Mühendislik Tasarımında Olasılığa Dayalı Tasarım Yöntemlerinin Kullanımı

İrfan Kaymaz
Yardımcı Doçent

Recep Sadeler
Araştırma Görevlisi

Makine Mühendisliği Bölümü
Atatürk Üniversitesi
25240 Erzurum

Bu çalışmada mühendislik tasarımında kullanılan klasik yöntem ile son zamanlarda yaygın bir kullanım alanı bulmaya başlayan olasılığa dayalı tasarım metodu karşılaştırılmalı olarak verilmiştir. İlk olarak gerilme-dayanım yaklaşımı verilmiş ve buna bağlı olarak geliştirilen FOSM (birinci-derece ikinci moment) yaklaşımı detaylı olarak anlatılmış ve bu yöntemin eksikliklerini gidermek amacıyla geliştirilen FORM (birinci-dereceden güvenilirlik yöntemi) ve SORM (ikinci-dereceden güvenilirlik yöntemi) yöntemleri verilmiştir. Bu yöntemlerden farklı olarak simülasyona dayanan Monte Carlo Simülasyonu anlatılmıştır. Verilen bu yöntemlerin uygulanışı bir örnek vasıtasıyla gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Mühendislik tasarımı, Olasılığa dayalı tasarım, Güvenirlilik yöntemleri

DETERMİNİSTİK VE OLASILIĞA BAĞLI TASARIMIN KARŞILAŞTIRILMASI

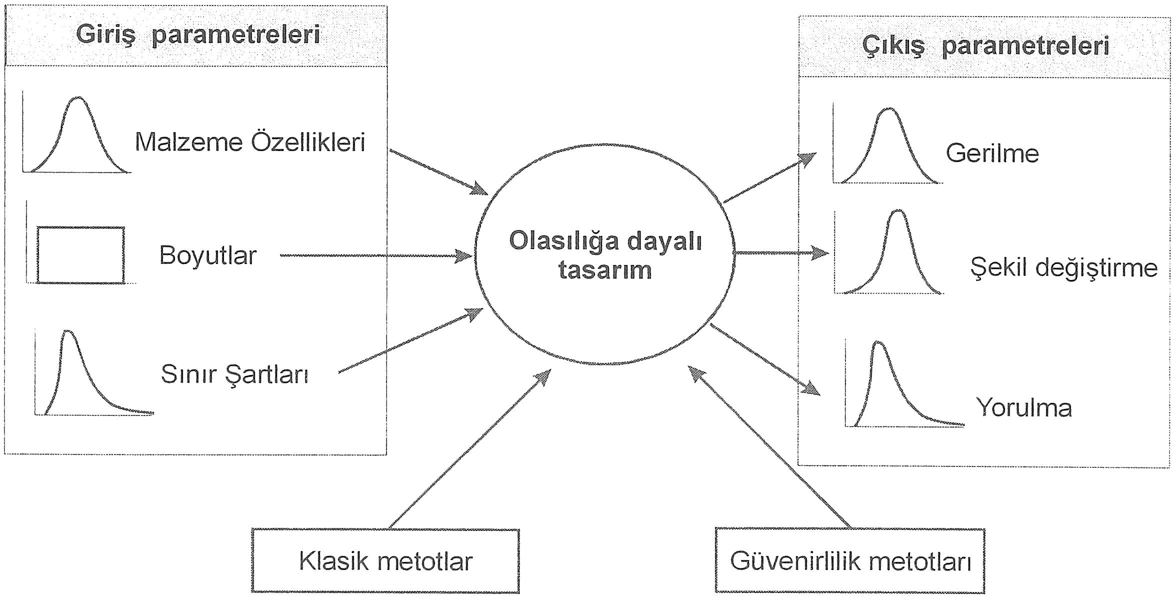
Mühendislik tasarımı, bir sistemin veya makine elemanın boyutlarını, malzemesini ve çalışmasını, istenilen ihtiyaçlara cevap verecek şekilde belirleme işlemidir [1]. Tasarım, karar verme faaliyetidir (çoğunlukla tekrarlı) ve temel bilimler, matematik ve mühendislik bilimleri, belirlenen hedefe ulaşmak için en optimum şekilde uygulanmalıdırlar. Bu amacı gerçekleştirmek için çeşitli yöntemler kullanılabilir [2]. Bunlardan biri, pek çok parça tasarımı yapılan deneysel yoldur ve bu yöntemde her bir tasarım test edilir. Tasarımdaki sınırlamaları sağlayan en ekonomik tasarım son tasarım olarak seçilir. Bu etkili bir yöntem olmasına rağmen pahalı ve zaman alıcıdır. Test aşaması tasarımın son aşamasında yapıldığından hatalı tasarımları değiştirme imkanı yoktur. Bu nedenle zamanla ikinci bir yöntem geliştirilmiş ve bu yöntemde tasarım faaliyeti analitik olarak tanımlanmış ve matematiksel yöntemler kullanarak en iyi çözüm elde edilmiştir. Bu ilk yaklaşıma göre daha etkin bir yöntem olmasına rağmen, pratik uygulamalarda, tasarım ve analiz problemlerinin karmaşıklığı nedeniyle bir tasarım problemine ait doğrudan analitik çözüm bulmak oldukça zordur. Bu nedenle, pek çok yaklaşım metodu geliştirilmiştir. Bunlara örnek olarak sonlu elemanlar metodu, sonlu farklar metodu ve simülasyon yöntemleri verilebilir. Bu tip analizlerde, uygulanan yükte, malzeme özelliklerinde ve davranıştaki belirsizlikleri dikkate almak için bir emniyet katsayısı kullanılır. Bu tür tasarımlar çoğunlukla aşırı tasarım (overdesign) içermektedir çünkü tasarıma ait parametreler en kötü durum dikkate alınarak değerlendirilir. Örneğin uygulanan yükün maksimum değerinin kabul edilmesi fakat malzeme dayanımına ait değerlerin minimumu dikkate alınmasıyla, karşılaşılabilecek en kritik durum tasarım prosesine dahil edilir. Tasarım parametrelerinin daha gerçekçi bir şekilde tasarım faaliyetine ilave edilmesi için son zamanlarda iki tekniğin önem kazandığı görülmektedir: olasılığa dayalı tasarım ve optimizasyon. Olasılığa dayalı tasarım, ileriki bölümlerde daha ayrıntılı olarak verileceği gibi, tasarımcıya belirli bir güvenirlilik sınırında bir tasarım yapma imkanı sağlar. Böylece emniyet, kalite ve ekonomi eniyilenmiş olur. Olasılığa dayalı tasarım, tasarım parametrelerinin belirsizlik veya dağılım içerdiği durumlarda çok önemlidir. Boeing firmasının baş aerodinamikçisinin belirttiği gibi, belirsizlik yönetimi, uzay mekiği tasarımı gibi pratik uygulamalarda dominant konu olmaktadır [3]. Bu nedenle, olasılığa dayalı tasarım yöntemlerinin mühendislik tasarımında kullanımı gittikçe artmaktadır. Amerika Birleşik Devletlerinde South West Araştırma merkezinde, olasılığa dayalı tasarım yöntemleri uzay mekiğinin motor parçalarının, gaz türbinlerinin kanatlarının tasarımında, yüksek basınç boru sistemlerinin tasarımlarında kullanılmaktadır [4]. Klasik tasarım yaklaşımları ile olasılığa dayalı tasarım yaklaşımı arasındaki farkı daha iyi anlatabilmek için, her iki yaklaşımın karşılaştırılması Tablo 1'de verilmiştir.

