Doruk, M., Duran, M. & Kaplan, A. (2018). Lisans öğrencilerinin türev tanımıyla ilgili yorumları ve türeve yükledikleri anlamlar. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 18* (2), 834-856.

Geliş Tarihi: 27/10/2017 Kabul Tarihi: 05/06/2018

LİSANS ÖĞRENCİLERİNİN TÜREV TANIMIYLA İLGİLİ YORUMLARI VE TÜREVE YÜKLEDİKLERİ ANLAMLAR*

Muhammet DORUK**
Murat DURAN***
Abdullah KAPLAN****

ÖZET
Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin türev tanımını yorumlama becerilerini ve türev kavramına yönelik yükledikleri anlamları ortaya çıkarmaktır. Nitel araştırma desenlerinden durum çalışmasına göre planlanan bu çalışma, 2014-2015 öğretim yılı bahar döneminin başında gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın katılımcıları, Doğu Anadolu Bölgesi'ndeki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören ikinci (n=31) ve dördüncü (n=29) sınıf öğrencileridir (n=60). Çalışmanın veri toplama aracı, araştırmacılar tarafından geliştirilen Türev Anlayış Formudur (TAF). Çalışma sonucunda öğrencilerin türevin formel tanımını yorumlamakta güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Bir noktada türevli fonksiyon kavramına yönelik çoğunlukla ilgili fonksiyonun o noktada tanımlı, limitli, sürekli olması ve fonksiyon kuralının türevinin işlemsel olarak alınabilmesi anlamlarını yükledikleri ortaya çıkmıştır.

Anahtar Kelimeler: Türev, türev tanımı, matematik eğitimi

INTERPREDATIONS RELATED TO THE DEFINITION OF DERIVATIVE AND ASCRIBED MEANINGS TO DERIVATIVE OF UNDERGRADUATE STUDENTS

ABSTRACT
The purpose of this study was to reveal undergraduate students' interpretation skills related to the definition of derivative and ascribed meanings to derivative by the students. This study planned according to the case study of qualitative research designs was carried out at the beginning of spring semester of 2014-2015 academic terms. The participants of the study were second grade (n=31) and fourth grade (n=29) students studying in the department of primary mathematics teacher training in a state university in the province of Eastern Anatolia Region of Turkey (n=60). Data collection tool of the study was Derivative Understanding Form (DUF) developed by the researchers. Results of the study showed that the students had difficulty in interpreting the formal definition of derivative. It had been seen that ascribed meanings to differentiable function at a point by the students mostly defined as "the function was defined, limited, continuous at that point" and "operational differentiation of the function rule".

Key Words: Derivative, the definition of derivative, mathematics education

---

** Bu çalışmanın bir bölümü Uluslararası Matematik ve Matematik Eğitimi Konferansında sözlü bildiri olarak sunulmuştur (Fırat Üniversitesi, 12-14 Mayıs 2016, Elazığ, Türkiye).*

*** Dr. Öğr. Üyesi, Hakkari Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, mdoruk20@gmail.com*
**** Dr., Matematik Öğretmeni, MEB, Amasya Plevne Ortaokulu, denizyildizi2805@hotmail.com*
***** Prof. Dr., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, akaplan@atauni.edu.tr*

1.GİRİŞ

Matematikteki temel öğrenme alanlarından biri olan analizin en büyük hedeflerinden birisi değişen nicelikleri ve olguları anlamak, bunları yorumlamak ve geleceğe yönelik tahminlerde bulunmaktır (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013). Değişim oranı ve hareket gibi kavramları anlamlandırmasının yanında bu kavramları sembollerle ifade etmek için araçlar sağlamış olması (Bingölbali, 2013), analizin önemli özelliklerinden birisidir. Duru'ya (2006) göre analiz, değişim ya da bir nicelik değiştiğinde diğer niceliğin de buna bağlı olarak nasıl ve hangi hızda değiştiğinin incelenmesidir. Analiz bu bağlamda, hareket ve değişim ile ilgili olguları inceleme konusu yapan fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi disiplinlerde üzerinde çalışılan olgulardaki değişimlerin "nasıl, ne kadar hızlı veya ne kadar yavaş" olduğunun cevabını matematiksel sembol ve notasyonlarla vermeyi mümkün kılan büyük bir araçtır (Bingölbali, 2013). Analiz dersi ile amaçlanan hedeflere ulaşmada kullanılan önemli yapı taşlarından birisi de analizin temel dinamiklerinden olan türevdir.

Türev, başta matematik olmak üzere fizik, kimya, biyoloji, ekonomi, sosyoloji ve birçok mühendislik dalında sıkça kullanılan bir konudur (Yılmaz, 2009'dan Akt: Özturan Sağırlı, 2010). Türev kavramı, belirli bir andaki değişim hızının ne olduğunu anlamaya yardımcı olan bir kavramdır (Bingölbali, 2013). Türev genel olarak; anlık değişim oranı, ortalama değişim oranlarının limiti, bir fonksiyonun bir noktasındaki teğet doğrusunun eğimi veya hız olarak ele alınmaktadır (Bingölbali, 2013; Zandieh, 2000). Türev kavramı, içerisinde farklı matematiksel kavramlar barındırmaktadır. Kavramın anlaşılması ve anlamlandırılması birçok matematiksel konu ve kavram bilgisi ve onların birbirleriyle olan ilişkilerinin bilinmesini gerekli kılar (Bingölbali, 2013). Türev kavramı temelde fonksiyon, oran ve limit gibi kavramları barındırmasının yanında (Zandieh, 2000) değişim, ortalama değişim, anlık değişim, kiriş, teğet, eğim ve süreklilik gibi kavramların özümsenmesini gerektirmektedir. Türev, birden çok tanımı ve yorumu mevcut olan çoklu temsil edilebilme bakımından zengin bir kavramdır. Türev kavramının öğretiminde üç farklı yaklaşım sergilenmektedir. Bu yaklaşımlar sayısal/fiziksel, grafiksel ve cebirsel yaklaşımlar olarak değerlendirilebilir (Bingölbali, 2013; Çetinkaya ve ark., 2013).

Zandieh (2000) tarafından türev; farkların oranının limiti, bir eğriye bir noktada çizilen teğetinin eğimi ve anlık değişim oranı şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanımın türev kavramının cebirsel, grafiksel ve sayısal yaklaşım şekillerini işaret ettiği söylenebilir. Türevin sayısal gösterimi ile türevin bir yorumunun anlık değişim oranı olduğu daha basit anlamda bir fonksiyonun bağlı olduğu bir değişkendeki çok küçük değişim ile bu değişime bağlı olarak fonksiyondaki küçük değişimin birbirine oranlanması olduğu fikri yansıtılmaktadır (Çetinkaya ve ark., 2013). Anlık değişim oranı ise "Bir fonksiyonun bağımlı değişkendeki değişimin bağımsız değişkendeki değişime oranının limit durumu" şeklinde tanımlanmaktadır (Çakımcı ve Kabasakal, 2016, s. 57). Türev kavramının öğretiminde kullanılan yaklaşımlardan bir diğeri ise geometrik yaklaşımdır. Geometrik yaklaşım, türev kavramının öğretiminde kullanılan kaynaklarda (Altun, 2014; Çakımcı ve Kabasakal, 2016; Çetinkaya ve ark., 2013) genel olarak türevin sayısal gösteriminde yapılan aktiviteler fonksiyon grafiğinin çizilmesi suretiyle dramatize edilmektedir.

Cebirsel yaklaşımda ise türev kavramı formel olarak tanımlanır. Türev kavramı formel olarak Balcı (1999) tarafından "*$A \subseteq IR$, $\alpha \in A$ ve α, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $f: A \to IR$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ya da $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ limiti mevcut ise* *bu limite f nin a noktasındaki türevi denir"* şeklinde tarif edilmektedir. Türevin cebirsel tanımının yorumu genellikle farkların oranının limiti (Bingölbali, 2013; Ergene, 2011; Zandieh, 2000), değişim oranlarının limiti şeklinde olup (Ergene, 2011) türevin teğet eğimi ile anlık hız yorumları bu şekilde elde edilmektedir (Akkaya, 2009).

Üniversite düzeyinde türev kavramının öğretiminin yapıldığı analiz dersleri öğrenim görülen bölümlere göre içerik ve odak bakımından farklılık gösterebilmektedir (Bingölbali ve Monaghan, 2008). Bu çalışmanın katılımcılarını oluşturan ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerine ise türev kavramının öğretimi ikinci sınıf güz yarıyılında Analiz-I dersi kapsamında yapılmaktadır. Yüksek Öğretim Kurumu tarafından sunulan Analiz-I dersi içeriği ve ilgili derste kullanılan popüler ders kitapları (Balcı, 1999; Kadıoğlu ve Kamali, 2003; Musayev, Alp ve Mustafayev, 2007) ile lise matematik ders kitabı (Çakımcı ve Kabaskal, 2006) incelendiğinde, lisans düzeyindeki türev öğretimi içerik açısından lise öğretimi ile büyük oranda örtüşmektedir. Öte yandan hem içerik hem de uygulamada bazı farklılıkların olduğu da görülmüştür. Lise öğretiminden farklı olarak türev kavramı sezgisel olarak değil formel bir şekilde tanıtılmaktadır (Balcı, 1999; Çakımcı ve Kabasakal, 2006; Kadıoğlu ve Kamali, 2003; Musayev ve ark., 2007). Türev ile ilgili sunulan tüm kural ve teoremler ispatları ile birlikte sunulmaktadır. Konu içerisinde yer alan tüm matematiksel kavramların formel bir şekilde tanımı yapılmaktadır. Buna göre Analiz-I dersinde türev öğretiminde türevin en çok cebirsel gösteriminin, kısmen geometrik gösterimin kullanıldığını söylemek mümkündür. Bu konuda Duru (2006) da lisans düzeyinde cebirsel gösterinin daha çok ön planda olduğunu belirtmiştir.

