Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Iğdır University Journal of the Institute of Science and Technology

Keyfi Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar İçin S-İterasyon Metodunun Yakınsaklığı*

İbrahim KARAHAN[1]

ÖZET Bu makalede keyfi bir aralıkta tanımlanan sürekli fonksiyonların sabit noktalarını bulmak için S-iterasyonu ele alınmıştır. Bu iterasyonun yakınsaması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Ayrıca sürekli ve azalmayan dönüşümler için S-iterasyonunun diğer bazı itersayonlardan daha hızlı yakınsadığı ispatlanmıştır. S iterasyonu için verilen Lemma 3 ün ispat yönteminin Mann gibi diğer iterasyonlar için verilen ispat yöntemlerinden farklı olduğuna dikkat edilmelidir.

Anahtar Kelimeler: Hesaplama maliyeti, sabit nokta, sürekli fonksiyon, yakınsaklık teoremleri, yakınsama oranı

Convergence of S-Iteration Method for Continuous Functions on An Arbitrary Interval

ABSTRACT: In this paper, we consider S-iteration to find fixed points of continuous mappings on an arbitrary interval. We give some necessary and sufficient conditions for the convergence of this iteration. Also, we proved that the rate of convergence of S-iteration is better than some other iterations for continuous and nondecreasing mappings. It is also noted that the method of proof of Lemma 3 using S-iteration is slightly different from that using the iteration schemes like Mann.

Keywords: Computational cost, continuous function, convergence theorems, fixed point, rate of convergence

Cilt/*Volume*: 8, Sayı/*Issue*: 2, Sayfa/*pp*: 201-213, 2018
ISSN: 2146-0574, e-ISSN: 2536-4618 DOI: 10.21597/jist.428379

[1] İbrahim KARAHAN (0000-0001-6191-7515), Erzurum Technical University, Faculty of Science, Mathematics, Erzurum, Türkiye
Sorumlu yazar/Corresponding Author: İbrahim KARAHAN, ibrahimkarahan@erzurum.edu.tr

[*] Bu çalışma 12-14 Eylül 2013 tarihinde İstanbul-Türkiye'de düzenlenen Algerian-Turkish International Days on Mathematics kongresinde sunulmuş ve kongre özet kitabında yayınlanmıştır.

Geliş tarihi / *Received:* 25.12.2017
Kabul tarihi / *Accepted:* 21.02.2018

GİRİŞ

Bu makale boyunca E nin reel eksen üzerinde kapalı bir aralık ve $g: E \to E$ nin sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edeceğiz. g fonksiyonunun sabit noktaları kümesini $Fix(g)$ ile gösterelim. Yani $Fix(g) = \{x \in E: g(x) = x\}$ dir. E nin sınırlı olması durumunda g nin en az bir sabit noktaya sahip olduğu bilinmektedir.

İterasyon metotları lineer olmayan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için çok kullanılan popüler metotlardır. Bu tarz iterasyon metotlarından biri 1953 yılında Mann (Mann, 1953) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu metot bir çok yazar tarafından bir çok çalışmada kullanılmıştır. Normal Mann iterasyonu, $x_1 \in \mathbb{R}$ keyfi bir başlangıç noktası, g bir reel fonksiyon ve $\{\alpha_n\}$ de $[0,1]$ aralığında reel bir dizi olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n g(x_n) \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan bir $\{x_n\}$ dizisi üretir. Diğer bir metot 1974 yılında Ishikawa (Ishakawa, 1974) tarafından $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1]$ aralığında reel diziler olmak üzere her $n \geq 1$ için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n g(y_n) \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n g(x_n) \end{cases} \tag{1.2}$$

Bu şekilde tanımlanan Ishakawa iterasyonunun Mann iterasyonunun genelleştirilmiş hali olduğu açıktır. 1974 yılında Rhoades (Rhoades,1974; Rhoades, 1976) kapalı birim aralıkta tanımlı sürekli ve azalmayan dönüşüm sınıfları için Mann iterasyonunun kuvvetli yakınsaklığını ispatlamış ve bu tip dönüşümler için Ishakawa iterasyonunun Mann iterasyonundan daha hızlı olduğunu göstermiştir.