OLASILIK ANALİZİNİN GENEL ADIMLARI

Mühendislik tasarımında, genel bir şeması Şekil 1'de verilen olasılığa dayalı tasarımı kullanmak için takip edilecek başlıca adımlar aşağıdaki gibi verilebilir.

Tablo 1: Deterministik tasarım ile ihtimale dayalı tasarımın karşılaştırılması

Deterministik (Klasik) Tasarım	Olasılığa dayalı Tasarım
Analiz edilen makine elemanın sadece verilen boyutlarda ve sınır şartlarında maruz kaldığı yüklemeyi taşıyıp taşıyamadığını belirtir.	Elde edilen çözümün ne kadar güvenilir ve verilen boyutlarda makine elemanın fonksiyonunu yerine getirme olasılığını da verir.
Tasarımdaki belirsizlikler veya tasarım parametrelerinin değerlerindeki dağılımdan dolayı analizde meydana gelecek olan belirsizliği gidermek için emniyet katsayıları kullanılır ki bunlar genelde malzemenin en düşük dayanım değerini ve uygulanan yükün en yüksek değerini alarak emniyetli bir tasarım gerçekleştirilmeye çalışılır. Bu da pahalıya mal olacak boyutlarda fazla tasarıma yol açar.	Tasarım parametrelerindeki dağılım veya belirsizlikler, istatistiksel dağılım fonksiyonları yardımıyla doğal olarak analizlere ilave edildiğinden, parametrelerinin tasarıma etkisi gerçekçi bir şekilde değerlendirilir. Dolayısıyla daha fazla masrafa yol açacak aşırı tasarımdan kaçınılmış olur.
Sadece belirtilen boyutlarda ve sınır şartlarındaki tasarım değerlendirir, dolayısıyla tasarım parametrelerinde yapılacak değişimin tasarıma nasıl bir etki yapacağı kestirilemez.	Tasarım parametreleri belirli bir istatistiksel dağılıma sahip olduğundan, belli bir değerden ziyade istatistiksel dağılımın belirlediği aralıktaki değerleri dikkate alır. Dolayısıyla analizden elde edilen sonuçlar, parametre değerlerinde olan değişikliklerinin aralığa etkisini de içermektedir.
Klasik yöntemlerdeki hassasiyet hesaplamalarında giriş parametreleri arasındaki ilişkiyi dikkate almaz.	Eğer giriş parametreleri bir korelasyona sahip ve bağımsız değil iseler bunların birleşik olasılık dağılım fonksiyonları doğal olarak bu etkiyi içerecektir.