Lisans düzeyinde türevin en çok cebirsel yönüne vurgu yapılmasına rağmen öğrencilerin formel türev tanımını anlamakta zorluk yaşadıkları birçok çalışmada rapor edilmiştir (Açıkyıldız, 2013; Akkaya, 2009; Bingölbali, 2013; Duru, 2006; Habre & Abbloud, 2006). Bu çalışmalarda öğrenciler cebirsel gösterimle ilgili olarak türevin formal tanımının altında yatan sezgisel anlama olan farkların oranının limiti düşüncesini anlayamadıkları tespit edilmiştir (Hähkiöniemi, 2005'ten Akt: Bingölbali, 2013). Öğrencilerin ayrıca türevin tanımını anlayamadıkları (Akkaya, 2009; Bingölbali, 2013; Habre & Abbloud, 2006; Zandieh, 1997) ve bu tanımı bilmedikleri (Duru, 2006) gibi tanımların içeriklerini de tam olarak özümseyemedikleri (Açıkyıldız, 2013) tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin matematiksel bilgi açısından tanımların rollerini tam olarak içselleştiremediklerini göstermiştir (Viholainen, 2006). Öğrenciler türevde bulunan sembolleri de anlamakta güçlük çekmişlerdir (Santos & Thomas, 2001; White & Mitchelmore, 1996).

Ders kitabındaki bir kavram tanımı bazı öğrenciler için doğru ilişkiler uyandırırken birçok öğrenci için bazı istendik ilişkilerin arasında istenmeyen kavram imajı geliştirebilir (Bingölbali ve Monaghan, 2008). Bazı kavramlar ne kadar basit ya da temel kavramlar olursa olsun ya da ne kadar kesin bir şekilde tanımlanırsa tanımlansın öğrenciler bu kavramlara yönelik informel anlamalara sahip olabilir ya da kendilerine özgü bir anlayış geliştirebilirler (Orton, 1983). Bu konuda öğrencilerin türevi kavramsal ve sezgisel olarak anlayamadıkları (Hashemi, Abu, Kashefi & Rahimi, 2014; Orton, 1983) daha çok yüzeysel (Açıkyıldız, 2013) ve türevin tanımı ile sınırlanan cebirsel anlamaya sahip oldukları (Orhun, 2012) belirtilmiştir. Araştırmalarda öğrencilerin çoğu zaman işlemsel ve prosedürel tarzda hareket ettiği görülmüştür (Kertil, 2014). Bunun yanı sıra öğrenciler türev kavramını süreç-nesne ikilisi olarak kavramsallaştırmada problem yaşamıştır (Habre & Abboud, 2006; Zandieh, 2000). Öğrenciler sınırlı ya da uygun olmayan kavram imajları geliştirmiştir (Aspinwall & Miller, 2001). Daha çok tanımlarla sınırlı anlayışlara sahip öğrencilerde formüllere odaklı düşünceler daha baskın olmuştur (Açıkyıldız, 2013). Bu duruma, öğrencilerin türeve yönelik teğet doğrusu (Amit & Vinner, 1990) ve sadece eğim (Aspinwall & Miller, 2001) ile sınırlı imajları örnek olarak verilebilir. Bu bağlamda türev tanımının belirttiği kavrama yönelik farklı anlayış şekillerinin benimsenebildiği ve uygun olmayan kavram imajlarına sahip olunabildiği söylenebilir.

İlgili alanda yapılan araştırmalar incelendiğinde öğrencilerin türev kavramına yönelik güçlüklerin bir takım kaynaklarının olduğu ifade edilmiştir (Açıkyıldız, 2013; Duru, 2006; Ergene, 2011; Hauger, 2000; Park, 2011; Ubuz, 2007). Bu anlamda öğrencilerin sahip oldukları güçlüklerin başlıca kaynaklarından birisinin türev kavramına yönelik önbilgilerdeki yetersizlik olduğunu ifade edilmiştir (Duru, 2006). Öğrencilerin özellikle limit kavramına yönelik sahip oldukları güçlükler türev anlayışlarına da yansımıştır (Ubuz, 2007). Türevin çoklu temsiller arasındaki ilişkilerin öğrenciler tarafından anlaşılamaması güçlüklerin bir diğer kaynağı olarak gösterilmiştir (Açıkyıldız, 2013). Özellikle grafiksel ve sembolik gösterimler arasında ilişkinin kurulamaması türevin kavramsal olarak öğrenilmesine engel olmaktadır (Duru, 2006). Fonksiyon ve türeve yönelik uygun olmayan kavram imajları da türevi anlama konusundaki başarısızlığın sebepleri arasında gösterilmektedir (Duru, 2006). Son olarak bu güçlüklerin en önemli sebeplerinden birisi de uygulanan öğretim yöntemleri olabilir. Bu konuda Ergene (2011) öğrencilerin türevin cebirsel tanımının ezbere verildiği bir eğitim sonrasında cebirsel formdaki soruları çözebildiklerini, bu nedenle türev-limit ilişkisi üzerine düşünmediklerini ve bu ilişkiyi anlama gereği de duymadıklarını belirtmiştir.

1.1. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Literatür incelendiğinde öğrencilerin türev tanımını anlamakta güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir (Artigue, 1991; Hauger, 2000; Orton, 1983; Ubuz, 2001). Buna rağmen öğrencilerin türev tanımını nasıl yorumladıkları, türev tanımını yorumlarken ne tür hata yaptıkları üzerine sınırlı sayıda çalışma yapıldığı görülmüştür (Asiala, Cotrill & Dubinsky, 1997; Teuscher & Reys, 2012). Bu çalışmanın amacı da öğrencilerin sahip oldukları bu güçlüğe odaklanarak söz konusu güçlüğü detaylı bir şekilde açıklamaktır. Çalışmada ayrıca öğrencilerin türev tanımının belirttiği kavrama yönelik yükledikleri anlamlar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Yapılan araştırmalar öğrencilerin düşünme yapılarını bilmenin ve anlamanın etkili öğretim için önemli olduğunu göstermiştir (Carpenter, Fennema & Franke, 1996; Lesh & Doerr, 2003). Öğrencilerin belli bir matematiksel konuda öğrenme eksikliklerinin farkında olup, bunları düzeltecek yönde tedbirler alma görevi öğretmene aittir (Açıkyıldız, 2013). Vinner ve Dreyfus (1989) öğrencilerle olan iletişimi geliştirmek için öğrencilerin niçin hata yaptıklarını anlamaya ihtiyaç olduğunu belirtmişlerdir. Bu konuda yapılan araştırmalarda öğretmenlerin öğrencilerinin güçlük yaşadıkları konular hakkında öngörü ve tahminlerinde başarılı olamadıklarını ve bu durumun matematik öğretimini olumsuz etkilediğini belirtilmiştir (Even, 1993; Hadjidemetriou & Williams, 2002). Bu çalışmada türev öğretiminden sorumlu öğretmenlere yardımcı olmak için, analiz alanında zorluk çekilen konuların başında gelen türev kavramının formel tanımına odaklanılmıştır. Ayrıca çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde türev kavramı ile ilk defa karşılaşan ikinci sınıf öğrencileri ile öğreniminin sonuna gelen ve birçok matematik ağırlıklı ders alan dördüncü sınıf öğrencilerinin türev tanımı yorumlarının ve türev kavramına yükledikleri anlamların nasıl farklılaştığı anlaşılmaya çalışılmıştır. Bu sayede kavram imajı kuramsal çerçevesinin sahiplerinden olan Vinner'ın (1983) öne sürdüğü, formal tanım ile ilk kez karşılaşan öğrencilerin kavram imajları ve kavram tanımları ile öğretim sürecinin sonuna gelmiş öğrencilerin kavram imajları ve tanımları arasındaki farklılığa yönelik görüşlerden hangisinin gerçekleştiğini ortaya çıkarılacaktır. Vinner (1983), matematiksel bir kavram ile ilgili, daha önce kavram imajına sahip olan öğrencilerin kavramın formel tanımı ile karşılaştıklarında üç durum ile karşılaşılabileceğini ifade etmiştir. Birinci durumda kavram imajı formel tanım ile birlikte değişir. İkinci durumda öğrencideki kavram imajı olduğu gibi kalır. Kavram tanımı bir süre öğretmenin sunduğu gibi kullanılır, fakat bu tanım bir süre sonra unutulur ya da bozulur. Öğrenci eski kavram imajını kullanmaya devam eder. Üçüncü durumda öğrencinin kavram tanımı ve kavram imajı olduğu gibi kalır. Tanımın tarif edilmesi istendiğinde öğrenci öğretmenin tanımını tekrarlar fakat diğer tüm durumlarda eski kavram imajını kullanır. Araştırma kapsamında aşağıdaki araştırma sorularının yanıtları aranmıştır.

1- Öğrencilerin türevin cebirsel gösterimini nasıl yorumlamaktadırlar?
2- Öğrenciler türev kavramına yönelik ne tür anlamlar yüklemektedir?
3- Türev tanımını yorumlama ve türeve yüklenen anlam bağlamında ikinci ve dördüncü sınıf öğrencilerinin farklılıkları nasıldır?