MATERYAL VE YÖNTEM

Yukarıda bahsedilen metotların ardından 1991 yılında Borwein and Borwein (Borwein and Borwein, 1991) ve 2006 yılında Qing and Qihou (Qing and Qihou, 2006) keyfi aralıkta tanımlı sürekli dönüşümler için sırasıyla Mann ve Ishakawa iterasyonları için bazı yakınsama teoremleri vermişlerdir.

2000 yılında Noor (Noor, 2000) Ishakawa ve dolayısıyla da Mann iterasyonunu genelleştirerek aşağıdaki iterasyonu tanımlamıştır:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n g(y_n) \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n g(z_n) \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n g(x_n). \end{cases} \tag{1.3}$$

Buradaki kontrol dizilerinin özel seçimleriyle Ishakawa ve Mann iterasyonlarının elde edilebileceği aşikardır. Gerçekten, eğer her $n \geq 1$ için $\gamma_n = 0$ alınırsa Noor iterasyonu Ishakawa iterasyonuna ve $\gamma_n = 0$ ile birlikte $\beta_n = 0$ alınırsa Mann iterasyonuna indirgenir. Son yıllarda, Phuengrattana and Suantai (Phuengrattana and Suantai, 2011), (1.3) ile üretilen $\{x_n\}$ dizisinin keyfi aralıkta tanımlı sürekli g fonksiyonunun sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını ispatlamıştır. Ardından aşağıdaki SP-iterasyonunu vermişlerdir:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n g(y_n) \\ y_n = (1-\beta_n)z_n + \beta_n g(z_n) \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n g(x_n). \end{cases} \tag{1.4}$$

g, keyfi $E \subset \mathbb{R}$ altkümesinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere bazı kabuller altında (1.4) ile üretilen $\{x_n\}$ dizisinin g nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını göstermişlerdir. Ayrıca Ishikawa, Mann, Noor ve SP-iterasyonlarının yakınsama hızlarını karşılaştırarak SP-iterasyonunun diğerlerinden daha iyi (hızlı) olduğunu ispatlamışlardır.

E reel eksen üzerinde keyfi bir aralık (sınırsız olabilir) olmak üzere g, E üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. 2007 de Agarwal et al. (Agarwal et al., 2007) S-iterasyonu olarak adlandırılan aşağıdaki metotu tanımlamışlardır:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)g(x_n) + \alpha_n g(y_n) \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n g(x_n). \end{cases} \tag{1.5}$$

Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1]$ aralığında tanımlı reel dizilerdir. Her $n \in \mathbb{N}$ için eğer $\alpha_n = 1$ olarak alınırsa S-iterasyonu aşağıdaki Picard-Mann hibrit (PMH) iterasyonuna (bak (Sahu, 2011; Khan, 2013)) indirgenir:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(y_n) \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n g(x_n). \end{cases} \tag{1.6}$$

Karahan ve Özdemir (2013) tarafından yapılan araştırmada PMH-iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin keyfi aralıkta tanımlı sürekli g fonksiyounun sabit noktasına yakınsadığını ispatlamışlar ve aynı hesaplama maaliyeti altında (1.6) iterasyonunun diğerleriyle yakınsama hızlarını karşılaştırmışlardır.

Bu makalenin amacı, S-iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin reel eksen üzerinde ki keyfi E aralığı üzerinde tanımlı bir g fonksiyonunun sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını ispatlamak ve aynı hesaplama maliyeti altında (1.5) iterasyonunun diğer iterasyonlarla yakınsama hızlarını karşılaştırmaktır.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde S-iterasyonunun keyfi bir aralık (sınırsız olabilir) üzerinde tanımlı sürekli bir g fonksiyonunun sabit noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şartları ifade edilerek bu iterasyonun diğer bazı iterasyonlardan daha hızlı yakınsadığı ispatlanacaktır.

Lemma 1: E reel eksen üzerinde tanımlı keyfi bir aralık (sınırsız olabilir) olmak üzere g, bu aralık üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $x_1 \in E$ keyfi başlangıç noktası, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve $lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ şartlarını sağlayan $[0,1)$ aralığında reel diziler olmak üzere $\{x_n\}$, (1.5) tarafından üretilen dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi bir a noktasına kuvvetli yakınsarsa $a \in Fix(g)$ dir.

