMALAR

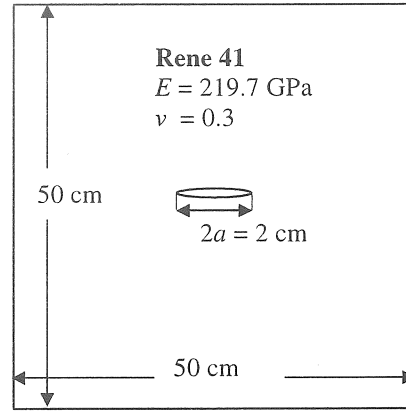
Yukarıda özetlenen zenginleştirilmiş sonlu elemanlar tekniği ile gerilme şiddeti çarpanları olarak tanımladığımız  $K_I$  ve  $K_{II}$ ’yi sonradan işlem yapmadan doğrudan global doğrusal denklem sistemlerinin çözümünden elde etmek mümkündür. Bu makalede geliştirilen formülasyonu ve sonlu elemanlar tekniğini test etmek için analitik çözümleri bilinen bazı problemler test problemleri olarak kullanılmıştır.

#### Örnek 1

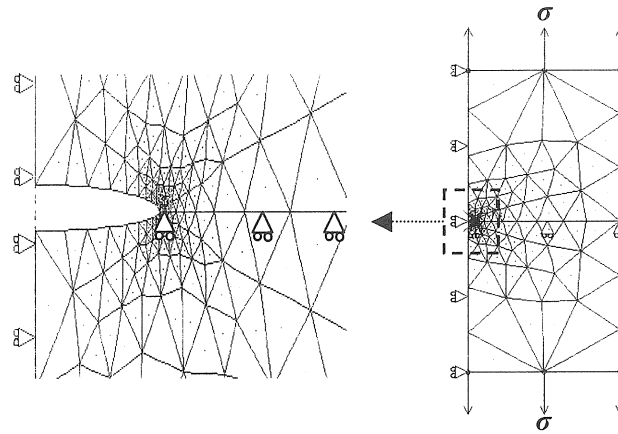
İlk test problemi olarak Şekil 3’de verilen 50 cm x 50 cm boyutlarında, ortasında 2 cm uzunluğund bir çatlak bulunan ve nikel bazlı bir alaşım olan Ren 41 malzemesinden yapılmış homojen bir levha el alınmıştır. Levhaya çatlak düzlemine dik yönde uzatılmış gerilme uygulanmış ve oluşan gerilme şiddet çarpanları hesaplanarak analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar modeli, yükler ve sınır koşulları Şekil 4’de verilmiştir. Sonlu elemanlar modelinde, yukarıda formülasyonu verilen 10 düğüm noktalı kübik üçgen elemanlar kullanılmıştır. Simetriden dolayı geometrinin yarısı modellenmiştir. Bu problemde simetriden dolayı geometrinin sadece dörtte birini modellemek de mümkün olurdu, fakat 2. test probleminde arayüz çatlak modellendiği için, aynı sonlu elemanlar modelini her iki test probleminde de kullanabilmek amacıyla yarım simetri tercih edilmiştir. Test probleminde kullanılan levhanın boyutları çatlak uzunluğuna göre oldukça büyük olduğu için elde edilen sonuçlar, ortasında yatay çatlak bulunan sonsuz büyüklükteki homojen levha için geçerli olan analitik çözüm ile karşılaştırılabilir. Kırılma mekaniğindeki en temel problem olarak nitelenebilecek bu problemin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = 0 \quad (6)$$

Bu denklemde  $K_I$  ve  $K_{II}$  sırasıyla mod I ve mod II gerilme şiddeti çarpanları,  $a$  yarı çatlak boyu,  $\sigma$  levhanın üst ve alt kenarlarına uygulanan dikey gerilmedir (Bakınız Şekil 4). Bu denklem hem düzlem gerilme hem de düzlem gerinim durumları için geçerlidir. Test probleminde uygulanan gerilme değeri  $\sigma = 100$  Pa’dır. Karşılaştırma sonuçları Tablo 1’de verilmiştir.



Şekil 3. İçinde 2 boyutlu merkezi bir çatlak barındıran levha ve malzeme özellikleri.  $E$  elastik modül,  $\nu$  ise Poisson sabitidir.



Şekil 4. Test probleminde kullanılan sonlu elemanlar modeli, yükler, sınır koşulları ve çatlakın deforme olmuş hali.

Çizelge 1. Test problemi için sonuçların karşılaştırılması.  $\sigma = 100 \text{ Pa}$ .

	Zenginleştirilmiş sonlu elemanlar		Denklem (6)	
	$K_I (Pa\sqrt{m})$	$K_{II} (Pa\sqrt{m})$	$K_I (Pa\sqrt{m})$	$K_{II} (Pa\sqrt{m})$
Düzlem gerinim	17.733	0.000041	17.724	0.0
Düzlem gerilme	17.730	0.000241	17.724	0.0

Tablodan da anlaşılacağı gibi zenginleştirilmiş sonlu elemanlar ile elde edilen sonuçlardaki hata mod I gerilme şiddeti çarpanları için % 0.05 civarındadır. Bu hatanın nedeni ise sayısal yuvarlamalar ve modelde sonlu geometri kullanılmasıdır. Aynı nedenlerden dolayı sıfır olması gereken mod II gerilme şiddeti çarpanı içinde çok küçük bir hata olduğunu görüyoruz. Sonuç olarak bu çalışmada geliştirilen zenginleştirilmiş sonlu eleman metodunun

arayüz çatlak için formüle edilmiş olmasına rağmen, homojen malzeme içindeki karışık mod çatlak problemlerinin çözümünde de kullanılabileceğini söyleyebiliriz.