Şekil 1: Olasılığa dayalı tasarım metodunun genel şeması

ADIM 1. Olası hata modellerinin tespit edilmesi:
Mühendisler, incelenen makine elemanının veya yapının genel davranışlarını, emniyetli bir tasarım elde etmek için çok iyi anlamak zorundadırlar ve tasarımları en kritik durum dikkate alarak geliştirmelidirler. Bu durum olasılığa dayalı tasarımda hata modeli veya performans fonksiyonunun tanımlanması ile belirtilir. Örneğin uç bir kuvvete maruz bir ankastre kiriş için, fonksiyonunu yerine getirememesi, kuvvetten doğacak gerilmelerin ankastre kiriş için belirlenen taşıyabileceği maksimum gerilmeyi aşması durumu olarak belirlenebilir. Bu durum için hata modeli veya performans fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$Performans\ fonksiyonu(g(x)) = uygulanan\ yük$$
$$- müsaade\ edilen\ maksimum\ yük \leq 0$$

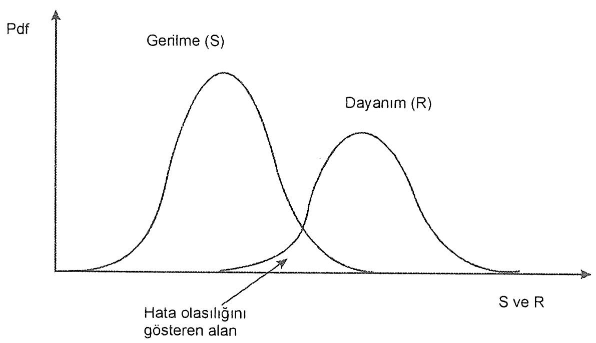
Kritik durum makine elemanında değişik noktalarda meydan gelebilir. Makine elemanın bazı bölgelerinde birden fazla kritik durum oluşabilir. Bu nedenle uygun bir performans fonksiyonun belirlenmesinde mühendislik bilgisi en önemli rolü oynar.

ADIM 2. Tasarım değişkenlerinin istatistiksel olarak belirlenmesi:

Bir çok ihtimale dayalı tasarım uygulamalarında, rasgele tasarım değişkenlere ait olasılık dağılım fonksiyonu belirlenmelidir. Bu olasılık dağılım fonksiyonlarının belirlenmesi rasgele değişkenlere ait geçmiş tecrübelerden elde edilmiş veriler veya çok sayıda deney yapılarak, istatistiksel yöntemler yardımıyla elde edilir. Adım 1'de verilen örnek dikkate alındığında, örneğin kiriş malzemesinin maksimum gerilmesi bu malzemenin akma gerilmesi olarak belirlersek, aynı malzemeden pek çok sayıda numunenin çekme deneyi sonuncu elde edilen akma gerilmesinin istatistiksel dağılımı elde edilmelidir. Maalesef bu olasılık dağılımları üretici firmalar tarafından istatistiksel olarak doğrudan verilmez, dolayısıyla test veya analizlerden elde edilmelidir. Bunun için en fazla kullanılan yöntemler olarak en iyi uygunluk testi, teorik dağılım fonksiyonu ile elde edilen data arasında uygulanır. Test datalarına uygun en iyi dağılımı elde etme yöntemleri geniş bir şekilde referanslarda mevcuttur [6].

ADIM 3. Kabul edilebilir bir hata olasılığının belirlenmesi:

Kabul edilebilir hata olasılığı, olasılık analizinden elde edilen sonuçlarının kabul edilebilir bir tasarım olup olmadığını belirlemede bir kriter olarak rol oynar. Örneğin ankastre kirişin hata olasılığını $1x10^{-5}$ olarak tayin edersek, olasılığa dayalı analizden elde edeceğimiz boyutlarda bu tayin ettiğimiz hata olasılığına uygun olacaktır.



Şekil 2. Gerilme-dayanım metodunun gösterimi

ADIM 4. Klasik yöntemlerin kullanılması:

Olasılığa dayalı tasarım, geleneksel analiz yöntemleri ve sonlu elemanlar metodu gibi yaklaşımların yerini alan bir yöntem değildir. Aksine, bu yöntemler olasılık tasarım prosesinin bütünleştirici kısmını oluştururlar. Olasılık tasarımı var olan klasik yöntemler etrafında oluşturulur. Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi performans fonksiyonundan hata olasılığını hesaplayabilmek için ankastrede uç kuvvetten dolayı oluşacak gerilmenin hesap edilmesi gerekmektedir ki bu da klasik yöntemleri veya sonlu elemanlar metodunu kullanmakla mümkündür.

ADIM 5. Olasılığa dayalı tasarım yöntemleri:

Verilen problemin performans fonksiyonuna bağlı olarak, klasik yöntemleri kullanarak hata olasılığının hesaplanması için olasılığa dayalı analiz yöntemleri kullanılmalıdır. Bu yöntemlerle ilgili geniş bir bilgi takip eden bölümde verilmiştir.

OLASILIĞA DAYALI TASARIM YÖNTEMLERİ

Gerilme-dayanım metodu

Olasılığa dayalı tasarım yöntemlerinin en eskilerinden olan gerilme-dayanım metodu, basit ve uygulaması ekonomik olduğundan pek çok mühendislik problemine uygulanmıştır. Buna ilaveten, daha gelişmiş olasılığa dayalı tasarım yöntemlerini açıklamak için bir alt yapı oluşturduğundan bu bölümde kısaca açıklanacaktır.