İspat: Tersine olarak $g(a) \neq a$ olduğunu kabul edelim. $g(x)$ sürekli ve $x_n \to a$ olduğundan $g(x_n)$ sınırlıdır. $y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n g(x_n)$ ve $\beta_n \to 0$ olduğu kullanılırsa $y_n \to a$ olduğu elde edilir. $p_k = g(y_k) - x_k$ ve $q_k = g(x_k) - x_k$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty}(g(y_k) - x_k) = g(a) - a = p \neq 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} q_k = \lim_{k\to\infty}(g(x_k) - x_k) = g(a) - a = q \neq 0.$$

dır. $x_{n+1} = (1-\alpha_n)g(x_n) + \alpha_n g(y_n)$ olduğu kullanılırsa

$$x_{n+1} - x_n = (1-\alpha_n)g(x_n) + \alpha_n g(y_n) - x_n$$

$$= (1-\alpha_n)(g(x_n)-x_n)+\alpha_n(g(y_n)-x_n)$$

eşitliği elde edilir ki bu da

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_k)(g(x_k)-x_k)+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(g(y_k)-x_k)$$

$$= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\alpha_k)q_k+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k p_k$$

olmasını gerektirir. $p_k \to p \neq 0$, $q_k \to q \neq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ olması $\{x_n\}$ nin ıraksak olmasını gerektirir. Bu ise $x_n \to a$ olması ile çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış, yani $g(a) = a$ dır.

Lemma 2: E reel eksen üzerinde tanımlı keyfi bir aralık (sınırsız olabilir) olmak üzere g, bu aralık üzerinde tanımlı sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olsun. $x_1 \in E$ keyfi başlangıç noktası, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1)$ aralığında reel diziler olmak üzere $\{x_n\}$, (1.5) tarafından üretilen dizi olsun.Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

(i) $g(x_1) < x_1$ ise her $n \geq 1$ için $g(x_n) \leq x_n$ ve $\{x_n\}$ artmayandır.

(ii) $g(x_1) > x_1$ ise her $n \geq 1$ için $g(x_n) \geq x_n$ ve $\{x_n\}$ azalmayandır.

İspat: **(i)** $g(x_1) < x_1$ olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ nin tanımından $g(x_1) < y_1 \leq x_1$ olduğu elde edilir. g azalmayan olduğundan $g(y_1) \leq g(x_1) < y_1 \leq x_1$ olur. Bu ise $g(y_1) \leq x_2 \leq g(x_1) < y_1 \leq x_1$ olmasını gerektirir. Tekrar g nin azalmayan olduğu kullanılırsa $g(x_2) \leq g(y_1) \leq x_2$ bulunur. Böylece $g(x_2) \leq x_2$ dir. $g(x_k) \leq x_k$ olduğunu kabul edelim. Buradan $g(x_k) < y_k \leq x_k$ olduğu çıkar. g azalmayan olduğundan $g(y_k) \leq g(x_k) < y_k \leq x_k$ elde edilir. $\{x_n\}$ nin tanımından $g(y_k) \leq x_{k+1} \leq g(x_k) < y_k \leq x_k$ bulunur. Bu ise $g(x_{k+1}) \leq g(y_k) \leq x_{k+1}$ olmasını gerektirir. Buradan $g(x_{k+1}) \leq x_{k+1}$ bulunmuş olur. Tümevarımdan her $n \geq 1$ için $g(x_n) \leq x_n$ olduğu elde edilir. Buradan her $n \geq 1$ için $x_{n+1} \leq x_n$ dir. Yani $\{x_n\}$ dizisi artmayandır.

(ii) İlk şıkkın ispatına benzer şekilde gösterilebileceğinden ispatı geçiyoruz.

Aşağıda S-iterasyonu için verilen Lemma 3 ün ispat tekniği diğer yöntemler için verilen ispat yöntemlerinden oldukça farklıdır.

Lemma 3: E reel eksen üzerinde tanımlı keyfi bir aralık (sınırsız olabilir) olmak üzere g, bu aralık üzerinde tanımlı sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olsun. $x_1 \in E$ keyfi başlangıç noktası, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1)$ aralığında Lemma 1 deki şartları sağlayan reel diziler olmak üzere $\{x_n\}$, (1.5) tarafından üretilen dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ sınırlı ise yakınsaktır.