2. YÖNTEM

2.1. Araştırmanın Modeli

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı esas alınmıştır. Nitel araştırma yaklaşımının doğal ortama duyarlılık sağlaması, bütüncül bir yaklaşıma sahip olması, algıların ortaya konmasını sağlaması, araştırma deseninde esnekliğinin olması, tümevarımcı bir analize sahip olması ve araştırmacının katılımcı rolü gibi özellikler nitel araştırmaların önemli özellikleri arasındadır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Nitel araştırma bir toplumu ilişkili bağlantıları içinde anlamaya çalışır ve bir olayı etkileyen değişkenleri kendisi ortaya çıkarır (Arıkan, 2011; Ilgar ve Ilgar, 2013). Bu özellikler çerçevesinde kullanılacak en uygun araştırma deseninin Özel Durum Çalışması (Case Study) olduğu kanısına varılmıştır. Özel durum çalışmalarında temel fikir, bir olayın uygun gelebilecek herhangi bir yöntemle ayrıntılı bir biçimde incelenmesidir. Genel amaç ise olayı olabildiğince tüm yönleriyle anlamaktır (Punch, 2011). Bu çalışmada da formel türev tanımına odaklanılarak öğrencilerin bu tanımı nasıl yorumladıkları, nasıl kullandıkları ve tanımın belirttiği kavrama yönelik ne tür anlamlar yükledikleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

2.2. Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları 2014-2015 eğitim öğretim yılının bahar yarıyılı başlangıcında Doğu Anadolu Bölgesi'ndeki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 31'i ikinci sınıf ve 29'u dördüncü sınıf olmak üzere toplam 60 öğrencidir. Çalışmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu örnekleme yöntemindeki temel anlayış önceden belirlenen bir dizi ölçütleri karşılayan tüm durumlarla çalışılmasıdır. Burada sözü edilen ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Çalışmada dikkate alınan ölçüt, öğrencilerin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde türev kavramının öğretiminin yapıldığı analiz-I dersini almış ve bu dersi başarı ile geçmiş olmaktır.

Öğrencilerin öğrenim düzeylerine göre farklı iki sınıf düzeyinden seçilmesinin sebebi ise analiz dersini henüz tamamlamış ikinci sınıf öğrencileri ile mezun durumundaki öğrencilerin türev tanımını yorumlarının ve türeve yüklenen anlamın nasıl farklılaştığını incelemektir.

Bu çalışmanın katılımcıları olan ikinci sınıf öğrencilerine lise öğrenimlerinde türev kavramın öğretimi yapılmıştır. Dolayısıyla bu kavrama yönelik hali hazırda bir düşünceleri vardır. Dördüncü sınıf öğrencileri açısından türev tanımının öğretiminin yapıldığı dersin üzerinden bir hayli zaman geçmiştir. Dolayısıyla sonraki tecrübeleri türeve yönelik uygulamalar şeklinde olmuştur. İkinci ve dördüncü sınıf öğrencileri seçilerek, türev tanımının öğretiminin henüz yapıldığı öğrenciler ile türev tanımının etkisinden kurtulan öğrencilerin imajları ya da davranışları arasındaki farklar merak edilmiştir. Bu sayede dolaylı da olsa türev tanımının öğretiminde ortaya çıkan düşünceler ile bir süre geçtikten sonra, türev tanımının etkisi dışında, öğrenci düşüncelerinin nasıl farklılaştığına yönelik fikir sahibi olunması hedeflenmiştir. Öğrencilerin türev tanımının öğretimin yapıldığı dersten en az şekilde etkilenmesi için dördüncü sınıf öğrencileri ile çalışılmış, üçüncü sınıf öğrencileri çalışmaya dâhil edilmemiştir.

2.3. Verilerin Toplanması

Çalışmanın verileri araştırmacılar tarafından geliştirilen Türev Anlayış Formu (TAF) yardımıyla toplanmıştır. TAF'de türevin formel tanımı ve bu tanımla ilişkili beş adet açık uçlu soru yer almaktadır. Sorulardan ilk ikisi öğrencilerin türevin formel tanımını ve tanım içerisindeki matematiksel ifadeleri nasıl yorumladıklarını ortaya çıkarmaya yöneliktir. Üçüncü soru öğrencilerin türev tanımını nasıl uyguladıklarını ortaya çıkarmak için kullanılmıştır. Son iki soru öğrencilerin türeve yükledikleri anlamı ortaya çıkarmaya yöneliktir. TAF'ın geliştirilmesi aşamasında analiz ve matematik eğitimi alanında uzman iki akademisyenin yardımı alınmıştır. Analiz alanında uzman akademisyen formda bulunan soruların matematiksel olarak doğruluğuna, matematik eğitiminde uzman akademisyen ise daha çok çalışmanın geçerliği üzerine odaklanmıştır. Analiz alanında uzman akademisyenin görüşü doğrultusunda formda bulunan matematiksel notasyon hataları ve tespit edilen yazımsal hatalar düzeltilmiştir. Matematik eğitiminde uzman akademisyenin görüşleri doğrultusunda da daha önce taslak formda bulunan iki aktivite çalışmanın sınırlandığı teorik çerçeveye uygun olmadığı gerekçesiyle çalışmanın dışında bırakılmıştır. Tablo 1'de TAF'ta yer alan sorular sunulmuştur.

Tablo 1.
TAF'ta Yer Alan Sorular

Soru 1	Size sunulan türev tanımından ne anladığınızı kendi cümleleriniz ile izah ediniz.
Soru 2	Tanımda yer alan " $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ " ifadesi ne anlama gelmektedir?
Soru 3	IR üzerinde tanımlanan $f(x) = x^3$ fonksiyonunun x=1 noktasındaki türevini, tanımı kullanarak araştırınız.
Soru 4	Bir noktada türevi olan fonksiyon denince ne anlıyorsunuz?
Soru 5	$\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere Δ kümesi üzerinde tanımlanan $f(x) = x^2$ fonksiyonunun 3 noktasındaki türevini araştırınız.

Çalışmanın verileri, ikinci ve dördüncü sınıf ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerine TAF'ın sunulması ve yazılı olarak cevapların alınması ile toplanmıştır. Veri toplama aracı her iki gruba ayrı ayrı sınıf ortamında uygulanmıştır. Her gruba birinci yazar tarafından gerekli açıklamalar yapılmış ve birinci yazarın gözetiminde veri toplama aracı doldurulmuştur. Veri toplama sürecinde öğrencilerin bireysel olarak veri toplama aracına yanıt vermeleri sağlanmıştır. Öğrencilerin dikkatini dağıtacak dışsal faktörlerin etkisinin minimum düzeyde olmasına özen gösterilmiştir. Veri toplama aracının rahat doldurulması için veri toplama aracına isimlerinin yazılmaması istenmiştir. Öğrencilerin veri toplama aracını doldururken zaman konusunda strese girmeden düşüncelerini rahat bir şekilde yansıtabilmesi için herhangi bir süre kısıtlamasına gidilmemiştir. Öğrencilerin hepsinin en geç bir ders saati içerisinde veri toplama aracını doldurdukları gözlemlenmiştir.

Verilerin etkinlik temelli klinik mülakatlar şeklinde değil de yazılı olarak toplanmasının birkaç sebebi vardır. Öğrencilerin arkadaşları ile birlikte sınıf ortamlarında kendilerini daha rahat hissettikleri, gerçekten ne düşündüklerini mantıklı bir şekilde daha formel bir dil kullanarak ifade edebilecekleri düşünülmüştür. Bu yöntemle daha fazla katılımcıya ulaşma imkânı sağlanmıştır. Ayrıca bu süreç araştırmacı gözetiminde gerçekleştiği için öğrenciler, çalışmada merak ettiği konularda bilgi alabilmiştir. Öğrenciler araştırmacı ile etkileşime geçebildiği için öğrencilerin ciddiyetle veri toplama aracına yanıt verdikleri düşünülmüştür. Bu sayede hem çalışmanın geçerliğinin artırılması hem de veri kaybının önüne geçilmesi hedeflenmiştir.

2.4. Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır. Literatürde öğrencilerin türev tanımı anlayışlarına odaklanan bir çalışmaya rastlanmadığı için içerik analizi tercih edilmiştir. Betimsel analizde özetlenen ve yorumlanan veriler, içerik analizinde daha derin bir işleme tabi tutulur ve betimsel bir yaklaşımla fark edilemeyen kavram ve temalar bu analiz sonucu keşfedilir (Yıldırım ve Şimsek, 2011). İçerik analizi; bir veya birçok metnin içindeki sözcüklerin, kavramların, temaların, deyimlerin, karakterlerin veya cümlelerin varlıklarını belirlemek ve onları sayıya dökmek için kullanılır (Kızıltepe, 2015).