Gerilme-dayanım metodunun isminin de vurguladığı gibi, yapısal güvenirlilik (structural reliability), makine elemanına etki eden gerilmenin ve makine elemanının dayanımının istatistiksel dağılımı dikkate alınarak hesaplanır. Bununla birlikte bu kavram, gerilme yerine uygulanan yük, moment, deplasman gibi terimler koyarak geliştirilebilir. Benzer olarak, dayanım terimi de uygulanan yüke elemanın dayanma kapasitesi olarak yorumlanırsa, akma gerilmesi, maksimum gerilme, maksimum deplasman terimleri kullanılarak daha da geliştirilebilir. Gerilme-dayanım ifadesine ait hata kriteri (performans fonksiyonu) aşağıdaki şekilde verilebilir

$$g(X_1, X_2, ..., X_n) = [R(X_1, X_2, ..., X_n) - S(X_1, X_2, ..., X_n)] < 0 \quad (1)$$

bu denklemde $R(X_i)$ malzeme dayanımını, $S(X_i)$ gerilme rasgele değişkenleri, ve $g(\mathbf{X})$'de performans fonksiyonu olarak adlandırılır. Performans fonksiyonunun özel bir değeri güvenirlilik analizinde önemlidir ve bu limit durum olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$g(X_1, X_2, ..., X_n) = [R(X_1, X_2, ..., X_n) - S(X_1, X_2, ..., X_n)] = 0$$

limit durum,Şekil 3'de gösterildiği gibi, tasarım uzayını emniyetli ve emniyetsiz bölge olarak ikiye böler [7]. Gerilme-dayanım metodunun hata modelleri için bu durumun daha açık bir ifadesi aşağıda verilmiştir:

$$g(X) = R - S = 0 \tag{2}$$

Burada $\boldsymbol{R}$ ve S sırasıyla dayanım parametreleri vektörünü ve gerilme vektörünü göstermektedir ve istatistiksel olarak bağımsız normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olduklarını varsayalım. Bu limit durum fonksiyonunu ortalaması ve varyansı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mu_G = \mu_R - \mu_S \text{ ve } \sigma_G^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \tag{3}$$

Performans fonksiyonunun sıfırdan küçük değerler aldığı durum hata durumu olarak belirlenir ve bu durumun olasılığı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$P_f = P[g(X) < 0] = \Phi\left(-\frac{\mu_G}{\sigma_G}\right) \tag{4}$$

Burada Φ normal dağılıma sahip bir rasgele değişkenin kümülatif dağılım fonksiyonudur. Denklem 4'den hata olasılığı $g(X)$'in ortalama değerinin standart dağılımına oranı olarak ifade edilebilir, ve bu oran emniyet indeksi veya güvenirlilik indeksi olarak adlandırılır ve β ile gösterilir:

$$\beta = \frac{\mu_{g(X)}}{\sigma_{g(X)}}$$

$$P_f = \Phi(-\beta) \tag{5}$$

Hata olasılığının birden fazla rasgele değişkenlere bağlı olarak genel matematiksel gösterimi aşağıda verilmiştir:

$$P_f = \int \ldots \int_{g(X) \le 0} f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \tag{6}$$

Gerilme-dayanım metodu güvenirlilik analizlerinde kullanılmasına rağmen, dikkat edilmesi gereken bazı eksiklikleri mevcuttur. İlk olarak, pratik uygulamalarda birleşik olasılık dağılım fonksiyonu genellikle mevcut değildir. Hatta mevcut olduğu durumlarda, limit durum fonksiyonu Denklem 2'de verildiği gibi, bütün güvenirlilik problemleri için lineer olarak temsil edilemeyebilir. Bu tür eksiklikleri gidermek için pek çok yöntem geliştirilmiş ve bu yöntemlerden olan Birinci-derece İkinci-moment (FOSM) aşağıda ayrıntılı olarak verilmiştir.

BİRİNCİ-DERECEDEN İKİNCİ-MOMENT FORMÜLASYONU (FOSM)

Birinci-dereceden İkinci-moment metodu, genel forma sahip limit durum fonksiyonun birinci dereceden Taylor serisine açılmasına dayanmaktadır ve sadece rasgele değişkenlerin ikinci-moment istatistik değerleri (ortalama ve varyansını kullanmaktadır.

İkiden fazla rasgele değişken içeren ve genel bir forma sahip performans fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \tag{7}$$

Denklem 7'de verilen performans fonksiyonu değişkenlerin ortalama değerlerinde Taylor serisine açarsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$Z = g(\overline{X}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial X_i}(X_i - \overline{X}_i)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}(X_i - \overline{X}_i)(X_j - \overline{X}_j) + \ldots$$

Sadece lineer terimler alındığında Z'in ortalama değeri ve varyansı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\overline{Z} \approx g(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n)$$

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^2 Var(X_i)$$

ve güvenirlilik indeksi ve hata olasılığı, Denklem 5'da verildiği aşağıdaki bağıntılardan hesaplanır:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$$

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

Bu yöntem kompleks olasılık problemlerini, terimlerin lineer olarak temsil edildiği basit problemlere çevirmesine rağmen, FOSM metodunun sadece, bütün rasgele değişkenlerin istatistiksel olarak bağımsız olduğu veya bu hale çevrilebilen değişkenler içeren problemler için kullanılabilir. Ayrıca bu yöntem, limit durum fonksiyonu, rasgele değişkenlerin basit çıkartma veya ekleme biçiminde ifade edildiği problemlerde kullanılabilir. Bu yaklaşımın en önemli eksikliği, aynı problem için farklı tanımlanabilecek bu performans fonksiyonu için farklı sonuç verecek olmasıdır. Bu eksiklikler Hasofer ve Lind tarafından aşağıda verilen basit yaklaşımla çözülmüştür.