İspat: $\{x_n\}$ nin yakınsak olmadığını kabul edelim. $\liminf_{n\to\infty} x_n = a$ ve $\limsup_{n\to\infty} x_n = b$ olsun. Öncelikle $a < m < b$ olması durumunda $m \in Fix(g)$ olduğunu göstermeliyiz. Tersine olarak $m \notin Fix(g)$ olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmadan $g(m) - m > 0$ olarak alabiliriz. $g(x)$ sürekli olduğundan

$$|x - m| \leq \delta \text{ iken } g(x) - x > 0 \tag{2.1}$$

olacak şekilde $\delta \in (0, b - a)$ vardır. $\{x_n\}$ sınırlı bir dizi olduğundan kapalı sınırlı bir aralığa aittir. $g(x)$ nin sürekliliğinden $g(x_n)$ sınırlıdır. $y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n g(x_n)$ eşitliğinden $\{y_n\}$ ve dolayısıyla da $g(y_n)$ sınırlıdır. $y_n - x_n = \beta_n(g(x_n) - x_n)$ ve $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ eşitlikleri kullanılırsa $n \to \infty$ için $y_n - x_n \to 0$ olduğu elde edilir. Diğer taraftan, $g(x_1)$ ve x_1 reel sayıları için (a) $g(x_1) > x_1$ (b) $g(x_1) < x_1$ ve (c) $g(x_1) = x_1$ şeklinde üç durum olduğu aşikardır.

(a) Lemma 2 den $g(x_1) > x_1$ iken her $n \geq 1$ için $g(x_n) \geq x_n$ ve buradan

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - (1 - \alpha_n)g(x_n) - \alpha_n g(y_n) \\ &= x_n - g(x_n) + \alpha_n\big(g(x_n) - g(y_n)\big) \\ &\leq \alpha_n\big(g(x_n) - g(y_n)\big). \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n+1}) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde (b) durumu için

$$x_{n+1} - x_n = (1-\alpha_n)g(x_n) + \alpha_n g(y_n) - x_n \leq \alpha_n\big(g(y_n) - g(x_n)\big)$$

elde edilir. Tekrar $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ olduğu kullanılırsa istenilen sonuç çıkar.

(c) durumu için $m \notin Fix(g)$ olduğu kabul edildiğinden $a < m < b$ eşitsizliğini sağlayan m reel sayıları için ya $x_1 < a$ veya $x_1 > b$ dir. Genelliği bozmadan $x_1 < a$ kabul edilebilir. $g(x_1) = x_1$ olduğundan (1.5) iterasyonu $x_2 = x_1$ olmasını ve tümevarımdan her $n \geq 1$ için $x_{n+1} = x_n$ olmasını gerektirir ki tüm bunlardan

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla her üç durum için,

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$$

dır. Böylece her $n > N$ için

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{\delta}{2}, |y_n - x_n| < \frac{\delta}{2} \tag{2.2}$$

olacak şekilde pozitif N tamsayısı vardır. $\limsup_{n\to\infty}x_n = b > m$ olduğundan $x_{n_{k_1}} > m$ olacak şekilde $k_1 > N$ sayısı vardır. $n_{k_1} = k$ olsun. Bu durumda $x_k > m$ dir. x_k için sadece aşağıdaki iki durum söz konusudur:

(i) $x_k > m + \frac{\delta}{2}$ ise (2.2) den $x_{k+1} > x_k - \frac{\delta}{2} \geq m$ ve dolayısıyla $x_{k+1} > m$ dir.

(ii) $m < x_k < m + \frac{\delta}{2}$ ise (2.2) den $m - \frac{\delta}{2} < y_k < m + \delta$ ve dolaysıyla

$$|x_k - m| < \frac{\delta}{2} < \delta, |y_k - m| < \delta$$

elde edilir. (2.1) den

$$g(x_k) - x_k > 0, g(y_k) - y_k > 0 \tag{2.3}$$

bulunur. (2.3) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$y_k - x_k = \beta_k[g(x_k) - x_k] \geq 0,$$

ifadesi çıkar. Buradan

$$x_{k+1} - x_k = g(x_k) - x_k + \alpha_k[g(y_k) - g(x_k)]$$

$$= g(x_k) - x_k + \alpha_k[g(y_k) - y_k + y_k - x_k + x_k - g(x_k)]$$

$$= (1 - \alpha_k)(g(x_k) - x_k) + \alpha_k[g(y_k) - y_k + y_k - x_k]$$

$$> 0$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla $x_{k+1} > x_k > m$ bulunmuş olur.