Öncelikle öğrencilerin verdikleri cevaplar incelenmiş ve taslak kategoriler oluşturulmuştur. Daha sonra yazarlar bir araya gelerek veriler taslak kategorilere yerleştirilmiştir. Bu aşamada taslak kategorilerde yer almayan yeni kategoriler de elde edilmiştir. Yazarlar birbiriyle tartışarak verilerin özelliklerine göre elde edilen kategorilere son şeklini vermişlerdir. Elde edilen kategorilerin güvenirliğini sağlamak için iki uzmanın görüşü alınmıştır. Uzmanlar veri toplama aracının geliştirilmesi sürecinde de yardımcı olan, birisi Analiz alanında, diğeri matematik eğitimi alanında uzman iki akademisyendir. Uzmanlara çalışmadan elde edilen tüm kategoriler ve bu kategorilerin oluşmasını sağlayan örnek öğrenci cevapları sunulmuştur. Uzmanlardan hem kategorilerin uygunluğu hakkında hem de çalışmada yapılan matematiksel yorumların doğruluğu hakkında görüş alınmıştır. Uzmanlar çalışmada kullanılan alt kategorilerin elde edilen verilerle uyumlu olduğu konusunda görüş birliğine varmışlardır. Tablo 2'deki kategorilerin oluşmasında %81 uyum yakalanmasına rağmen uzmanlar alt kategorilerin oluşturduğu kategorilerde bir takım değişikliklerin yapılmasını önermiştir. Uzmanlar daha önce "Sembolik açıklama" olarak isimlendirilen kategorinin "Yüzeysel açıklama" olarak isimlendirilmesini, "Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranın limiti" isimli alt kategorinin "Oranın limiti" adı altında yeni bir kategoride değerlendirilmesini ve daha önce yüzeysel kategoride bulunan "Bu limit varsa türev de vardır” alt kategorisinin “Limit” kategorisinde değerlendirilmesini önermişlerdir. Tablo 3’deki kategorilerin oluşumunda uzmanlarla %88 oranında uyum sağlanmıştır. Uzmanlar “Sembolik açıklama” olarak isimlendirilen kategorinin “Yüzeysel açıklama” olarak isimlendirilmesinin ve “Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranın limiti” isimli alt kategorinin “oranın limiti” adı altında yeni bir kategoride değerlendirilmesinin uygun olacağını belirtmişlerdir. Uzmanların tüm önerileri eksiksiz olarak yapılarak Tablo 2 ve Tablo 3’te yer alan kategorilere son şekli verilmiştir. Tablo 4 ve Tablo 5’te yer alan kategorilerin oluşmasında uzmanlarla %100 oranında bir görüş birliği sağlanmıştır. Ayrıca kategorilerden elde edilen sonuçların matematiksel olarak yorumlanmasında düzenlemeler yapılmıştır. Bu çalışmada birden çok bölümde içerik analizi yapılarak kategoriler elde edildiği için bu şekilde bir güvenirlik stratejisi belirlenmiştir. Öğrencilerin çoğu sadece bir kategoride yanıtlar verirken, bazı öğrenciler birden çok kategoriye girebilecek ifadeler kullanmışlardır. Sıklıkla, öğrencilerin yazılı ifadeleri üzerinde değişiklik yapılmadan sunum yapılmaya çalışılmıştır. Bu sayede çalışmanın geçerliği ve güvenirliğinin artırılması hedeflenmiştir.

3. BULGULAR

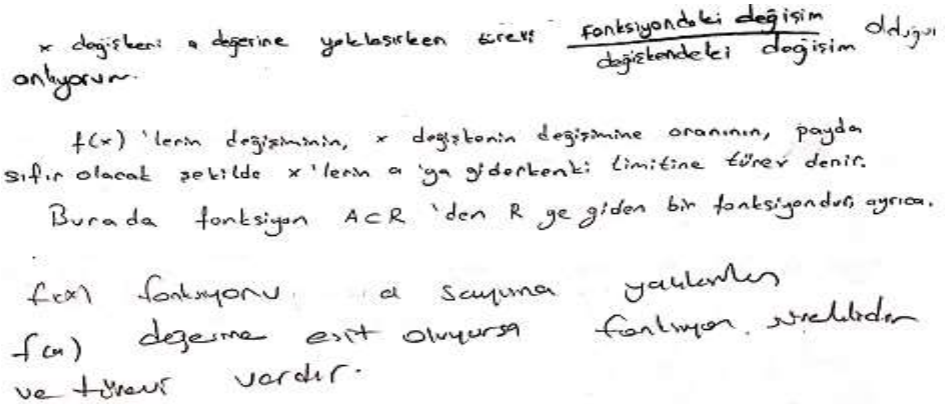
Öğrencilere ilk olarak türevin *“$A \subseteq IR$, $\alpha \in A$ ve α, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $f: A \rightarrow IR$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ya da $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ limiti mevcut ise bu limite f nin a noktasındaki türevi denir”* şeklindeki formel tanımı sunulmuştur. Öğrencilerden bu tanımdan ne anladıklarını kendi cümleleriyle izah etmeleri istenmiştir. İfadeler analiz edildiğinde öğrencilerin türev tanımını dört boyutta ve 11 farklı şekilde açıkladıkları görülmüştür. Tablo 2’de öğrencilerin türev tanımını yorumlamalarına yönelik elde edilen bilgiler sunulmuştur.

Tablo 2.
Öğrencilerin Türev Tanımına Yönelik Açıklamaları

Kategoriler	Açıklamalar	İkinci Sınıf	Dördüncü Sınıf	Toplam
Limit	Fonksiyonun $x=a$’daki limiti	%10	%29	%20
	Bu limit varsa türev de vardır	%22	%10	%15
	Fonksiyona h artması verildiğindeki limiti	%10	%0	%5
	0/0 belirsizliği	%10	%0	%5
Yüzeysel açıklama	Türevin tanımıdır	%14	%10	%12
Oran	Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranı	%14	%3	%8
	Fonksiyonun değeri ile değişkenin oranı	%0	%3	%2
Oranın limiti	Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranın limiti	%17	%6	%12
Süreklilik	*x*, *a* ya yaklaşırken *f(x)* in *f(a)* ya yaklaşması	%3	%10	%7
	Fonksiyon süreklidir	%0	%23	%12
Teğet	Fonksiyona çizilen teğetin eğimi	%0	%3	%1
Boş		%0	%3	%1

Tablo 2 incelendiğinde öğrencilerin yaklaşık yarısının limit kavramını kullanarak türev tanımını yorumlamaya çalıştıkları tespit edilmiştir (%45). Bu öğrenciler türev tanımına yönelik "*fonksiyonun x=a noktadaki limitidir*", tanımda bulunan limit ifadesini dikkate alarak "*bu limit varsa türev de vardır*", "*fonksiyona h artması verildiğindeki limiti*" ve "*0/0 belirsizliği*" şeklinde açıklamalar yapmışlardır. Öğrencilerin %19'u fonksiyonun sürekli olduğunu belirten açıklamalar yapmışlardır. Bu öğrenciler tanıma yönelik "*fonksiyon süreklidir*" ve "*x, a ya yaklaşırken f(x) in f(a) ya yaklaşması*" açıklamalarını yapmışlardır. Yapılan açıklamaların %12'sinin yüzeysel açıklamalar olduğu görülmüştür. Bu kategorideki öğrenciler tanımı irdelemekten uzak olan "*türevin tanımıdır*" şeklinde tanımı açıklama özelliği göstermeyen ifadeler kullanmışlardır. Öğrencilerin %10'u "*fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranı*" ve "*fonksiyonun değeri ile değişkenin oranı*" açıklamaları ile oran kavramını kullanarak türev tanımını yorumlamaya çalışmışlardır. Açıklamaların %12'sinde oran ve limit kavramlarını birleştirilerek, tanımın *"fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranın limiti"* anlama geldiği belirtilmiştir. Sadece dördüncü sınıftan bir öğrenci türev tanımının "*fonksiyona çizilen teğetin eğimi*" anlamına geldiğini belirtmiştir.

Öğrenciler tarafından yapılan açıklamalar türev tanımında bulunan matematiksel gerçekler bağlamında değerlendirildiğinde öğrencilerin çoğunun yaptığı açıklamaların türev tanımında bulunan matematiksel gerçeklerle uyuşmadığı tespit edilmiştir. Buna göre öğrencilerin türev tanımını yorumlamakta güçlük yaşadıkları söylenebilir. Sınıflar arasında bir karşılaştırma yapıldığında ikinci sınıf öğrencileri daha çok oranda, oran ve oranın limiti kategorilerinde açıklama yaparken dördüncü sınıf öğrencileri daha çok oranda süreklilik kategorisi altında açıklama yapmıştır. Bu durumun sebebi olarak; ikinci sınıf öğrencilerinin türev tanımına yönelik bilgileri yeni olduğu için türev tanımında bulunan ifadeleri açıklamaya çalışmaları, dördüncü sınıf öğrencileri ise türev tanımının öğretimi üzerinden zaman geçtiği için türev tanımı ile ilgili zihinlerinde daha çok süreklilik kavramının yer etmesi düşünülebilir. Ayrıca ikinci sınıf öğrencilerinin türev tanımının doğru yorumlanmasına yönelik ifadeleri daha çok oranda kullandıkları belirlenmiştir. Aşağıdaki şekilde ikinci sınıf öğrencilerinin oran ve oranın limiti kategorisine yönelik yorumları ile dördüncü sınıf öğrencilerinin süreklilik kategorine yönelik yaptıkları açıklamalara örnekler sunulmuştur.



Şekil 1. İkinci sınıf öğrencilerinin oran ve oranın limiti, dördüncü sınıf öğrencilerinin süreklilik kategorisine yönelik örnek ifadeleri

Öğrencilerin limit tanımını nasıl yorumladıklarını detaylı bir şekilde ortaya çıkarmak ve genel türev tanımı yorumlarından emin olmak için tanımda bulunan “ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ” ifadesinin ne anlama geldiği sorulmuştur. Bilindiği gibi bu ifade türev tanımı içerisinde en çok dikkat çeken ifadedir. Cebirsel olarak anlamı kısaca “farkların oranının limiti” anlamına gelmektedir. Çoklu temsiller bağlamında düşünüldüğünde, sayısal olarak “anlık değişim oranı”, geometrik olarak “bir fonksiyona bir noktada çizilen teğetin eğimini” ifade etmektedir. Öğrencilerin bu ifadeyi dört kategori altında, dokuz farklı şekilde açıkladıkları tespit edilmiştir. Tablo 3’te bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 3.