#### Örnek 2

İkinci test problemi olarak iki farklı izotropik malzemenin arasındaki arayüz çatlak ele alınmıştır. Pratik olması amacıyla malzeme olarak türbinlerde

kullanılan metal/seramik ikilisi seçilmiştir. Modelde metal olarak Rene 41 alaşımı ve seramik olarak zirkonya kullanılmıştır. Problem geometrisi 1. test probleminin geometrisi ile aynıdır. Uygulanan sınır koşullarına ise bir ek yapılmış ve sonsuz levha çözümünü taklit edebilmek için levhanın sağ kenarındaki bütün düğüm noktalarının yatay yöndeki yer değiştirmeleri eşit olmaya zorlanmıştır. Bunun nedeni sonsuz levhanın, sonsuz uzaklıkta olan sağ kenarındaki gerininin her iki malzeme için eşit olmasıdır. Bu problemde farklı çatlak boyları ( $0 \leq a \leq 6$  cm) ve  $\sigma = 100$  Pa için gerilme şiddeti çarpanları ve şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarları hesaplanmış ve mevcut olan analitik çözümler [5] ile karşılaştırılmıştır. Malzemelerin özellikleri ve modelde kullanılan geometri Şekil 5'de gösterilmiştir. Sonsuz düzlemde bulunan arayüz çatlak ucundaki gerilme şiddeti çarpanları için analitik çözüm Rice ve Sih [5] tarafından geliştirilmiştir ve aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\cosh \pi \varepsilon} (\cos(\varepsilon \ln 2a) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln 2a)) \quad (7a)$$

$$K_{II} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\cosh \pi \varepsilon} (2\varepsilon \sin(\varepsilon \ln 2a) - \sin(\varepsilon \ln 2a)) \quad (7b)$$

$\varepsilon$  (2b) eşitliğinde verilmiştir. Arayüz çatlakları ile ilgili kırılma analizlerinde, çatlak ilerlemesinin başlayıp başlamayacağını hesaplamak için kullanılan değişken, şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarıdır [8]. Yüklemeden kaynaklanan şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı, arayüzün kırılma tokluğu ile karşılaştırılarak kırılma analizi yapılabilir. (7) numaralı eşitlikte verilen gerilme şiddeti çarpanlarının bilinmesi durumunda, şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı aşağıdaki denklem kullanılarak hesaplanır [5]:

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E_0 \cosh^2(\pi \varepsilon)} \quad (8)$$

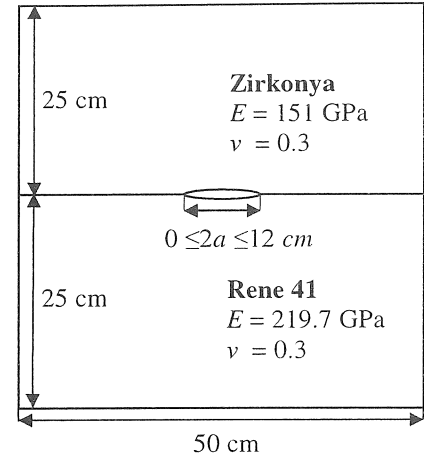
Denklemdaki  $E_0$  sabiti ise düzlem gerinim durumu için:

$$\frac{1}{E_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \quad (9)$$

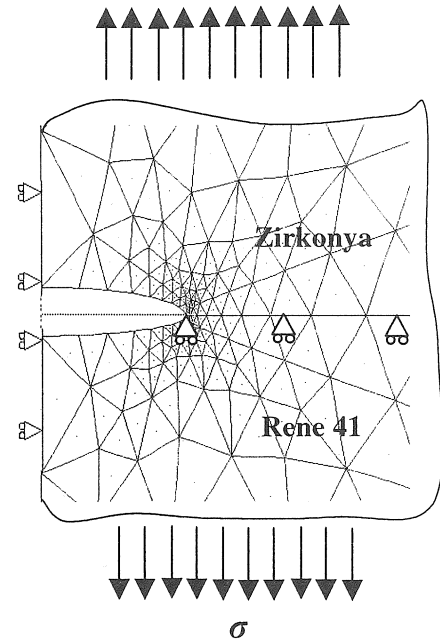
ve düzlem gerilme durumu için ise,

$$\frac{1}{E_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (10)$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir. (8) – (10)'da,  $K_I$  ve  $K_{II}$  sırasıyla, mod I ve mod II gerilme şiddeti çarpanları,  $a$  yarı çatlak boyu,  $\sigma$  levhanın üst ve alt kenarlarına uygulanan dikey gerilim,  $G$ , şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı,  $E$  ve  $\nu$  ise malzemelerin elastisite modülü ve Poisson sabitidir. Şekil 6'da arayüz çatlaklarının sonlu elemanlar modeli kullanılarak elde edilen deforme olmuş hali görülmektedir. Şekil 6 ve Şekil 4 karşılaştırıldığında, arayüz çatlaklarının yüzeylerinin simetrik olmayan deformasyonu açık bir şekilde görülmektedir. Bu deformasyon homojen bir malzeme içindeki bir çatlakta simetriktrir.