Sonuç olarak (i) ve (ii) şıklarından $x_{k+1} > m$ elde edilir. Benzer şekilde $x_{k+2} > m$, $x_{k+3} > m$,... olur. Böylece her $n > k = n_{k_1}$ için $x_n > m$ dir. Buradan $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \geq m$ elde edilir ki bu durum $a < m$ olması ile çelişir. Böylece kabul yanlış yani $m \in Fix(g)$ dir. Şimdi aşağıdaki iki durumu ele alalım.

(I) $a < x_M < b$ olacak şekilde x_M vardır. Yukarıda ki ispattan $g(x_M) = x_M$ olduğu elde edilir. Buradan

$$y_M = (1 - \beta_M)x_M + \beta_M g(x_M) = x_M,$$

$$x_{M+1} = (1 - \alpha_M)g(x_M) + \alpha_M g(y_M) = g(x_M) = x_M$$

dır. Benzer şekilde $x_M = x_{M+1} = x_{M+2} = \cdots$ ve dolayısıyla da $x_n \to x_M$ olur. Sonuçta $x_M = a$ ve $x_n \to a$ bulunur ki bu bir çelişkidir.

(II) Her n için $x_n \leq a$ veya $x_n \geq b$ dir. $b - a > 0$ ve $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1} - x_n| = 0$ olduğundan her $n > N_0$ için

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{b-a}{2}$$

olacak şekilde N_0 sayısı vardır. Bu durum her $n > N_0$ için $x_n \leq a$ veya $x_n \geq b$ olmasını gerektirir. Eğer her $n > N_0$ için $x_n \leq a$ ise bu durumda $b = \limsup_{n\to\infty} x_n \leq a$ olur. Bu ise $a < b$ olması ile çelişir. Eğer her $n > N_0$ için $x_n \geq b$ ise $a = \liminf_{n\to\infty} x_n \geq b$ elde edilir ki bu da yine $a < b$ olması ile çelişir. Dolayısıyla başlangıçtaki kabul yanlıştır. Böylece $n \to \infty$ için $x_n \to a$ dır.

Teorem 1: E reel eksen üzerinde tanımlı keyfi bir aralık (sınırsız olabilir) olmak üzere g, bu aralık üzerinde tanımlı sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olsun. $x_1 \in E$ keyfi başlangıç noktası, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1)$ aralığında Lemma 1 deki şartları sağlayan reel diziler olmak üzere $\{x_n\}$, (1.5) tarafından üretilen dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin g fonksiyonunun bir sabit noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ nin sınırlı olmasıdır.

İspat: Her yakınsak dizinin sınırlı olduğu bilinmektedir. Şimdi $\{x_n\}$ nin sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda Lemma 1 ve Lemma 3 den $\{x_n\}$ nin g fonksiyonunun bir sabit noktasına yakınsadığı çıkar.

Yakınsama Hızları

Bu bölümde S-iterasyonu ile

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n g(v_n) \\ v_n = (1-\beta_n)u_n + \beta_n g(u_n) \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan iki adım Mann iterasyonunun (MannII) yakınsama hızlarını karşılaştıracağız. Burada açıktır ki S-iterasyonunun hesaplama maliyeti MannII iterasyonun hesaplama maliyetine eşittir.

Aşağıdaki lemmanın ispatı Lemma 2 nin ispatına çok benzer olduğundan ispatsız olarak verilecektir.

Lemma 4: g, reel eksendeki E kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $\{u_n\}$, (3.1) tarafından üretilen dizi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) $g(u_1) < u_1$ ise $\{u_n\}$ artmayan ve her $n \geq 1$ için $g(u_n) < u_n$ dir.

(ii) $g(u_1) > u_1$ ise $\{u_n\}$ azalmayan ve her $n \geq 1$ için $g(u_n) > u_n$ dir.

Lemma 5: g, reel eksendeki E kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olsun. $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$, sırasıyla (1.5) ve (3.1) tarafından üretilen diziler olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $p \in Fix(g)$ ve $x_1 > p$ ise $x_n \geq p$ dir.