Hasofer-Lind Yöntemi

Hasofer ve Lind [8]'in yaklaşımında, ilk olarak aşağıda verilen bağıntı yardımıyla rasgele değişkenler standart (standart sapmalarına göre normalleştirilmiş) değişkenlere dönüştürülür:

$$X_i' = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \qquad (8)$$

burada X_i' ortalama değeri 0 ve standart dağılımı 1 olan bir rasgele değişkendir. Orijinal limit durum ($g(X)=0$) standartlaştırılmış limit duruma ($g(X')=0$) X_i yerine X_i' yerleştirilerek elde edilmiştir. Gerilme-dayanım yaklaşımından farklı olarak güvenirlilik indeksi β, bu dönüştürülmüş koordinat sisteminin orijini ile limit durum fonksiyonu arasındaki minimum mesafeye işaret etmektedir ki bu noktaya aynı zamanda tasarım noktası da denir (Şekil 3). Bu transformasyon yapıldıktan sonra, performans fonksiyonunun tipine bağlı olarak, yani performans fonksiyonun lineer veya nonlineer olmasına bağlı olarak, aşağıda verilen yöntemler uygulanır.

Lineer performans fonksiyonu

Limit durum fonksiyonunun aşağıda verildiği gibi lineer bir polinom olduğunu varsayalım:

$$g(X) = a_0 + \sum_i a_i X_i \qquad (9)$$

a_0 ve a_i tespit edilecek fonksiyonun katsayılarıdır. Hata durumu ile emniyet durumu arasındaki sınırda performans fonksiyonu $g(X)=0$ değerini aldığından, limit durum fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$g(X) = a_0 + \sum_i a_i X_i = 0$$

bu denklem standartlaştırılmış değişkenler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$a_0 + \sum_i a_i(\sigma_{X_i} X_i' + \mu_{X_i}) = 0$$

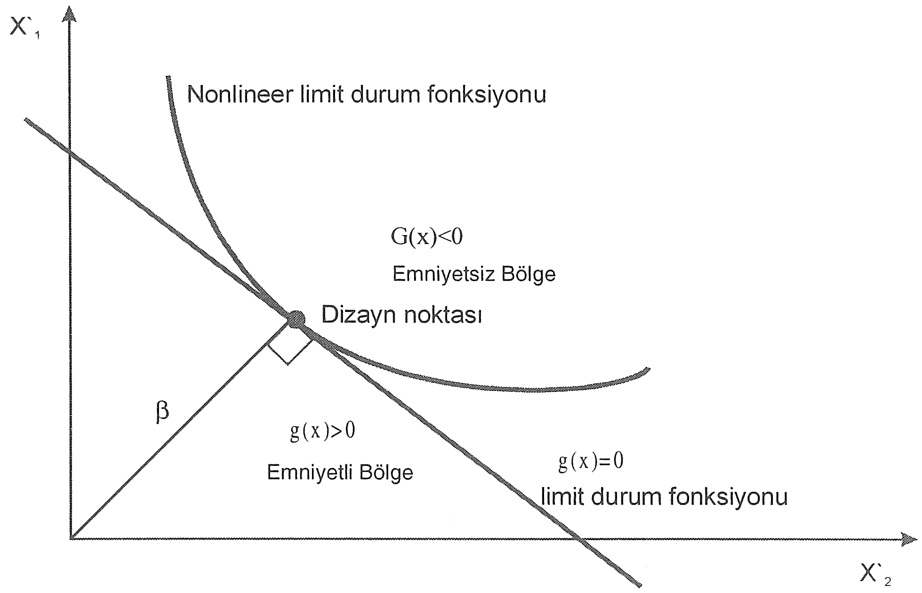
Limit durum fonksiyonu ile standartlaştırılmış değişkenlerin orijini arasındaki mesafe, yani β, şöyle verilir:

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_i a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{X_i})^2}} \qquad (10)$$

Güvenirlilik indeksini elde ettikten sonra, hata olasılığı Denklem 5'den kolaylıkla elde edilebilir. Grafik olarak bu metodun uygulanışı Şekil 3'de verilmiştir. Bu yöntem ancak, performans fonksiyonunun açık bir şekilde lineer olarak ifade edildiği problemler için geçerlidir. Bununla birlikte, yapısal güvenirlilik problemleri çoğunlukla açık olarak ifade edilemez veya çoğunlukla lineer olmayan formdadır.

Lineer Olmayan Performans Fonksiyonu

Lineer olmayan performans fonksiyonlarına sahip güvenirlilik problemlerinin çözümü için iki ana yaklaşım geliştirilmiştir: Birinci-dereceden güvenirlilik metodu (First Order Reliability Method), kısaca FORM, ve ikinci-dereceden güvenirlilik metodu (Second-Order Reliability Method), kısaca



Şekil 3 : Limit durum, dizayn noktası ve güvenirlilik indeksinin gösterimi

SORM olarak adlandırılır. FORM metodunda, performans fonksiyonu tasarım noktasında birinci dereceden Taylor serisine açılmaktadır. SORM'da ise performans fonksiyonu ikinci dereceden Taylor serisine açılmaktadır. Genellikle SORM FORM'a göre daha iyi bir güvenirlilik indeksi sonucu vermesine rağmen, teorisi ve uygulaması daha zordur. Bu nedenle SORM metodu pek yaygın bir kullanım alanı bulamamıştır [9], [10], [11], [12].

BİRİNCİ-DERECE GÜVENİRLİLİK METODU (FORM)

Bu yöntemde, dizayn noktası, limit durum fonksiyonuna teğet düzleminin yaklaştığı noktadır, ve istenilen güvenirlilik indeksi, Denklem 5'de verildiği gibi lineer limit durum fonksiyonunda olduğu gibi hesaplanır. Minimum noktayı bulmak için aşağıda verilen bir optimizasyon problemi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} &\text{minimum} \quad \beta = \sqrt{X'^T X'} \\ &\text{şartı} \quad g(X) = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

burada $(X'^T X')$, limit durum ile transform edilmiş koordinat sisteminin orijini arasındaki uzaklıktır. Denklem 11'deki performans fonksiyonu normal koordinatlarda verilmiştir.