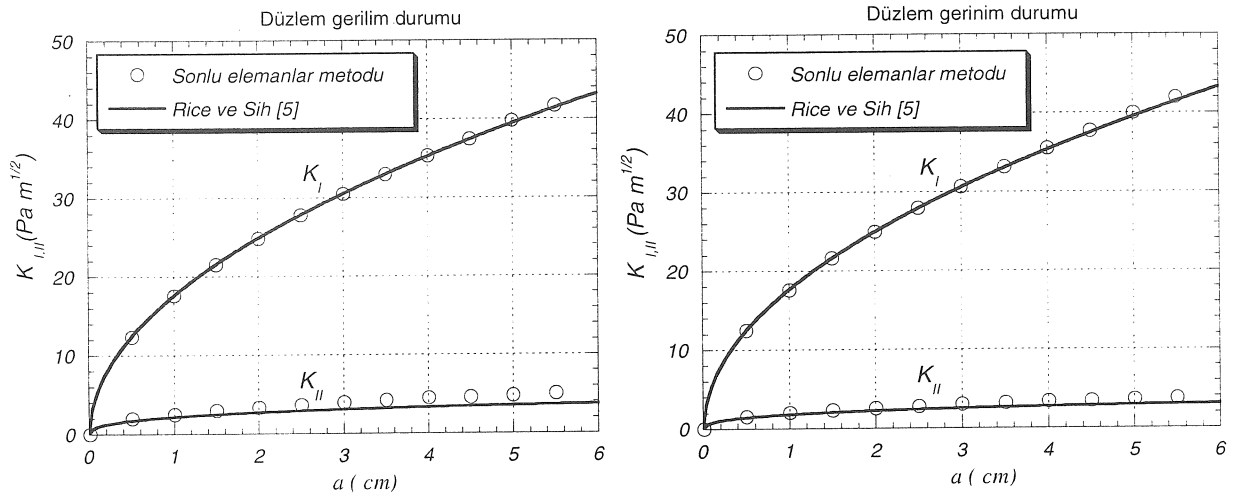
Şekil 5. 2. test problemi geometrisi ve malzeme özellikleri.



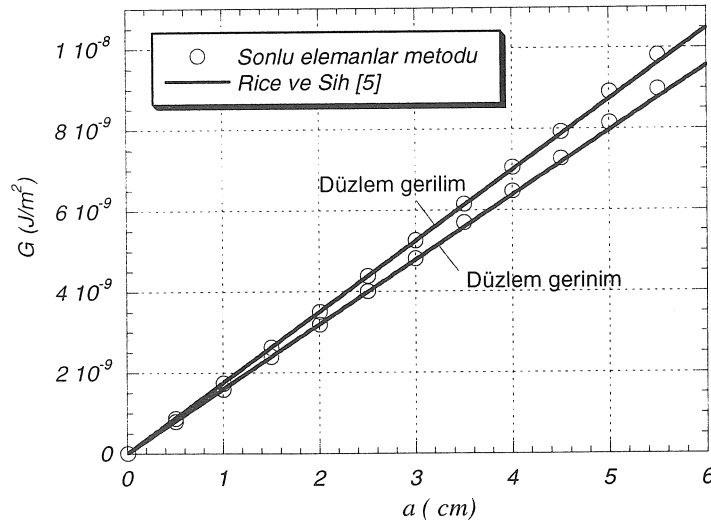
Şekil 6. 2. test probleminde kullanılan sonlu elemanlar modeli, yükler ve sınır koşulları.  $\sigma = 100$  Pa. Deforme olmuş model uzamalar  $1 \times 10^5$  ile çarpılarak çizilmiştir.

Zenginleştirilmiş sonlu elemanlardan ve 7 numaralı eşitlikten elde edilen gerilme şiddeti çarpanlarının karşılaştırması Şekil 7'de verilmiştir. Bu şekillerden anlaşılacağı gibi özellikle küçük çatlak boyları için analitik ve sayısal sonuçlar birbirine çok yakındır. Fakat çatlak boyu büyüdükçe gerilme şiddeti çarpanlarında farklılıklar gözlenmektedir. Bunun nedeni sonlu elemanlar modelinde, çatlak boyunun levhanın boyuna olan oranının büyümesinden dolayı sonsuz büyüklükteki levha varsayımının çatlak uzunluğu arttıkça geçerliliğini yitirmesidir. Bu problemde tek eksenli yükleme olmasına rağmen arayüz çatlaklarının karakteristiğinden dolayı mod II gerilim şiddeti çarpanı da sıfırdan farklı bir değere sahiptir. Zenginleştirilmiş sonlu elemanlar

yöntemiyle ve (8)-(10) numaralı denklemlerden elde edilen şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarlarının karşılaştırması Şekil 8'de verilmiştir. Yukarıda açıklanan nedenle, büyük çatlak boyları için sonlu elemanlar metodu ile hesaplanan şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarları analitik çözümden az da olsa sapmaktadır. Bu şekide düzlem gerilim ve düzlem gerilme durumlarının arasındaki fark da açıkça görülmektedir ve beklendiği gibi düzlem gerilme durumunda daha fazla enerji bırakımı olmaktadır. Diğer dikkati çeken bir sonuçta, şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı ile çatlak boyu arasında doğrusal bir ilişki olmasıdır.



Şekil 7. 2. test problemi için sonlu elemanlar metodu ile hesaplanan gerilme şiddeti çarpanlarının Rice ve Sih [5] tarafından verilen analitik sonuçlar ile karşılaştırılması.  $\sigma = 100$  Pa.