(i) $p \in Fix(g)$ ve $x_1 < p$ ise $x_n \leq p$ dir.

3. $p \in Fix(g)$ ve $u_1 > p$ ise $u_n > p$ dir.

4. $p \in Fix(g)$ ve $u_1 < p$ ise $u_n < p$ dir.

İspat: **(i)** $p \in Fix(g)$, $x_1 > p$ ve g azalmayan olduğundan $g(x_1) \geq g(p) = p$ ve dolayısıyla $y_1 > p$ elde edilir. Bu durum $g(y_1) \geq p$ ve bu ise $x_2 \geq p$ olmasını gerektirir. Bu şekilde devam edilirse her $n \geq 1$ için $x_n \geq p$ elde edilir.

(ii) (i) şıkkına benzer şekilde yapılır.

(iii) $p \in Fix(g)$, $u_1 > p$ ve g azalmayan olduundan $g(u_1) \geq g(p) = p$ ve dolayısıyla

$v_1 > p$ dir. Buradan $g(v_1) \geq p$ olur. Böylece $u_2 > p$ elde edilir. $u_k > p$ kabulünden dolayı $g(u_k) \geq p$ bulunur. $\{u_n\}$ nin tanımından $v_k > p$ olduğu çıkar. g nin azalmayan oluşu kullanılarak $g(v_k) \geq p$ elde edilir. Buradan $u_{k+1} > p$ bulunur. Tümevarımdan her $n \geq 1$ için $u_n > p$ elde edilmiş olur.

(iv) (iii) şıkıkının ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 6: g, reel eksendeki E kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olsun. $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$, sırasıyla (1.5) ve (3.1) tarafından üretilen diziler olsun. Bu durumda her $n \geq 1$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $g(u_1) < u_1$ ise $x_n < u_n$,

(ii) $g(u_1) > u_1$ ise $x_n > u_n$ dir.

İspat: **(i)** $g(u_1) < u_1$ olsun. $u_1 = x_1$ olduğundan $g(x_1) < x_1$ dir. (3.1) ve (1.5) kullanılırsa

$$y_1 - v_1 = (1-\beta_1)(x_1 - u_1) + \beta_1\big(g(x_1) - g(u_1)\big) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, Lemma 4 (i) nin ispatından $g(x_1) - v_1 = g(u_1) - v_1 < 0$ olduğu bilinmektedir. Buradan

$$x_2 - u_2 = (1-\alpha_1)(g(x_1) - v_1) + \alpha_1\big(g(y_1) - g(v_1)\big) < 0$$

olur. $x_k < u_k$ eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. g azalmayan olduğundan $g(x_k) \leq g(u_k)$ dır. $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$ dizilerinin tanımı göz önüne alınırsa

$$y_k - v_k = (1-\beta_k)(x_k - u_k) + \beta_k\big(g(x_k) - g(u_k)\big) < 0$$

elde edilir. Tekrar g nin azalmayan olması kullanılırsa $g(y_k) \leq g(v_k)$ çıkar. Ayrıca Lemma 4 ün ispatından $g(u_k) < v_k$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_{k+1} - u_{k+1} &= (1-\alpha_k)(g(x_k) - v_k) + \alpha_k\big(g(y_k) - g(v_k)\big) \\ &= (1-\alpha_k)(g(x_k) - g(u_k) + g(u_k) - v_k) + \alpha_k\big(g(y_k) - g(v_k)\big) \\ &< 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla tümevarımdan her $n \geq 1$ için $x_n < u_n$ olduğu bulunmuş olur.

(ii) Yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılır.

Önerme 1: g, reel eksen üzerindeki kapalı E aralığı üzerinde tanımlı sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olsun. $Fix(g)$ nin boş kümeden farklı ve sınırlı olduğunu kabul edelim. $\{x_n\}$, (1.5) veya (3.1) ile tanımlanan dizi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) $x_1 > \sup\{p \in E: p = g(p)\}$ ve $g(x_1) > x_1$ ise $\{x_n\}$, g nin bir sabit noktasına yakınsamaz.

ii) $x_1 < \inf\{p \in E: p = g(p)\}$ ve $g(x_1) < x_1$ ise $\{x_n\}$, g nin bir sabit noktasına yakınsamaz.