Öğrencilerin Limit Tanımında Bulunan $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *İfadesine Yönelik Açıklamaları*

Kategoriler	Açıklamalar	İkinci Sınıf	Dördüncü Sınıf	Toplam
Yüzeysel açıklamalar	Türevin tanımıdır	%41	%60	%51
	İfadenin okunması	%7	%0	%3
Limit	Fonksiyonun $x=a$ daki limiti	%17	%17	%17
	x in a ya yaklaşması	%7	%0	%3
	Belirsizlik	%3	%0	%2
Oran	Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranı	%11	%3	%7
Oranın limiti	Fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranın limiti	%3	%0	%2
Süreklilik	*x, a* ya yaklaşırken *f(x)* in *f(a)* ya yaklaşması	%11	%7	%8
	Fonksiyon süreklidir	%0	%13	%7

Tablo 3’e göre öğrencilerin yarısından fazlası yüzeysel açıklamalar yapmışlardır (%54). Bu öğrenciler söz konusu ifadeyi kendi cümleleri ile ifade etmek yerine “ *Bu, türevin tanımıdır*” veya “*limit x a ya giderken, f(x) eksi f(a) bölü x eksi a*” şeklinde ifadeyi okuma şeklinde açıklamalar yapmışlardır. Öğrencilerin %22’si limit kavramını kullanarak açıklama yapmaya çalışmışlardır. Bu öğrenciler matematiksel ifadenin “*fonksiyonun x=a daki limiti*”, “*x in a ya yaklaşması*” ve “*belirsizlik*” anlamına geldiğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin %7’si söz konusu ifadenin “*fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranını*”, %2’si “*fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limitini*” temsil ettiğini belirtmişlerdir. Açıklamaların %15’i bu ifadenin fonksiyonun sürekliliğine işaret ettiğini belirtmişlerdir. Bu kategorideki öğrenciler ilgili ifadenin “*x a ya yaklaşırken f(x) in f(a) ya yaklaşması*” ve “*fonksiyonun sürekli olması*” anlamına geldiğine yönelik açıklamalar yapmışlardır.

Sınıf düzeyleri arasında göze çarpan bariz farklılıklar incelendiğinde, ikinci sınıf öğrencilerinin daha çok oranda oran kategorisinde, dördüncü sınıf öğrencilerinin ise daha çok oranda süreklilik kategorisinde açıklamalar yaptıkları tespit edilmiştir. Bu durumun sebebi ikinci sınıf öğrencilerinin dördüncü sınıf öğrencilerine göre türev kavramını daha çok oran kavramı ile ilişkilendirmeleri, dördüncü sınıf öğrencilerinin ise daha çok türevlenebilen fonksiyonların aynı zamanda sürekli olduğuna odaklanmaları olabilir. Aşağıdaki şekilde sırasıyla ikinci ve dördüncü sınıf öğrencilerinin oran ve süreklilik kategorisine yönelik verdikleri yanıtlara örnekler sunulmuştur.

Tanımda yer alan bu ifade x ve y eksenindeki değişimlerin oranını ifade ediyor.

x'ler a'ya giderken, yani x'ler a'ya yaklaşırken, f(x)'lerin de f(a) değerine yaklaşmasıdır.

Şekil 2. İkinci sınıf öğrencilerinin oran ve dördüncü sınıf öğrencilerinin süreklilik kategorisine yönelik örnek ifadeleri

Ayrıca öğrencilerin Tablo 2'de sunulan türev tanımı yorumlamalarından elde edilen kategoriler ile Tablo 3'te sunulan kategorilerin benzerlik gösterdiği dikkati çekmiştir. Buna göre öğrencilerin cebirsel olarak farkların oranının limitini temsil eden ifadeyi yorumlama ya da anlamlandırma şekillerinin türev tanımını yorumlama şekilleri ile benzerlik gösterdiği söylenebilir.

Öğrencilerin türev tanımını nasıl yorumladıklarının incelenmesinin ardından türev tanımını nasıl uyguladıklarını görmek amacıyla "IR üzerinde tanımlanan $f(x) = x^3$ fonksiyonunun x=1 noktasındaki türevini, tanımı kullanarak araştırınız?" sorusu yöneltilmiştir. Bu soruda amaçlanan öğrencilerin türev tanımını doğrudan uygulayabilme becerilerini incelemektir. Tablo 4'te öğrencilerin yaptıkları çözümlerin özellikleri sunulmuştur.

Tablo 4.
Öğrencilerin Türev Tanımını Uygulama Becerileri

Özellikler	İkinci Sınıf	Dördüncü Sınıf	Toplam
Tanımı doğru uygulama	%71	%69	%70
Tanımı uygulamada başarısız olma	%23	%17	%20
Türev alma işleminden sonuç bulma	%3	%10	%7
Çözüm yok	%3	%4	%3
Toplam	%100	%100	%100

Tablo 4 incelendiğinde öğrencilerin %70'inin türev tanımını kullanarak türev değerini bulmada başarılı oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin sadece %20'si türev tanımını uygulamada başarısız olmuştur. Buna göre öğrencilerin yarısından çoğunun türev tanımını uygulama becerilerinin yüksek olduğu söylenebilir. Bu soruya verilen cevaplar incelendiğinde ikinci ve dördüncü sınıf öğrencileri arasında kayda değer bir farklılık göze çarpmamıştır. Aşağıda tanımı doğru bir şekilde uygulayan öğrenciler ile uygulamada güçlük çeken öğrencilerin çözümleri örnek olarak sunulmuştur.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=3 \text{ olup}$$

vardır.

Şekil 3. Türev tanımını doğru uygulama örneği

Şekil 4. Türev tanımı uygulamada başarısız olma örneği

Çalışmada öğrencilerin türev tanımına yükledikleri anlamı ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu anlamlar yardımıyla öğrencilerin kavrama yönelik zihinlerinde oluşturdukları özellikler belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin türevi mevcut olan fonksiyona yönelik yükledikleri anlamları ortaya çıkarmak için öncelikle "Bir noktada türevi olan fonksiyon denince ne anlıyorsunuz?" sorusu sorulmuştur. Öğrencilerin açıklamalarının dokuz kategori altında toplandığı ortaya çıkmıştır. Tablo 5'te bu kategoriler hakkında bilgiler verilmiştir.

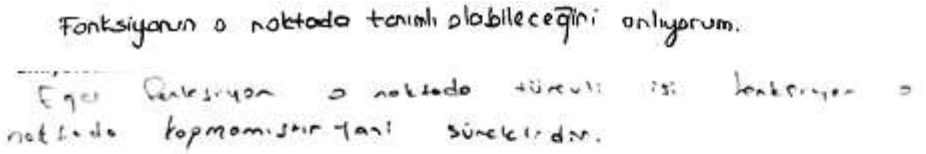
Tablo 5.

Öğrencilerin Fonksiyonun Bir Noktada Türevinin Mevcut Olmasına Yönelik Yükledikleri Anlam

Kategoriler	İkinci Sınıf	Dördüncü Sınıf	Toplam
Limitli olma	%38	%31	%34
Tanımlı olma	%19	%11	%17
Sürekli olma	%19	%39	%29
Türevinin alınabilmesi	%6	%0	%3
Teğetinin olması	%3	%6	%4
Eğim	%3	%5	%4
Değişimlerin oranı	%6	%0	%3
Sivrilik olmaması	%0	%5	%3
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **limitinin olması**	%6	%3	%3

Tablo 5 incelendiğinde öğrenciler çoğunlukla türevi olan bir fonksiyonu, limiti mevcut olan fonksiyon, sürekli fonksiyon ve türevi aranan noktada tanımlı olan fonksiyon şeklinde anlamlar yüklediklerini belirtmişlerdir. Sayıca az olmakla birlikte öğrencilerin türevlenebilen fonksiyona yönelik; türevinin alınabilmesi (%3), teğetin olması (%4), eğim (%4), değişimlerin oranı (%3), sivrilik olmaması (3) ve tanımda yer alan limitin mevcut olması (%3) anlamlarını yükledikleri de görülmüştür. Bu görüşler matematiksel gerçeklerle değerlendirildiğinde bir fonksiyona o noktada tek bir teğetin çizilebilmesi, fonksiyonun grafiğinde o noktada kırılma olmaması ve tanımda yer alan limitin mevcut olması gibi algıların doğru algılar olduğu söylenebilir. Bu düşüncelere sahip öğrencilerin oranı ise sadece %10'dur.

İkinci ve dördüncü sınıf öğrencilerinin türeve yönelik yükledikleri anlamlarda dikkati çeken, birbirinden açık bir şekilde farklılaşan kategoriler incelendiğinde, ikinci sınıf öğrencilerinin daha çok bir noktada türevlenebilen fonksiyonu o noktada tanımlı, dördüncü sınıf öğrencileri ise daha çok o noktada sürekli olarak açıkladıkları belirlenmiştir. Bu durumun sebebi Tablo 2 ve Tablo 3'teki verilerle tespit edildiği gibi, öğrencilerin türev tanımına yönelik anlayış farklılıkları olabilir. Aşağıdaki şekillerde sırasıyla ikinci ve dördüncü sınıf öğrencilerinin tanımlı olma ve sürekli olma kategorilerine yönelik örnek ifadeleri sunulmuştur.