İKİNCİ-DERECE GÜVENİRLİLİK METODU (SORM)

Performans fonksiyonuna lineer yaklaşımdan doğan FORM'un sahip olduğu eksiklilikleri gidermek için, ikinci-derece güvenirlilik metodu olarak adlandırılan SORM kullanılabilir. SORM metodu aşağıda verildiği gibi, standartlaştırılmış koordinat sisteminde, g(U), performans fonksiyonunun tasarım noktasındaki, U*, ikinci dereceden Taylor serisi açılımını kullanır:

$$g(U) = \beta_F - \alpha^T U + \frac{1}{2}(U - U^*)^T B(U - U^*)$$

burada

$$\alpha = \frac{\nabla g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|}, \quad B = \frac{\nabla^2 g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|}, \quad \beta_F = \alpha^T U^*$$

β_F FORM'dan hesaplanan güvenirlilik indeksini göstermektedir.

Literatürde, limit durum fonksiyonuna ikinci dereceden yaklaşım yöntemlarını kullanarak hata olasılığını hesaplayan yöntemlar geliştirilmiştir [11], [9], [14], [15] ve daha genel bir değerlendirme Zhao ve Ono [16] tarafından verilmektedir.

Şu ana kadar verilen yöntemlerde, rasgele değişkenlerin birbiriyle ilişkileri olmayan normal dağılıma sahip değişkenler olduğu varsayılmıştır. Bununla birlikte, mühendislik uygulamalarında çoğunlukla birbiriyle korelasyonlu ve farklı olasılık dağılımına sahip daha komplike rasgele değişkenler içermektedir. Bundan dolayı bu tür problemlere FORM/SORM'u uygulayabilmek için rasgele değişkenler korelasyonsuz standartlaştırılmış değişkenlere dönüştürülmelidir. Bu yöntemlerden en yaygını Rosenblatt transformasyonudur. Bu yöntem ile ilgili geniş açıklama ilgili referansta bulunabilir [17].

Bu analitik yöntemleri kullanmak yerine, dizayn noktası, hata olasılığı gibi değerler simülasyona bağlı güvenirlilik yöntemleri kullanarak elde edilebilir. Bu simülasyon yöntemlerinden en fazla kullanılanlardan biri olan Monte Carlo simülasyonu aşağıdaki bölümde açıklanmıştır.

MONTE CARLO SİMÜLASYONU (MCS)

Geçmiş bölümlerde de belirtildiği gibi, FORM/SORM gibi pek çok analitik yöntem, yapısal güvenirlilik problemlerine çözüm bulmak için geliştirilmiştir. Bununla birlikte bu analitik yöntemler Denklem 6'de verilen entegrali dikkate almak zorundadırlar. Daha önce de belirtildiği gibi, bu entegralin çözümü zordur veya pek çok problem için bu tür bir entegrali kurmak güçtür. Alternatif olarak bu entegralin çözümü için Monte Carlo simülasyonu kullanılabilir. Bu yaklaşımda, simülasyon doğrudan sisteme, probleme, sistemin davranışların belirleyen denklemler kurmadan uygulanabilir. Tek gerekli olan şey sisteme etki eden parametrelerin olasılık dağılım fonksiyonuna sahip olmasıdır. Olasılık dağılım fonksiyonları bilindiği durumda, MCS sisteme etki eden değişkenlerin olasılık dağılım fonksiyonlarından rasgele örnekleme vasıtasıyla model sürekli olarak değerlendirilir. Sonuca yaklaşım istatistiksel olarak örneklemenin sonuçları değerlendirilerek hata olasılığı veya ortalama değeri elde edilir. Örnekleme sayısı artıkça örnekleme varyansı kademeli olarak azalır. Eğer örnekleme varyansı kabul edilebilir seviyede değilse, örnekleme sayısı artırılır.

MCS'dan hata olasılığını hesaplamak için, hata fonksiyonu, bir işaret fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki şekilde yeniden tanımlanır [18]:

$$P_f = \int_{tüm\ X} \ldots \int I[\ ] f_X(x) dx \qquad (12)$$

Burada işaret fonksiyonu $I[g_i(X) \le 0, i = 1, \ldots, m]$, eğer X hata bölgesinde, D, ise $I[\ ] = 1$, değilse $I[\ ] = 0$ değerini alır. Tahmini hata olasılığı aşağıdaki denklemdeki gibi verilebilir:

$$P_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} I\left[g_i(x_j) \le 0, i = 1, \ldots, m\right] \qquad (13)$$

Bu denklemden hata olasılığını elde etmek için gerekli adımları aşağıdaki gibi verilebilir:

1. Sistemin tanımlanması
2. Üniform dağılmış rasgele sayılarının üretilmesi
3. Bu sayılara dayanarak rasgele değişkenlerin alacağı değerlerin hesaplanması
4. Tasarım modelinin üretilen rasgele değişkenlere bağlı olarak değerlendirilmesi
5. Elde edilen sonucun istatistiksel olarak kabul edilir olup olmadığının değerlendirilmesi.
6. Kabul edilir değerde değilse adım ikiden tekrar aynı döngünün tekrarı. Kabul edilebilir değerde ise sonuç bize hata olasılığını verir.