İspat: (i) Lemma 2 (ii) den, $\{x_n\}$ azalmayandır. $x_1 > \sup\{p \in E: p = g(p)\}$ olduğundan $\{x_n\}$ nin g nin bir sabit noktasına yakınsamayacağını görmek kolaydır.

(ii) Benzer şekilde gösterilir.

Teorem 2: g, reel eksen üzerindeki kapalı E aralığı üzerinde tanımlı sürekli ve azalmayan bir fonksiyon olsun. $Fix(g)$ nin boş kümeden farklı ve sınırlı olduğunu kabul edelim . $u_1 = x_1$ olmak üzere $\{u_n\}$ ve $\{x_n\}$ sırasıyla (3.1) ve (1.5) tarafından tanımlanan diziler olsun. Eğer $\{u_n\}$ bir $p \in Fix(g)$ noktasına yakınsarsa bu durumda $\{x_n\}$ de aynı noktaya yakınsar. Üstelik $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ den daha iyidir.

İspat: $L = \inf\{p \in E: p = g(p)\}$ ve $U = \sup\{p \in E: p = g(p)\}$ olsun. $\{u_n\}$ nin bir $p \in Fix(g)$ noktasına yakınsadığını kabul edelim. Burada üç durum söz konusudur.

I. Durum: $U < u_1 = x_1$ olsun. Önerme 1 (i) den $g(x_1) < x_1$ ve $g(u_1) < u_1$ olur. Lemma 6 (i) den her $n \geq 1$ için $x_n < u_n$ ede edilir. $U < x_1$ eşitsizliği ve (1.5) den her $n \geq 1$ için $U \leq x_n$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda $0 \leq x_n - p < u_n - p$ ve dolayısıyla her $n \geq 1$ için

$$|x_n - p| < |u_n - p| \tag{3.2}$$

dır. Bu ise $\{x_n\}$ nin p ye yakınsaması demektir. Üstelik, (3.2) eşitsizliğinden $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ den daha iyidir.

6 (i) den her $n \geq 1$ için $x_n < u_n$ ede edilir. $U < x_1$ eşitsizliği ve (1.5) den her $n \geq 1$ için $U \leq x_n$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda $0 \leq x_n - p < u_n - p$ ve dolayısyla her $n \geq 1$ için

$$|x_n - p| < |u_n - p| \tag{3.2}$$

dır. Bu ise $\{x_n\}$ nin p ye yakınsaması demektir. Üstelik, (3.2) eşitsizliğinden $\{x_n\}$, $\{u_n\}$ den daha iyidir.

II. Durum: $L > u_1 = x_1$ olsun. Önerme 1 (ii) den $g(x_1) > x_1$ ve $g(u_1) > u_1$ dir. Bu ise Lemma 6 (ii) den her $n \geq 1$ için $x_n > u_n$ olmasını gerektirir. $L > x_1$ eşitsizliği ve (1.5) kullanılırsa her $n \geq 1$ için $L \geq x_n$ olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $|x_n - p| < |u_n - p|$ yani $\{x_n\}$ nin p ye yakınsadığı ve $\{u_n\}$ den daha iyi olduğu elde edilmiş olur.

III. Durum: $L \leq x_1 = u_1 \leq U$ olsun. $g(u_1) \neq u_1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $g(u_1) < u_1$ ise Lemma 4 den $\{u_n\}$ artmayan ve limiti p dir. Lemma 5 (i), (iii) ve Lemma 6 (i) den her $n \geq 1$ için $p \leq x_n < u_n$ elde edilir. Dolayısıyla her $n \geq 1$ için $|x_n - p| < |u_n - p|$ olur. Buradan $\{x_n\}$ nin p ye yakınsak ve $\{u_n\}$ den daha iyi olduğu çıkar. Tersine $g(u_1) > u_1$ ise bu durumda Lemma 4 den $\{u_n\}$ azalmayan ve limiti p dir. Lemma 5 (ii), (iv) ve Lemma 6 (ii) den her $n \geq 1$ için $p \geq x_n > u_n$ olduğu çıkar. Böylece her $n \geq 1$ için $|x_n - p| < |u_n - p|$ yani $\{x_n\}$ dizisi p noktasına yakınsak ve $\{u_n\}$ dizisinden daha iyidir.