Şekil 5. İkinci sınıf öğrencilerinin tanımlı olma ve dördüncü sınıf öğrencilerinin sürekli olma kategorisine yönelik örnek ifadeleri

Öğrencilerin bir noktadaki türev kavramına yönelik yükledikleri anlamları farklı bir boyutta ortaya çıkarabilmek, Tablo 5'te tespit edilen düşüncelerin problem durumunda kullanılıp kullanılmadığını, hangi anlamın ön plana çıkacağını ya da farklı düşüncelerin ortaya çıkıp çıkmayacağını görebilmek için bir soru sorulmuştur. Öğrencilere alışık olmadıkları tarzda olan "$\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere Δ kümesi üzerinde tanımlanan $f(x) = x^2$ fonksiyonunun 3 noktasındaki türevini araştırınız?" şeklinde bir soru sorulmuştur. Öğrencilerin sorunun çözümüne yönelik ürettikleri tüm argümanlar analiz edilmiştir. Üretilen argümanlar kullanılan gerekçe tiplerine göre sınıflandırılmıştır. Tablo 6'da öğrencilerin buldukları türev değerleri ve ürettikleri argümanlarda kullandıkları gerekçelere ait bilgiler sunulmuştur.

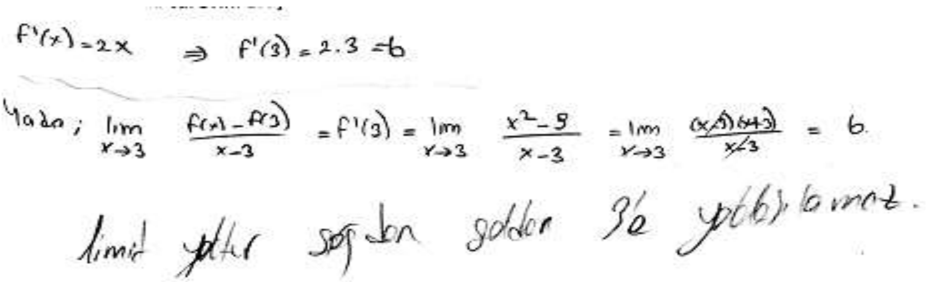
Tablo 6.
Öğrencilerin Verdikleri Yanıtlar ve Gerekçeleri

Türev	Gerekçe	İkinci Sınıf	Dördüncü Sınıf	Toplam
	$f'(3)=6$	%57	%45	%51
Mevcuttur	$f'(3)=9$	%3	%14	%8
	$f'(3)=6$ *ve* $6 \notin \Delta$	%23	%7	%15
	$f'(3)=9$ *ve* $9 \notin \Delta$	%7	%3	%5
Mevcut Değildir	$\lim_{x \to 3} f(x) = 9 \notin \Delta$	%10	%3	%7
	3 e yaklaşılamaz	%0	%10	%5
	Açıklama yok	%0	%4	%2
Boş		%0	%14	%7

Tablo 6 incelendiğinde öğrencilerin çoğunun fonksiyonun üç noktasında türevinin mevcut olduğunu belirttiği görülmüştür. Öğrencilerin gerekçelerine bakıldığında, tanım kümesine dikkat etmeden çoğunlukla fonksiyonun türevini almak suretiyle bir sonuca ulaştıkları görülmektedir. Bu durum Tablo 5'te yer alan, öğrencilerin bir noktada türevi olan fonksiyonu sadece türevi alınabilen fonksiyon olarak düşüncelerinin doğurabileceği sakıncalara örnek olmuştur. İkinci gerekçe olarak öğrenciler türev değerinin dokuz olarak bulunduğunu göstermiştir. Öğrenciler dokuz değerini fonksiyonun limitini alarak bulmuştur. Limit değerinin aynı zamanda türeve eşit olduğunu düşünen öğrenciler söz konusu fonksiyonun üç noktasında türevinin mevcut olacağı sonucuna varmışlardır. Bu durum Tablo 5'teki türeve yönelik yüklenen limit anlamını teyit etmiştir.

Türevin mevcut olamayacağını savunan öğrencilerin ana gerekçeleri türev olarak buldukları değerlerin tanım kümesi içerisinde olmamasıdır. Bazı öğrenciler de üç noktasındaki limit değerinin tanım kümesine ait olmadığını dolayısıyla bu noktada limitin olamayacağını ifade etmiştir. Bu durum türeve yönelik yüklenen tanımlı olma anlamının öğrenciler tarafından etkin bir şekilde kullanıldığını göstermiştir. Bu uygulamada göze çarpan bir durum, daha önce türevin arandığı noktanın fonksiyonun tanım kümesinde olması gerektiğini ifade edilirken uygulama sırasında türev değerinin de fonksiyonun tanım kümesi içerisinde olması gerektiğine yönelik gerekçeler kullanılmasıdır.

Öğrencilerin çok az bir kısmı üç noktasına yaklaşılamayacağını belirterek en azından türevi aranan noktanın belli başlı özelliklere sahip olması gerektiğini ima edip matematiksel gerçeğe yakın ifadeler kullanmıştır. Öğrencilerin sınıfları arasında bir kıyaslama yapıldığında ise ikinci sınıf öğrencileri daha fazla oranda türevin mevcut olmadığını belirtmelerine rağmen, dördüncü sınıf öğrencileri doğru gerekçe belirtmede daha fazla oranda görüş bildirmiştir. Aşağıdaki şekillerde sırasıyla ikinci sınıf öğrencilerinin en çok yer aldığı kategori ile dördüncü sınıf öğrencilerinin ürettikleri doğru gerekçeye örnek verilmiştir.



Şekil 6. İkinci sınıf öğrencilerinin en çok kullandıkları gerekçeye ve dördüncü sınıf öğrencileri tarafından sunulan doğru gerekçeye yönelik örnek ifadeler

4.TARTIŞMA ve SONUÇ

Öğrencilerin türev tanımını yorumlama becerilerinin ayrıntılı bir şekilde tespit edilebilmesi için öğrencilerden hem türev tanımını hem de tanımda yer alan “farkların oranının limiti” ifadesini açıklamaları istenmiştir. Yapılan açıklamaların birbiri ile örtüştüğü ortaya çıkmıştır. Açıklamalar ortak olarak değerlendirildiğinde, öğrencilerin türev tanımını beş farklı şekilde yorumladıkları ortaya çıkmıştır. Bu yorumlar yüzeysel açıklama, limit, oran, oranın limiti ve süreklilik kategorileri altında toplanmıştır.

Öğrencilerin bir kısmı türev tanımını kendi cümleleri ile ifade edemeyerek yüzeysel açıklamalar yapmıştır. Çalışmanın bu sonucu öğrencilerin tanımdaki bileşenleri anlamakta güçlük yaşadıkları, türevi kavramsal olarak değil yüzeysel anladıkları çalışma sonuçları ile örtüşmüştür (Açıkyıldız, 2013; Hashemi ve ark., 2014; Orton, 1983). Tanımı kendi cümleleri ile yorumlamaya çalışan öğrenciler ise açıklamalarında limit, oran, oranın limiti ve süreklilik kavramlarını kullanmışlardır. Yapılan açıklamaların çoğunun tanımın matematiksel anlamı ile örtüşmediği tespit edilmiştir. Buna göre öğrencilerin çoğunun bu tanıma yönelik kavramsal bilgi seviyesinde olmadıkları ve dolayısıyla tanımı yorumlama becerilerinin düşük olduğu söylenebilir. Öğrencilerin çoğu tanımı, tanımdaki sezgisel anlama olan “farkların oranının limiti”, “fonksiyondaki değişimin değişkendeki değişime oranının limiti” ve “bir fonksiyonun bağlı olduğu bir değişkendeki çok küçük değişim ile bu değişime bağlı olarak fonksiyondaki küçük değişimin birbirine oranlanması” fikirleri doğrultusunda yorumlamamıştır. Çalışmadan elde edilen bu sonuç analiz öğrencilerinin türevin tanımını bilmedikleri (Desfitri 2008’den Akt: Desfitri, 2016; Duru, 2006), tanımı anlayamadıkları (Akkaya, 2009; Bingölbali, 2013; Duran, 2018; Habre & Abbloud, 2006) ve tanımın içeriklerini özümseyemedikleri (Açıkyıldız, 2013;

Doruk, 2016; Duran, 2018; Duran & Kaplan, 2016) yönündeki çalışma sonuçlarını desteklemiştir. Orton (1983) bu çalışmada olduğu gibi, öğrencilerin türevi sezgisel olarak anlamakta güçlük yaşadıklarını belirtmiştir. Ayrıca öğrencilerin tanıma yönelik anlayışlarının formel tanımı ya da aldıkları eğitimi yansıtmadıkları söylenebilir. Bu durum kişisel kavram tanımının formel kavram tanımından farklı olabileceği yönündeki görüşü desteklemiştir (Tall & Vinner, 1981).

Öğrencilerin tanımda yer alan "farkların oranının limiti" ifadesine yönelik yapılan yorumların türev tanımına yapılan yorumlarla benzerlik gösterdiği tespit edilmiştir. Buna göre söz konusu ifadenin türev tanımının doğru yorumlanabilmesinde önemli bir yeri olduğu söylenebilir. Buna göre öğrencilerin türevin tanımını yorumlamada güçlük yaşamalarının sebebinin bu matematiksel ifadeyi doğru yorumlayamamalarından kaynaklandığı düşünülebilir. Birçok öğrenci bu ifadeye yönelik matematiksel olarak yanlış anlamlar yüklemişlerdir. Öğrencilerin bazıları bu ifadenin fonksiyonun limiti ya da sürekliliğine işaret ettiğini belirtmişlerdir. Söz konusu cebirsel ifade irdelendiğinde ilk olarak limit ifadesi dikkati çekmektedir. Türev tanımının anlaşılması için türev ile limit fikri arasındaki ilişkinin bilinmesi gerekmektedir. Yapılan araştırmalarda başlı başına limit kavramının anlaşılmasının öğrenciler için güç olduğu ve bu nedenle türevdeki limit fikrinin anlaşılmasında güçlük yaşandığı belirtilmiştir (Akkaya, 2009; Gür ve Barak, 2007; Orton, 1983). Söz konusu matematiksel ifadede sırasıyla değişim, değişim oranı, fonksiyon kavramları ön plandadır. Türevin cebirsel gösteriminin tam olarak anlaşılması için bu kavramların da özümsenmesi gerekmektedir. Maalesef yapılan araştırmalarda öğrencilerin fonksiyon, değişim, değişim oranı kavramlarına yönelik anlayışlarının sınırlı olduğuna yönelik sonuçlar mevcuttur (Duru, 2006; Heid, 1988; Kertil, 2014; Orton, 1983; Rowland & Jovanovski, 2004).