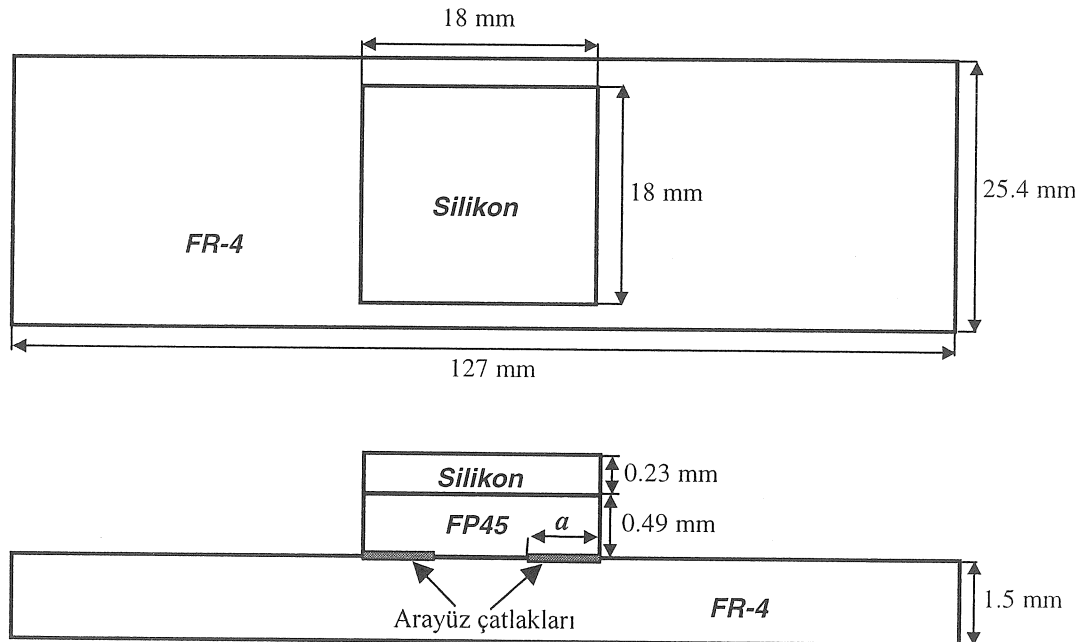
Şekil 8. 2. test problemi için sonlu elemanlar metodu ile hesaplanan şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarlarının Rice ve Sih [5] tarafından verilen analitik sonuçlar ile karşılaştırılması.  $\sigma = 100$  Pa.

## ARAYÜZ ÇATLAKLARININ KIRILMA MEKANİĞİ İLE İLGİLİ BİR UYGULAMA: DÖRT NOKTA EĞME TESTİ

Arayüz çatlaklarının kırılma mekaniğinin gözönüne alındığı önemli uygulamalardan birisi elektronik uygulamalarında kullanılan yarı-iletken paketlerdir. Bu paketlerde birbirinden farklı mekanik özellikler gösteren malzemeler kullanılmakta ve bu yüzden arayüzlerde çatlak ilerlemesi ve ısıl yüklenme altında malzeme yorulması olaylarına sık sık rastlanılmaktadır. Elektronik paketlerin tasarımında kırılma mekaniği teknolojisinin kullanılabilmesi için, farklı malzemelerin oluşturduğu arayüzlerin bağ dayanımının kırılma mekaniğinde kullanılan parametreler cinsinden ölçülmesi gerekir. Bu parametreler aşağıda da belirtileceği gibi şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı ve gerilme şiddeti çarpanlarının oranı kullanılarak hesaplanan faz açısıdır. Bu ölçümlerin pratikte kullanılabilir olması içinde, elde edilen verilerin orijinal test geometrisinden başka geometrilere de uygulanabilir olması gerekmektedir. Bu yüzden ölçümlerin standardlaştırılmış deney düzenekleri ile gerçekleştirilmesi zorunludur.

Bu bölümde yukarıdaki kısımlarda teorik altyapısı açıklanan zenginleştirilmiş sonlu elemanlar teknikleri kullanılarak, sıvı kapsüllenmiş elektronik paketleri için uygulanmakta olan arayüz kırılma testleri modellenmiştir. Elektronik paketlerde kullanılan malzemelerin arayüz kırılma dayanımını belirlemek için genellikle Standard Dört Nokta Eğme Testi uygulanmaktadır. Elektronik paketlerde değişik malzeme katmanları arasındaki bağ kuvvetinin deneysel ölçümü tüm paketin bütünlüğü ile ilgili

hesaplar açısından kritik önem taşımaktadır. Bu özellikle sürekli neme ve sıcaklık değişimine maruz kalan elektronik paketler için çok önemlidir. Arayüz bağ dayanımının ölçülmesinde kırılma mekaniğinin kullanılması arayüz bütünlüğünün karakterizasyonu için günümüzde tercih edilen metod olarak kabul edilmektedir. Bu paketlerdeki arayüzler karışık mod yüklenme altındadır. Araştırmacılar kontrollü karışık mod kırılma testlerini yapabilmek için çeşitli deney düzenekleri geliştirmişlerdir ve genellikle karışık modun kontrollü uygulanan dikey gerilmenin, kesme gerilmesine oranı kontrol edilerek sağlanır. Dört nokta eğme testi ise, karışık mod test metodları arasında en güvenilir olanlardan birisi olarak kabul edilmektedir. Karışık mod kırılma test modellerinde şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarının ve gerilme şiddeti çarpanlarının oranının ( $K_{II}/K_I$ ) hesaplanması büyük önem taşır, çünkü bu parametreler arayüzlerin karakterizasyonunda kullanılmaktadır. Şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı  $G$ , global enerji metodları ile hesaplanabilmesine rağmen,  $K_{II}/K_I$  oranını hesaplamak çatlak ucunda yapılması gereken çok hassas bir analizi gerektirir. Bu analizin özellikle sayısal yöntemlerle yapılmasında zorluklar olmasının nedeni gerilme şiddeti çarpanlarının bağlantılı ve iki malzemenin özelliklerine bağlı olmasıdır. Zenginleştirilmiş sonlu elemanlar yöntemiyle ise bu analizleri yapabilmek mümkündür. Bu çalışmada Dört Nokta Eğme Testini modellemek için zenginleştirilmiş sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Modellenen test örneği Şekil 9 da gösterilmiştir.



Şekil 9. Dört nokta eğme testinin uygulandığı test örneği.