Yukarıda verilen direkt Monte Carlo simülasyonu, tasarım uzayının rasgele değişkenlerin ortalaması ve standart sapması ile tanımlanmış bölgesinden elde edilen örneklemeleri kullanmaktadır. Halbuki hata olasılığının hesaplanmasında en büyük katkı dizayn noktasındaki örneklemelerden elde edildiğinden, rasgele değişkenlerden örneklemelerin dizayn noktasında elde etmek için birçok yöntem geliştirilmiştir ki bunlardan bazıları Importance Sampling [19], Adaptive Sampling yöntemi [20] ve Latin Hypercube Sampling yöntemi [21] olarak verilebilir

Şu ana kadar açıklanan yöntemlerin mühendislik tasarımındaki uygulamalarına ait bir örnek takip eden bölümde verilmiştir.

ÖRNEK

Örnek olarak belli bir hızda dönen bir diskin olasılığa dayalı tasarım yöntemlerini uygulayarak verilen boyutlardaki hata olasılığı hesaplanacaktır.

Adım 1: Hata modelinin (performans fonksiyonun) belirlenmesi:

Dönen bir diskin maksimum radyal gerilmesi aşağıda verilen formülle hesaplanabilir [22]:

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3+\nu}{8} \frac{\rho}{(9.81)(39.37)} \left[\omega \frac{2\pi}{60} \right]^2 (r_0^2 - r_i^2)$$

Bu denklemde $(\sigma_r)_{max}$ maksimum radyal gerilmeyi, ω rotor hızını, r_0 diskin dış çapı, r_i diskin iç çapı, ρ disk malzemesinin yoğunluğu ve ν Poisson oranını göstermektedir. Kritik durum (performans fonksiyonu), diskte oluşan maksimum gerilme ile müsaade edilen gerilme arasında aşağıdaki bağıntı şeklinde verilebilir:

$$g(X) = (\sigma_r)_{\max} - \sigma$$

Adım 2: Rasgele değişkenlerin olasılık dağılım fonksiyonlarının belirlenmesi:

Önceki bölümlerde belirtildiği gibi bu tür istatistiksel bilgilerin derlenmesi geçmiş tecrübe ve deneylerden toplanan verilere uygun olasılık dağılım fonksiyonlarının hesaplanması ile olur. Bu örnekte ise bu rasgele değişkenlerin istatistiksel değerleri Tablo 2'de verilmiştir.

Adım 3: Olasılığa dayalı tasarım yöntemlerini kullanarak hata olasılığının belirlenmesi:

Önceki bölümlerde anlatılan yöntemlerde FORM, SORM ve Monte Carlo simülasyonu kullanılarak güvenirlilik analizleri gerçekleştirilmiş ve sonuçlar Tablo 3 ve Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 2: Rasgele değişkenlerin olasılık dağılım fonksiyonları ve değerleri

Rasgele değişkenler	Olasılık dağılım fonksiyon tipi	Aritmetik ortalama	Standart sapma
Poisson Oranı(ν)	Normal	0.30	0.005
Yoğunluk (ρ)	Normal	0.284	0.002
Dış Çap (r_o)	Normal	8	0.02
İç Çap (r_i)	Normal	2	0.01
Müsaade edilen gerilme (σ)	Normal	19600	1000
Diskin hızı (ω)	Uniform	Üst Değer =11000 Alt değer =10000	

Tablo 3: Çeşitli güvenirlilik yöntemlerinden elde edilen sonuçlar

Uygulanan yöntem	β	Hata olasılığı
FORM	1.394	8.16×10^{-2}
SORM	1.532	6.27×10^{-2}
Monte Carlo (1×10^5 örnekleme)	1.522	6.402×10^{-2}

Tablo 4 : FORM ve SORM'dan elde edilen dizayn noktası değerleri

Güvenirlilik metodu	ν	ρ	ω	r_0	r_i	σ
FORM	0.2998	0.2837	10164	7.9978	2.0001	20576.6
SORM	0.2933	0.2836	10141.1	7.9976	2.0001	20673.4

SONUÇ

Olasılığa dayalı tasarım yöntemleri, tasarım mühendisinin problemi daha kapsamlı bir şekilde anlamasına yardımcı yaklaşımlardır. Olasılık değerlendirmesi, mühendislere tasarımdaki riskler hakkında bir fikir vermesinin yanı sıra bunun kadar önemli olan tasarım parametrelerinin hassasiyetlerinin değerlendirmesini de içermektedir. Genel olarak, olasılığa dayalı tasarım yöntemleri daha detaylı analizleri gerekli kıldığından daha gelişmiş ve etkili tasarımlara yol açar. Bunun yanı sıra bu metodu uygularken aşağıda belirtilen hususlar dikkate alınmalıdır:

1. Mühendislik ve istatistik teorisi bilgisi gerekmektedir: olasılığa dayalı tasarım yöntemlerini kullanabilmek için tasarım mühendisinin, olasılık teorisi ve istatistik temellerini bilmesi gerekmektedir. Olasılığa dayalı tasarım yöntemleri karmaşık olduğundan, ileri istatistiki bilgilere sahip olmak avantajlı bir durumdur.
2. Yeterli istatistiksel verinin eksiklikleri: istatistiksel dağılımları tespit edebilmek için çok sayıda veriye ihtiyaç vardır.
3. İlave zaman ve kaynağa ihtiyaç vardır: olasılık modellerini oluşturması ve bu yöntemlerin kullanımı zaman alıcı prosesleri içermektedir. Özellikle zaman alan yapısal analizlerle birleştirildiğinde hesaplama zamanı önemli bir ölçüde artar.
4. Tasarım problemi çok iyi anlaşılmalıdır: olasılığa dayalı tasarım yöntemlerinde emniyet faktörü kullanılmadığından, tasarım mühendisi, hata modellerinin hepsini, ve bütün değişkenleri dikkate aldığından emin olmalıdır.
5. Farklı yaklaşımların mevcudiyeti: önceki bölümlerde verildiği gibi, pek çok farklı olasılığa dayalı tasarım yöntemleri geliştirilmiştir ve bunların aynı probleme uygulamalarında farklı sonuçlar alınabilmektedir.