Öğrencilerin yorumlamakta güçlük yaşadıkları türev tanımını doğrudan nasıl uyguladıklarını ortaya çıkarmak için türev tanımının uygulanmasına yönelik bir soru sorulmuştur. Öğrencilerin çoğu türev tanımını doğru bir şekilde uygulamada güçlük yaşamamıştır. Buna göre öğrencilerin türev tanımını doğru bir şekilde yorumlamada başarılı olamasalar da türev tanımını doğrudan uygulama konusunda başarılı oldukları söylenebilir. Elde edilen bu sonuçlar öğrencilerin türevi sadece cebirsel olarak anladıkları (Orhun, 2012), sezgisel olarak anlayamadıkları (Orton, 1983), kavramsal anlama yerine işlemsel anlamayı tercih ettikleri (Duru, 2006) yönündeki çalışma sonuçlarını desteklemiştir. Öğrenciler bilindiği gibi türev konusunda daha çok yüzeysel bir anlamaya (Kertil, 2014), işlemsel ve prosedürel düşünceye sahiptirler (Açıkyıldız, 2013). Bu çalışmada da öğrenciler türev tanımının anlamını bilmeden cebirsel işlemler yoluyla problemi çözebildikleri ortaya çıkmıştır. Bu durum öğrencilerin cebirsel işlem yapabilmelerine rağmen türevde kullanılan sembolleri anlamada sorun yaşadıkları yönelik yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçları desteklemiştir (Santos & Thomas, 2001; White & Mitchelmore, 1996).

Öğrencilerin türev tanımının temsil ettiği kavrama yönelik yükledikleri anlamları ortaya çıkarmak için öğrencilerin doğrudan ilgili soruya verdikleri yanıtlar ve problem çözümü sırasında türev kavramı ile ilgili ürettikleri argümanlar incelenmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin türev kavramına yönelik öne çıkan anlamların fonksiyonun o noktada tanımlı, limitli, sürekli olması ve fonksiyonun işlemsel olarak türevinin alınabilmesi olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin problem çözümleri elde edilen bu düşüncelerin çoğunun matematiksel gerçeklerle uyuşmadığını göstermiştir. Öğrencilerin limit ve süreklilik ile türev kavramını eş tutması ya da türev kavramı içerisindeki limit fikrini anlayamaması literatürde var olan bir durumdur (Artigue, 1991; Bezuindenhout, 1998; Duru, 2006; Viveros & Sacristan, 2002). Öğrencilerin bir noktada tanımlı olmakla türev kavramını eş tutması yeni bir durum olarak ortaya çıkmıştır. Bu öğrenciler sadece türevi aranan noktanın değil aynı zamanda türev değerinin de fonksiyonun tanım kümesinde yer alması gerektiğini düşünmüşlerdir.

Bu çalışmayla birlikte; öğrencilerin bir fonksiyonun türevlenebilme kriterlerinden biri olarak, fonksiyonun türevinin işlemsel açıdan alınabilirliğini göz önünde bulundurdukları tespit edilmiştir. Bu durumun nedenlerinden biri öğrencilere uygulanan öğretim yöntemleri olabilir. Ergene (2011), öğrencilerin türevin cebirsel tanımının ezbere verildiği bir eğitim sonrasında cebirsel formdaki soruları çözebildiğini belirtmiştir. Bu sebeple öğrenciler türev-limit ilişkisi üzerine düşünme ve anlama gereği duymayacaklarını ifade etmiştir. Tall'a (1991) göre, cebirsel geçmişleriyle ilişkili olarak birçok öğrenci türevi cebirsel olarak anlamaktadır. Bu durum türevin farklı tanımları ve gösterimlerini anlamaya engel olmaktadır (Kula, 2013). Hâlbuki öğrenciler analizdeki nümeriksel, grafiksel ve analitiksel gösterimler arasında ilişki kurabildikleri oranda anlamaları daha da gelişmektedir (Aspinwall & Miller, 2001).

İkinci ve dördüncü sınıf öğrencilerinin çalışmadaki performansları göz önüne alındığında bazı bariz farklılıklar dikkati çekmiştir. Öğrencilerin türev tanımı yorumları incelendiğinde ikinci sınıf öğrencileri türev tanımını daha çok oran ve oranının limiti kavramları terimlerini kullanarak açıklama yapmaya çalışmışlardır. Dördüncü sınıf öğrencilerin ise daha çok bu tanımın fonksiyonun sürekliliği anlamına geldiğini ifade etmişlerdir. İkinci sınıf öğrencilerinin türev kavramına yönelik daha çok oranda limit ve tanımlı olma anlamlarına sahip iken dördüncü sınıf öğrencileri türev kavramını daha çok oranda süreklilik kavramı ile ilişkilendirmişlerdir. İkinci sınıf öğrencileri ile dördüncü sınıf öğrencileri arasında görülen bu farklılık, öğrencilerin bir kavrama yönelik sahip olabilecekleri imajların farklılık gösterebileceği şeklinde yorumlanabilir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç Vinner'ın (1983) kavram tanımı-kavram imajı görüşlerini akıllara getirmiştir. Vinner (1983) daha öncesinde bilinen bir kavramın kavram tanımı ile karşılaşıldığında kavram imajının kavram tanımı yönünde değişebileceği gibi, kavram tanımının bir müddet sonra unutulacağı ya da göz ardı edileceğinden kavram imajının aynı şekilde kalacağını belirtmiştir. Bu çalışmada da türev tanımı ile karşılaşıldığı zaman oluşan imajla türev tanımının etkisi azaldığı zamanda farklı kavram imajlarının gelişebileceği ortaya çıkmış ve dolaylı da olsa bu sonuç Vinner'ın (1983) görüşlerini desteklemiştir. Bu anlamda gelecekte yapılacak olan çalışmalarda ilgili derslerin türev imajları üzerindeki etkileri boylamsal çalışmalarla detaylı olarak incelenebilir. Yapılacak incelemelerde etkinlik temelli mülakatlar yardımıyla kavram imajları çeşitli boyutlarda ele alınabilir.

KAYNAKÇA

Açıkyıldız, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının türev kavramını anlamaları ve yaptıkları hatalar*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Türkiye.

Akkaya, E. (2009) *Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.

Altun, M. (2014). *Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için liselerde matematik öğretimi* (5.Basım). Bursa: Aktüel Alfa Akademi.

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconception in calculus: anecdotes or the tip of an iceberg?. In G. Booker & T.N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-10). Cinvestav, Mexico.

Arıkan, R. (2011). *Araştırma yöntem ve teknikleri*. Ankara: Nobel Yayıncılık.

Artigue, M. (1991). Analysis. In I.D. Tall & S. Vinner (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academics.

Asiala, M., Cottrill, J., & Dubinsky, E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Aspinwall, L., & Miller, L.D. (2001). Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings: one teacher's reflections. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(1), 89-107.

Balcı, M. (1999). *Matematik analiz I*. (6. Basım). Ankara: Balcı Yayınları.

Bezuindenhout, J. (1998). First year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*, 389-399.

Bingölbali, E. (2013). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmantar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (s. 223-252). Ankara: Pegem Akademi.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19-35.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal, 97*(1), 3-20.

Çakımcı, T., & Kabasakal, V. (2016). *Ortaöğretim ileri düzey matematik 12*. Ankara: Nova Yayıncılık Ticaret Limited Şirketi.

Çetinkaya, B., Erbaş, A.K., & Alacacı, C. (2013). Değişim oranı olarak türev ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s. 529-555). Ankara: Pegem Akademi.

Desfitri, R. (2016). In-service teachers' understanding on the concept of limits and derivatives and the way they deliver the concepts to their high school students. *Journal of Physics: Conference Series, 693*, 1-9.

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.

Duran, M. (2018). *Lise matematik öğretmenlerinin türev ve uygulamalarına ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.

Duran, M., & Kaplan, A. (2016). Lise matematik öğretmenlerinin türevin tanımına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik pedagojik alan bilgileri. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 18*(2), 795-831.

Duru, A. (2006) *Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, Türkiye.

Ergene, B. (2011). *Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin çoklu temsiller bileşeninde incelenmesi*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.

Even, R. (1993). A subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.

Gür, H., & Barak, B. (2007). Ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusundaki hata örnekleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, *7*(1), 453-480.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Hadjidemetriou, C., & Williams, J. (2002). Teachers' pedagogical content knowledge: graphs, from a cognitivist to a situated perspective. In E. Nardi (Ed.), *Proceedings of the 26th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-64), University of East Anglia, Norwich, UK.

Hashemi, N., Abu, M.S., Kashefi, H., & Rahimi, K. (2014). Undergraduate students' difficulties in conceptual understanding of derivation. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 143,* 358-366.

Hauger, G. S. (2000). Instantaneous rate of change: A numerical approach. *International Journal of Mathematical Education of Science and Technology, 31*(6), 891-897.

Heid, K. M. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(1), 3-25.

Ilgar, M.Z., & Ilgar, S.C. (2013). Nitel bir araştırma deseni olarak gömülü teori (temellendirilmiş kuram). *İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 3,* 197-247.