Görülebileceği gibi test örneğinde üç ayrı malzeme bulunmaktadır: Silikon, FP45 ve FR4. Bu malzemeler yarı-iletken elektronik paketlerde standard olarak kullanılan malzemelerdir ve bu malzemelerin mekanik özellikleri Tablo 2 de verilmiştir. Dört nokta eğme deneylerinde FP45 ile FR4 malzemeleri arasında Şekil 9 da görülebileceği gibi iki adet arayüz çatlağı kullanılır. Kırılma esnasında bu çatlakların ucunda oluşan şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarını deneysel olarak ölçmek mümkündür. Bu ölçüm sonucunda deneyde kullanılan malzeme çifti için (FP45 – FR4) geçerli olan kırılma tokluğu belirlenir. Bu çalışmada ise şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı sonlu elemanlar modeli kullanılarak hesaplanmıştır. Şekil 10'da test örneğinin yüklenme şekli gösterilmiştir. Öncelikle dört nokta eğme ile yüklenen numunenin küçük deformasyon ve rotasyona maruz kaldığı kabul edilerek doğrusal sonlu elemanlar problemi çözülmüş ve farklı çatlak uzunlukları için ( $1 \text{ mm} \leq a \leq 7 \text{ mm}$ ) şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarları ve faz açıları hesaplanmıştır. Bu hesaplamalarda  $P = 2 \text{ N}$  olarak alınmıştır.

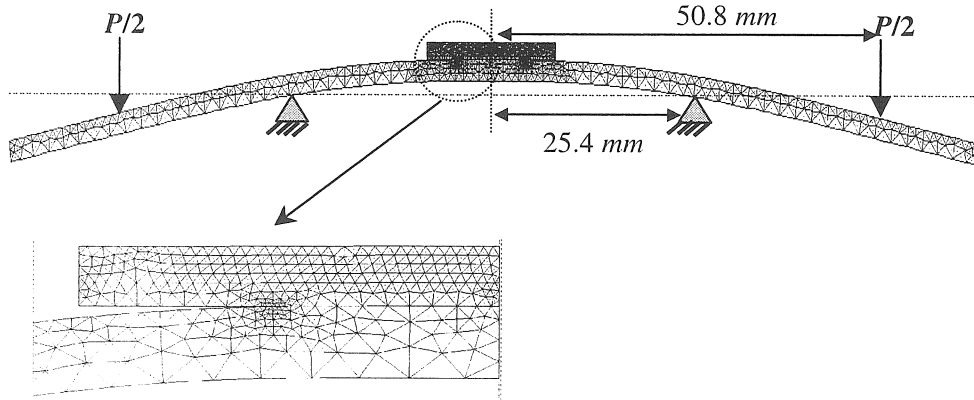
Çizelge 2. Test örneğini oluşturan malzemelerin mekanik özellikler

	E (Pa)	$\nu$
<b>Silikon</b>	$1.299 (10)^{11}$	0.279
<b>FP45</b>	$1.21(10)^{10}$	0.35
<b>FR-4</b>	$2.34(10)^{10}$	0.33

Dört nokta eğme deneyinde  $K_{II}/K_I$  oranının bilinmesi bağ dayanımının hesaplanmasında büyük önem taşımaktadır. Arayüzün bağ dayanımı kritik şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarına bağlıdır. Kritik şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı ise faz açısına bağlı olarak değişmektedir [8]. Faz açısının formülü aşağıdaki gibidir:

$$\text{Faz açısı} = \tan^{-1}(K_{II}/K_I) \quad (11)$$

Sonlu elemanlar modeli ile elde edilen sonuçlar Şekil 11 ve 12'de gösterilmiştir. Şekil 11 ve 12'de sırasıyla, iki çatlaktan herhangi birinin ucundaki şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı ve faz açısı verilmiştir. Bu şekillerden anlaşılacağı gibi şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı ve faz açısı çatlak boyundan çok fazla etkilenmemektedir, yani farklı çatlak boyları için bu parametreler sabittir. Bu iki parametrenin sabit olması gerilme şiddet çarpanlarının da çatlak boyundan etkilenmediğini göstermektedir. Şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarının çatlak boyundan bağımsız olması kırılma deneylerinde arzu edilen bir durumdur çünkü bu durumun geçerli olduğu deney düzenekleri ile yapılan deneylerde çatlak uzunluğunu ölçmeye gerek kalmamaktadır. İkinci olarak ise çatlak boyu sabit tutularak ( $a = 4 \text{ mm}$ ) yarı yük  $P/2$ , 0 ile 200 N arasında değiştirilmiş ve her yarı yüke karşı gelen şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı hesaplanmıştır. Modeller değiştirilmeden aynı sonuçlar sonlu elemanlar programının büyük



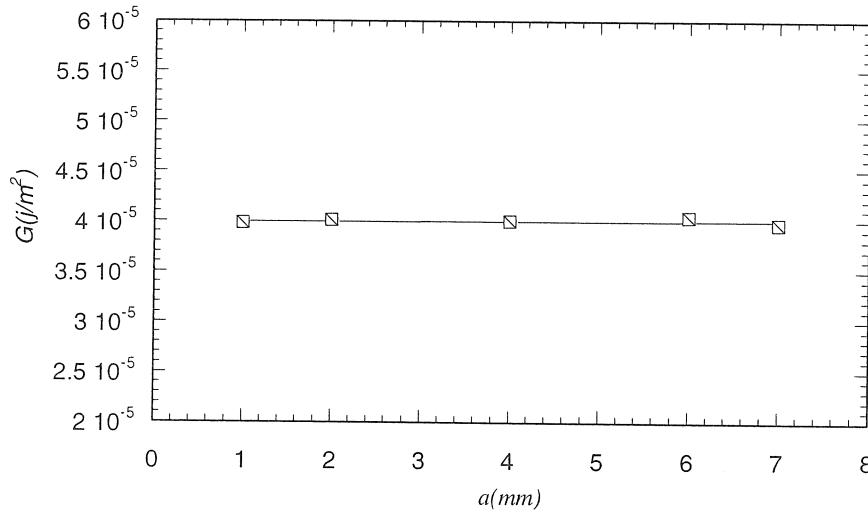
Şekil 10. Dört nokta eğmeye tabi tutulan test örneğinin sonlu elemanlar modeli ve arayüz çatlığının yakından görünüşü.