Bütün bu zorluklara rağmen giriş bölümlerinde de belirtildiği gibi mühendislik tasarımında var olan belirsizlikleri tasarım prosesine ilave ettiğinden, daha güvenilir ve daha ekonomik ürünler elde etmek için olasılığa dayalı tasarım metodu gittikçe artan bir şekilde kullanılmaktadır. Verilen örnekte de görüleceği gibi, tasarım hakkında yalnızca verilen boyutlarda diskin üzerine gelen gerilmeyi taşıyıp taşımadığı değil aynı zamanda kritik boyut değerleri ve hata olasılığı da elde edilebilir. ANSYS gibi kullanım alanı yaygın olan bir paket programa bu metodun ilave edilmesi, olasılığa dayalı analizin önümüzdeki yıllarda daha sıklıkla kullanılacağına bir işaret olabilir.

THE USE OF PROBABİLİSTİC DESİGN METHODS AND ITS APPLİCATİONS İN ENGİNEERİNG DESİGN

In this study, probabilistic design approach, which has recently been started to use in engineering design process, was applied to an engineering design problem. Firstly, the comparison of deterministic design and probabilistic design were given. Secondly, stress-strength approach was summarized, and FOSM method was explored in detail. FORM and SORM approaches developed to overcome the deficiencies of FOSM were given. Then, a different approach based on Monte Carlo Simulation was explained. Finally an example was chosen to show the application of probabilistic design to an engineering problem.

Keywords: Engineering design, probabilistic design, reliability methods

KAYNAKÇA

1. Taylor, D. L., *Computer-Aided Design*, Addison – Wesley, New York 1992.
2. ABET, The Accreditation Board for Engineering and Technology, http://www.abet.org, 2000.
3. Caltech, "Uncertainty Management In Commercial Aircraft Design",
4. http://www.cds.caltech.edu/conferences/1997/vecs/tutorial/Examples/Cases/777.htm, 1997.
5. SWRI, *South West Research Institute*,
6. http://www.swri.org/3pubs/papers/d06/probmech.htm, 2000.
7. Stark, H., *Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers*, Prentice-Hall, London, 1986.
8. Mendenhall, W., Scheaffer, R. L. ve Wackerly, D. D., Mathematical Statistics with Applications, Duxbury Press, USA, 1981.
9. Ditlevsen, O. ve Madsen, H. O., *Structural Reliability Methods*, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
10. Hasofer, M. ve Lind, N.C., Exact and Invariant Second-Moment Code Format, *Journal of Engineering Mechanics Divisions*, ASCE, 100 (1974) EM1, 111-121.
11. Breitung, K., Asymptotic Approximations for Multi-normal Integrals, *Journal of Engineering Mechanics*, 110 (1983) 3, 357-366.

12. Der Kiureghian, A., Lin, H. Z. ve Hwang, S. J., Second-Order Reliability Approximations, *Journal of Engineering Mechanics*, 113 (1987) 8, 1208-1225.
13. Fiessler, B., H., Neumann, ve Rackwitz, R., Quadratic Limit States in Structural Reliability, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 105 (1979) EM4, 661-676.
14. Zhao, Y.G. ve Ono, T., An Empirical Reliability Index Based on SORM, *Proceedings of the 7th International Conference on Structural Reliability Analysis*, Kyoto, Japan, 1997.
15. Sundararajan, C., *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*, Chapman & Hall, London, 1994.
16. Tvedt, L., Second-Order Reliability by an Exact Integral, *Proceedings of 2nd IFIP Working Conference on Reliability and Optimisation on Structural Systems*, P. Thoft- Chistensen (ed.), New York: Springer-Verlag, 337-384, 1988.
17. Koyluoglu, H., ve Nielsen, S. R. K., New Approximations for SORM Integrals, *Structural Safety*, 13 (1994), 235-246.
18. Zhao, Y.G. ve Ono, T., New Approximation for SORM: Part 1, *Journal of Engineering Mechanics*, 125 (1999) 1, 79-85.
19. Rosenblatt, M., Remarks on Multivariate Transformation, *Annals of Mathematical Statistics*, 23 (1969) 3, 470-472.
20. Ang, A. H. S ve Tang, W. H., *Probability Concepts in Engineering Planning and Design II*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
21. Melcher, R. E. , Structural Reliability Analysis and Prediction, Ellis Horword, London, 1987.
22. Bucher, C. G., Adaptive Sampling-an Iterative Fast Monte Carlo Procedure, *Structural Safety*, 5 (1988) 2, 119-126.
23. Ayyub, B M. ve Lai, K.L. Selective Sampling in Simulation-Based Reliability Assessment, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 46 (1991) 2, 229-249.
24. Ugural, A.C. ve Fenster, S.K., Advanced Strength and Applied Elasticity, The SI Version, Edward Arnold, London, 1981.