Kadıoğlu, E., & Kamali, M. (2003). *Genel matematik*. (3. Basım). Erzurum: Bakanlar Matbaacılık.

Kertil, M. (2014). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının bir model geliştirme ünitesi aracılığı ile türevi anlamaları*. Yayımlanmamış doktora tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Kızıltepe, Z. (2015). İçerik analizi. In F.N. Seggie & Y. Bayyurt (Ed.). *Nitel araştırma yöntem, teknik ve analiz ve yaklaşımları* (s. 253-266). Ankara: Anı Yayıncılık.

Kula, F. (2013). *Üniversite öğrencilerinin türev konusunu kavrayışları üzerine bir modelleme çalışması*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). A modeling perspective on teacher development. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective* (pp. 125-139). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Musayev B., Alp, M.. & Mustafayev, N. (2007). *Teori ve çözümlü problemlerle analiz II* (2.Basım). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Orhun, N. (2012). Graphical understanding in mathematics education: derivative functions and students' difficulties. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 55,* 679-684.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 235-250.

Özturan Sağırlı, M. (2010). *Türev konusunda matematiksel modelleme yönteminin ortaöğretim öğrencilerinin akademik başarıları ve öz-düzenleme becerilerine etkisi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, Türkiye.

Park, J. (2011) *Calculus instructors' and students' discourses on the derivative* (Doctoral dissertation). Retrieved from http://www.dbpia.co.kr/Journal/ArticleDetail/NODE01601032

Punch, K.F. (2011). *Sosyal araştırmalara giriş.* (Çev. Ed. Dursun Bayrak, H. Bader Arslan ve Zeynep Akyüz). Ankara: Siyasal Kitabevi.

Rowland, D. R., & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretation of the terms in first-order ordinary differential equations in modeling contexts. *International Journal of Matheamtical Education in Science and Technology, 35*(4), 505-516.

Santos, A.G.D., & Thomas, M.O.J. (2001). Representational fluency and symbolisation of derivative. *Proceedings of the Sixth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 282-291), Melbourne, Australia.

Tall, D. (1991). Intuition and rigor: The role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 105-119). Washington DC: Mathematical Association of America.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definitions in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Teuscher, D., & Reys, R.E. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics, 112,* 359–376.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(5), 609-637.

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 20*(1), 113-137.

Viholainen, A. (2006). Why is a discontinuous function differentiable?. *Proceeding 30th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp.329-336), Prague, Czech Republic.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image, and the notion of function. *Internatiional Journal of Mathematics Education, Science and Technology, 14*, 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Viveros, K., & Sacristan, A. (2002). College students' conceptual links between the continuity and the differentiability of a function. *Paper Presented at the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 350-360), October 26-29, Georgia, USA.

White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 79-95.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (8.Basım). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zandieh, M.J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, S. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics: Research in Collegiate Mathematics Education, 4*(8), 103-127.

Zandieh, M.J. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative*. Unpublished Doctoral Dissertation, Oregon State University, Corvallis, USA.

EXTENDED ABSTRACT

1. Introduction

One of the major goals of analysis, one of the basic learning areas in mathematics, is to understand, interpret, and predict the changing quantities and phenomena (Çetinkaya, Erbaş & Alacacı, 2013). One of the important building blocks used in reaching the goals that are aimed with the analysis course is the derivative which is one of the basic dynamics of analysis. A derivative is a concept that is rich in multiple representations, with multiple definitions and interpretations available. Three different approaches are used in the teaching of the concept of derivative. These approaches can be considered as numerical/physical, graphical and algebraic approaches. In algebraic approach, the concept of derivative is defined as formal. The concept of derivative is formally described by Balcı (1999) as "$A \subseteq IR$, $\alpha \in A$ *and let α be the accumulation point of the set A. If there is* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *or* $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *limit for* $f: A \rightarrow IR$ *function, then this limit is called the derivative of f function at a-point".*

It was reported in many studies that students had difficulties in understanding the formal definition of derivative, despite mostly emphasizing the algebraic aspect of the derivative at the level of the undergraduate (Açıkyıldız, 2013; Akkaya, 2009; Bingölbali, 2013; Duru, 2006; Habre & Abbloud, 2006). In these studies, it was determined that the students were not able to understand the concept 'the limit of the difference quotient', the intuitive meaning underlying the formal definition of derivative in relation to algebraic representation (Hähkiöniemi, 2005 retrieved from Bingölbali, 2013). It was also found that the students did not understand the definition of the derivative (Akkaya, 2009; Bingölbali, 2013; Duran, 2018; Habre & Abbloud, 2006; Zandieh, 1997) and did not explicitly addressed the relationship between derivative function and a point derivative in most cases (Park, 2011), and did not know the definition (Desfitri, 2008 retrieved from Desfitri, 2016; Duru, 2006), and also could not fully internalize the contents of the definitions (Açıkyıldız, 2013; Doruk, 2016; Duran, 2018; Duran & Kaplan, 2016). This shown that students did not fully internalize the roles of definitions in terms of mathematical knowledge (Viholainen, 2006). The students also had difficulty in understanding the symbols found in the derivative (Santos & Thomas, 2001; White & Mitchelmore, 1996).

When the literature was examined it was seen that a limited number of studies were conducted on how students interpreted the definition of derivative and what kinds of mistakes students made when interpreting the definition of a derivative, although it was determined that students had difficulty in understanding the derivation definition (Asiala, Cotrill & Dubinsky, 1997; Teuscher & Reys, 2012). The purpose of this study is to explain the difficulties in detail by focusing on these difficulties experienced by the students. The study also attempted to reveal the meanings attributed to concept of derivative definition by students. It is the duty of the teacher to be aware of the learning deficits of the students on a certain mathematical subject and to take measures to rectify these (Açıkyıldız, 2013). Vinner and Dreyfus (1989) stated that it should be understood why they made mistakes in order to improve communication with students. Investigations in this regard indicated that teachers were not successful in predicting the subjects which the students had difficulties with, and that this had a negative effect on teaching mathematics (Even, 1993; Hadjidemetriou & Williams, 2002). In this study, we focused on the formal definition of the concept of the derivative being the leading in challenging topics in the analytical field in order to assist teachers responsible for the teaching of derivative. Within the scope of the research, the answers of the following research questions were searched.

1. How do the students interpret the algebraic notation of the derivative?
2. What kind of meanings do the students attribute to the concept of derivative?
3. What are the differences between the second and fourth graders in terms of interpreting the derivative definition and the meaning attributed to derivative?

2. Method

Qualitative research approach was taken as a basis in the study. It was concluded that the most appropriate research pattern to be used in the framework of the investigated properties was Case Study. Participants of the study are a total of 60 students, 31 of them are in the second grade and 29 are in the fourth grade, who are studying at the elementary school mathematics teacher department of a state university in the Eastern Anatolia Region at the beginning of the spring semester of the 2014-2015 academic year. The data of the study was collected with the help of the Derivative Understanding Form (DUF) developed by the researchers. In DUF, there is a formal definition of the derivative and five open-ended questions related to this definition. The first two of the questions aimed at revealing how the formal definition of the derivative and the mathematical expressions in the definition were interpreted by students. The third question was used to find out how students applied the derivation definition. The last two questions aimed at revealing the meaning attributed to derivative by the students.

Content analysis was used in analyzing the data obtained from teacher candidates' views. At first, the answers given by the students were examined by the first author and draft categories were created. Later, authors came together and re-examined the categories with the data and gave the final form to the categories. Two experts were consulted to ensure the reliability of the categories obtained. In accordance with the opinions of the experts, arrangements were made for the mathematical interpretation of the results obtained from the categories. Whereas most students responded in only one category, some students used expressions that could enter multiple categories. It was often tried to make a presentation without changing the written statements of the students.

3. Findings, Discussion and Results

The students were asked to explain both the definition of the derivative and the expression "the limit of the difference quotient" in the definition in order to determine in detail the ability of students to interpret the derivative definition. It was determined that the statements coincided with each other. When the statements were considered as common, it was found that the students interpreted the definition of derivative in five different ways. These interpretations were summarized under the categories of superficial explanation, limit, quotient, limit of quotient and continuity.

It was found that the interpretations made by the students for the expression "the limit of the difference quotient" in the definition were similar to the interpretations made for the definition of the derivative. Accordingly, it can be said that this expression has an important place in the interpretation of the definition of derivative. Accordingly, it can be assumed that the reason for the difficulty experienced by the students in interpreting the definition of derivation is due to their inability to correctly interpret this mathematical expression.

It was determined that the most important meanings of the concept of derivative for students were the fact that the function was defined at that point, limited, continuous and that the derivative of the function could be taken operationally. The problem solutions of the students showed that most of these ideas were incompatible with mathematical facts. The fact that the students consider equal the limit and continuity and the concept of the derivative or the fact that students do not understand the idea of the limit in the concept of the derivative is a situation that exists in the literature (Artigue, 1991; Bezuindenhout, 1998; Duru, 2006; Viveros & Sacristan, 2002). The fact that the students consider equal the concept of being defined at one point to the concept of derivative emerged as a new situation. These students thought that not only the point that its derivative is sought but also the derivative value should be included in the definition set of the function.

When the performances of the second and fourth grade students were taken into consideration, some obvious differences were noticed. When students' interpretations of derivative definitions were examined, it was seen that second grade students tried to explain the definition of derivative mostly by using the terms of limit and limit of quotient. The fourth grade students, on the other hand, mostly stated that this definition meant the continuity of the function. Whereas second grade students mostly emphasized the limit and being defined at a point meanings with regard to the concept of derivative, fourth grade students mostly associated the concept of derivative with the concept of continuity.