deformasyon ve rotasyon opsiyonu kullanılarak da hesaplanmıştır. Büyük deformasyon ve rotasyon formülasyonu ile ilgili detaylar [15]'de bulunabilir. Sonuçlar Şekil 13 de gösterilmiştir. 60 N'a kadar uygulanan yükler doğrusal bir deformasyona neden olmakta ve 60 N'dan küçük yarım yük değerleri için geometride büyük rotasyon ve deformasyon oluşmamaktadır. Genelde bu çalışmada kullanılan malzemeler ile uygulanan, dört nokta eğme deneylerinde kullanılan yükler 60 N'un altında olacağı için, doğrusal, küçük deformasyon analizi ile elde edilen sonuçlar yeterli doğrulukta olacaktır. Ancak 60 N'dan büyük yükler için doğrusal olmayan büyük deformasyon ve rotasyon analizi yapılmalıdır.

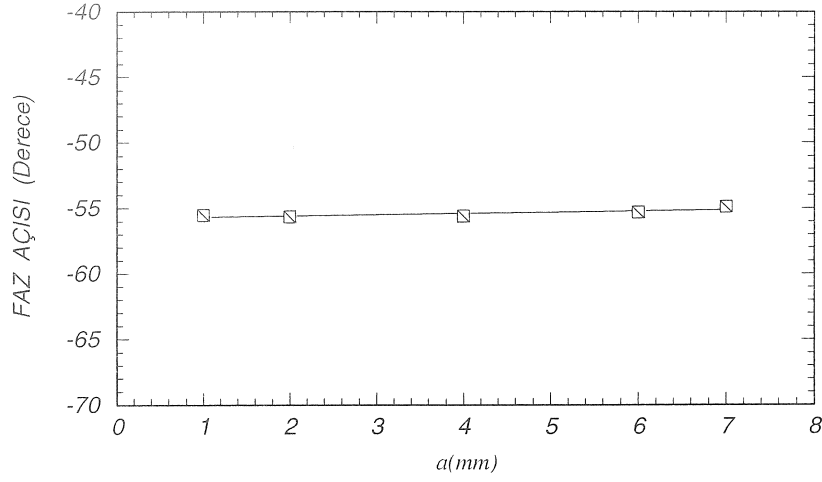
## SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada arayüz çatlak problemlerini çözebilmek için zenginleştirilmiş sonlu elemanlar kullanılmıştır. 10 düğümlü kübik sonlu elemanın çatlak ucundaki asimptotik yerdeğiştirme alanları kullanılarak nasıl zenginleştirilebileceği gösterilmiş ve bu elemanlar kullanılarak bir sonlu elemanlar programı geliştirilmiştir. Sonsuz homojen ortamda bulunan bir çatlak için yapılan hesaplamalarda, geliştirilen programın homojen ortamda bulunan çatlaklar için de doğru sonuç verdiği gösterilmiştir. Bu problemdeki hata oranı yaklaşık % 0.05'dir. Arayüz çatlak için yapılan testde de, zenginleştirilmiş sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlardaki hatanın oldukça düşük olduğu görülmüştür. Bu derecede bir doğruluk seviyesine diğer sonlu elemanlar yöntemleriyle (Örneğin, çatlak

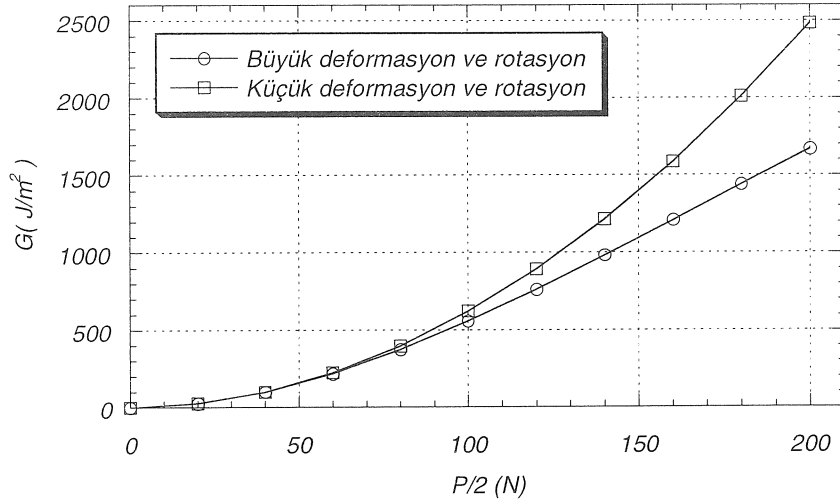
ucuna tekil elemanlar koyma tekniği veya çatlak ucunu kapama tekniği) ulaşmak ise oldukça zordur. Yukarıda bahsedilen iki test probleminde elde edilen sonuçlar, hem sonsuz homojen ortamda bulunan çatlak probleminde hem de sonsuz ortamda bulunan arayüz çatlaklarında, şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı ile çatlak uzunluğu ilişkisinin normal yüklemeye altında doğrusal olduğunu göstermiştir. Kullanılan yöntemin doğruluğu ve güvenilirliği bu şekilde test edildikten sonra dört nokta eğme testi, geliştirilen elemanlarla modellenmiştir. Dört nokta eğme testi özellikle yarı-iletken paketlerde kullanılan farklı malzemelerin arayüzlerinin bağ dayanımını ölçmekte kullanılmaktadır. Dört nokta eğme testinde, şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarı ve faz açısının kullanılan çatlak uzunluğu aralığında sabit olduğu gösterilmiştir. Bu ise, bu testin tercih edilmesinin nedenlerinden biridir. Şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarının sabit olması test sırasında çatlak uzunluğunu ölçmeyi gereksiz kılmaktadır. Bu çalışmada kullanılan test örneğinin, dört nokta eğme altındaki davranışı büyük deformasyon ve rotasyon formülasyonu kullanılarak da incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar 60 N'dan büyük yarım yükler için doğrusal elastik modelin yeterli doğrulukta sonuç vermediğini göstermektedir. Bu yük aralığında büyük deformasyon ve rotasyon formülasyonu kullanılmaktadır. Ancak, genelde bu çalışmada gözönüne alınan malzemelerin kullanıldığı dört nokta eğme testlerinde kullanılan yükler 60 N'un altında olacağı için, doğrusal küçük deformasyon analizi ile elde edilen sonuçlar yeterli doğrulukta olacaktır.