Uyarı 1: Teorem 2 ve (Dong et al., 2013) deki Remark 3.3 den S-iterasyonu aynı hesaplama maliyeti altında Mann, Ishikawa, Noor ve SP gibi bazı iterasyonlardan daha iyidir.

Şimdi bu sonucumuzu destekleyen nümerik bir örnek verelim.

Örnek 1: $g: [0, 4] \to [0, 4]$ fonksiyonu $g(x) = \frac{x^2 + 3\sqrt{x} + 3}{7}$ şeklinde tanımlansın. g nin sürekli ve azalmayan olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca $p = 1 \in Fix(g)$ dir. Başlangıç noktası $u_1 = x_1 = 3.5$ ve kontrol dizileri $\alpha_n = \frac{1}{n+2}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2+2}$ olsun. Aşağıdaki tabloda MannII ve S-iterasyonlarının yakınsamaları karşılaştırılmıştır.

Çizelge 1 MannII ve S-iterasyonlarının yakınsama hızları

	MannII	S-iteration		
n	u_n	x_n	$\lvert g(x_n) - x_n \rvert$	$\frac{\lvert x_{n+1} - p \rvert}{\lvert x_n - p \rvert}$
2	3.148302	2.917348	$5.409204E-01$	$7.669393E-01$
3	2.921730	2.355082	$4.764686E-01$	$7.067479E-01$
4	2.764776	1.871623	$3.563099E-01$	$6.432250E-01$
5	2.647063	1.513040	$2.302598E-01$	$5.886031E-01$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	2.307302	1.019414	$9.672947E-03$	$5.032074E-01$
15	2.128444	1.000610	$3.049688E-04$	$5.000489E-01$
20	2.011335	1.000019	$9.549455E-06$	$5.015674E-01$
25	1.926361	1.000001	$2.980232E-07$	$5.000000E-01$

Yukarıdaki tablodan S-iterasyonunun MannII den daha iyi olduğu görülmektedir.

SONUÇ

Yapılan ispatlar neticesinde keyfi aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonlar için tanımlanan S-iterasyonunun uygun kabuller altında fonksiyonun sabit noktasına yakınsadığı, ayrıca bu yakınsamanın aynı hesaplama maliyeti altında diğer bazı temel iterasyonlardan daha hızlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

Agarwal RP, O'Regan D, Sahu DR, 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. J. Nonlinear Convex. Anal., 8(1): 61–79.

Borwein D, Borwein J, 1991. Fixed point iterations for real functions. J. Math. Anal. Appl., 157(1): 112-126.

Dong QL, He S, Liu X, 2013. Rate of convergence of Mann, Ishikawa and Noor iterations for continuous functions on an arbitrary interval. J. Ineq. Appl., 2013.1: doi: 10.1186/1029-242X-2013-269.

Ishikawa S, 1974. Fixed points by a new iteration method. Proc. Amer. Math. Soc., 44: 147-150.

Karahan I, Ozdemir M, 2013. Fixed point problems of Picard-Mann hybrid iterative process for continuous functions on an arbitrary interval. Fixed Point Theory and Appl., 2013:244, doi: 10.1186/1687-1812-2013-244.

Khan SH, 2013. A Picard-Mann hybrid iterative process. Fixed Point Theory and Appl., doi:10.1186/1687-1812-2013-69.

Mann WR, 1953. Mean value methods in iteration. Proc. Amer. Math. Soc., 4: 506–510.

Noor MA, 2000. New approximation schemes for general variational inequalities. J. Math. Anal. Appl., 251:217–229.

Phuengrattana W, Suantai S, 2011. On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval. J. Comput. Appl. Math., 235: 3006-3014

Qing Y, Qihou L, 2006. The necessary and sufficient condition for the convergence of Ishikawa iteration on an arbitrary interval. J. Math. Anal. Appl., 323 (2): 1383-1386.

Rhoades BE, 1974. Fixed point iterations using in finite matrices. Trans. Amer. Math. Soc., 196: 161-176.

Rhoades BE, 1976. Comments on two fixed point iteration methods. J. Math. Anal. Appl., 56: 741–750.

Sahu DR, 2011. Applications of S iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems. Fixed Point Theory, 12(1): 187-204.