Şekil 11. Şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarının çatlak boyuna göre değişimi.  $P = 2$  N. (düzlem gerinim)



Şekil 12. Faz açısının çatlak boyuna göre değişimi.  $P = 2$  N. (düzlem gerinim)



Şekil 13. Şekil değiştirme enerjisi bırakma miktarının uygulanan yüke göre değişimi.  $a = 4$  mm.

#### MODELLING OF INTERFACE CRACKS USING ENRICHED FINITE ELEMENTS AND THE FOUR POINT BENDING TEST

In engineering applications where materials with different thermomechanical properties are used, some of the problems that are endangering the structural integrity are due to interface cracks. In fracture mechanics applications where these cracks may initiate and further propagate depending on the loading conditions, it is necessary to calculate the stress intensity factors and the strain energy release rate at the crack tip. In this study, in order to be able to calculate these variables using the finite element method, a new type of finite element is developed and implemented. This element is called the enriched finite element and its displacement field contains the

asymptotic interface crack tip displacement field that is obtained from the elasticity solution. The crack problem in a homogeneous half plane and the problem of interface crack are solved using the developed finite element technique and the results are compared to those obtained from the analytical formulations. It is shown that, the developed method is capable of giving results of high accuracy. Lastly, the four point bending test which is generally conducted to determine interface bonding strength in semi-conductor electronic packages is modelled using the enriched finite elements and the results are briefly discussed.

Keywords: Interface Crack, Enriched Finite Elements, Stress Intensity Factors, Strain Energy Release Rate, Four Point Bending Test.

## EKLER

### EK A

Çatlak ucu yerdeğiştirme alanlarında kullanılan fonksiyonlar

$$H^{(j)} = \frac{1}{4\mu_j \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (D_j + 2\delta_j \sin(\theta) \sin(\Theta)) \quad (A1)$$

$$L^{(j)} = -\frac{1}{4\mu_j \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (E_j - 2\delta_j \sin(\theta) \cos(\Theta)) \quad (A2)$$

$$I^{(j)} = \frac{1}{4\mu_j \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (E_j + 2\delta_j \sin(\theta) \cos(\Theta)) \quad (A3)$$

$$M^{(j)} = -\frac{1}{4\mu_j \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (D_j - 2\delta_j \sin(\theta) \sin(\Theta)) \quad (A4)$$

$$\delta_1 = \exp(-(\pi - \theta)\varepsilon), \quad \delta_2 = \exp((\pi + \theta)\varepsilon) \quad (A5a,b)$$

$$\Theta = \varepsilon \ln r + \frac{\theta}{2} \quad (A6)$$

$$D_j = \beta\gamma_j \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \beta'\gamma'_j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (A7a)$$

$$E_j = \beta'\gamma_j \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \beta\gamma'_j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (A7b)$$

$$\beta = \frac{0.5 \cos(\varepsilon \ln r) + \varepsilon \sin(\varepsilon \ln r)}{0.25 + \varepsilon^2} \quad (A8a)$$

$$\beta' = \frac{0.5 \sin(\varepsilon \ln r) - \varepsilon \cos(\varepsilon \ln r)}{0.25 + \varepsilon^2} \quad (A8b)$$

$$\gamma_j = \kappa_j \delta_j - \frac{1}{\delta_j}, \quad \gamma'_j = \kappa_j \delta_j + \frac{1}{\delta_j} \quad (A9a,b)$$

Eşitliklerde kullanılan  $\varepsilon$  (2b) eşitliğinde verilmiştir.

### EK B

10 - düğümlü üçgen kübik sonlu elemanın şekil fonksiyonları ve sıfırlama fonksiyonu

$$N_0 = \frac{1}{2}(1-s-t)(2-3s-3t)(1-3s-3t) \quad (B1)$$

$$N_1 = \frac{9s}{2}(1-s-t)(2-3s-3t) \quad (B2)$$

$$N_2 = \frac{9s}{2}(1-s-t)(3t-1) \quad (B3)$$

$$N_3 = \frac{s}{2}(3s-1)(3s-2) \quad (B4)$$

$$N_4 = \frac{9st}{2}(3s-1) \quad (B5)$$

$$N_5 = \frac{9st}{2}(3t-1) \quad (B6)$$

$$N_6 = \frac{t}{2}(3t-1)(3t-2) \quad (B7)$$

$$N_7 = \frac{9t}{2}(1-s-t)(3t-1) \quad (B8)$$

$$N_8 = \frac{9t}{2}(1-s-t)(2-3s-3t) \quad (B9)$$

$$N_9 = 27st(1-s-t) \quad (B10)$$

$$Z_0(s,t) = \begin{cases} 1-s-t & ; \text{ Köşe düğüm noktasından sıfırlama için} \\ s & ; \text{ Köşe düğüm noktasından sıfırlama için} \\ t & ; \text{ Köşe düğüm noktasından sıfırlama için} \\ s+t & ; \text{ Eleman kenarından sıfırlama için} \\ 1-s & ; \text{ Eleman kenarından sıfırlama için} \\ 1-t & ; \text{ Eleman kenarından sıfırlama için} \end{cases} \quad (B11)$$

### EK C

Zenginleştirilmiş sonlu eleman elastikiyet matrisinde kullanılan [B] ve [D] matrisleri

Sanal iş prensibi kullanılarak elastikiyet matrisinde kullanılan [B] matrisi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_0}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial x} & 0 & a^{(j)} & b^{(j)} \\ 0 & \frac{\partial N_0}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_9}{\partial y} & c^{(j)} & d^{(j)} \\ \frac{\partial N_0}{\partial y} & \frac{\partial N_0}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_9}{\partial y} & \frac{\partial N_9}{\partial x} & e^{(j)} & f^{(j)} \end{bmatrix} \quad (C1)$$

$$a^{(j)} = Z_0 \left( \frac{\partial H^{(j)}}{\partial x} - \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{H^{(j)}\} \right) + \frac{\partial Z_0}{\partial x} (H^{(j)} - [N] \{H^{(j)}\}) \quad (C2a)$$

$$b^{(j)} = Z_0 \left( \frac{\partial L^{(j)}}{\partial x} - \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{L^{(j)}\} \right) + \frac{\partial Z_0}{\partial x} (L^{(j)} - [N] \{L^{(j)}\}) \quad (C2b)$$

$$c^{(j)} = Z_0 \left( \frac{\partial I^{(j)}}{\partial y} - \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{I^{(j)}\} \right) + \frac{\partial Z_0}{\partial y} (I^{(j)} - [N] \{I^{(j)}\}) \quad (C2c)$$

$$d^{(j)} = Z_0 \left( \frac{\partial M^{(j)}}{\partial y} - \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{M^{(j)}\} \right) + \frac{\partial Z_0}{\partial y} (M^{(j)} - [N] \{M^{(j)}\}) \quad (C2d)$$

$$e^{(j)} = Z_0 \left( \frac{\partial H^{(j)}}{\partial y} - \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{H^{(j)}\} + \frac{\partial I^{(j)}}{\partial x} - \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{R^{(j)}\} \right) + \frac{\partial Z_0}{\partial y} (H^{(j)} - [N] \{H^{(j)}\}) + \frac{\partial Z_0}{\partial x} (I^{(j)} - [N] \{I^{(j)}\}) \quad (C2e)$$

$$f^{(j)} = Z_0 \left( \frac{\partial L^{(j)}}{\partial y} - \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{L^{(j)}\} + \frac{\partial M^{(j)}}{\partial x} - \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{M^{(j)}\} \right) + \frac{\partial Z_0}{\partial y} (L^{(j)} - [N] \{L^{(j)}\}) + \frac{\partial Z_0}{\partial x} (M^{(j)} - [N] \{M^{(j)}\}) \quad (C2f)$$

[D] matrisi ise aşağıdaki gibi yazılabilir.

Düzlem gerinim durumu için:

$$[D] = \frac{E_j}{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)} \begin{bmatrix} 1-\nu_j & \nu_j & 0 \\ \nu_j & 1-\nu_j & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu_j)/2 \end{bmatrix} \quad (C3a)$$

Düzlem gerilim durumu için:

$$[D] = \frac{E_j}{(1-\nu_j)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_j & 0 \\ \nu_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_j)/2 \end{bmatrix} \quad (C3b)$$

Fonksiyonların kartezyen koordinatlara göre olan türevleri aşağıdaki denklemler kullanılarak kutupsal koordinatlarda yazılabilir:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (C4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (C4b)$$

Fiziksel koordinat sistemindeki türevleri izoparametrik koordinat sistemindeki türevler cinsinden yazabilmek için ise aşağıda verilen dönüşüm kullanılır:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & -\frac{\partial y}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (C5a)$$

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (C5b)$$

## KAYNAKÇA

- Williams, M.L., The stresses around a fault or crack in dissimilar media, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 49 (1959), 199 – 204.
- Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Leyden, 1953.
- Erdoğan, F., Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 32 (1963), 232 – 237.
- England, A.H., A crack between dissimilar media, *Journal of Applied Mechanics*, 32 (1965), 400-402.
- Rice, J.R. and Sih, G.C., Plane problems of cracks in dissimilar media, *Journal of Applied Mechanics*, 32 (1965), 418 – 423.
- Comninou, M., The interface crack, *Journal of Applied Mechanics*, 44 (1977), 631 – 636.
- Rice, J.R., Elastic fracture concepts for interfacial cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 55 (1988), 379 – 386.
- Hutchinson, J.W. and Suo, S., Mixed mode cracking in layered materials, *Advances in Applied Mechanics*, 29 (1992), 63 – 191.
- Van der Zande, H.W. and Grootenboer, H.J., A finite element approach to interface cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 53 (1986), 573 – 578.
- Venkatesha, K.S., Dattaguru, B. and Ramamurthy, T.S., Finite element analysis of an interface crack with large crack tip contact zones, *Engineering Fracture Mechanics*, 54 (1996), 847 – 860.
- Sun, C.T. and Jih, C.J., On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media, *Engineering Fracture Mechanics*, 28 (1987), 13 – 20.
- Chen, E.P., Finite element analysis of a bimaterial interface crack, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 3 (1985), 257 – 262.
- Kaya, A.C. and Nied, H.F., Interface fracture analysis of bonded ceramic layers using enriched finite elements, *Ceramic Coatings*, ASME MD, 44, (1993), 47 – 71.
- Chiu, Tz-C., Buckling of graded coatings – A continuum model, Doktora Tezi, Lehigh University, Bethlehem, PA, USA, 1999.
- Yıldırım, B., Nonlinear thermal stress/fracture analysis of multilayer structures using enriched finite elements, Doktora Tezi, Lehigh University, Bethlehem, PA, USA, 2000.