İnce Kesitli Bir Kanal İçersindeki Akımın İncelenmesi için $2\frac{1}{2}$-Boyutlu Formülasyon

Gülşen Yaman
Yardımcı Doçent Dr.

Mehmet İren
Yardımcı Doçent Dr.

Balıkesir Üniversitesi,
Mühendislik-Mimarlık
Fakültesi
BALIKESİR

İnce kesitli kanallardaki akışkan akımının doğru analiz edilmesi endüstriyel açıdan oldukça önem taşımaktadır. Böyle bir kanal içerisindeki akışkan akımının analizini üç-boyutlu olarak yapmak en doğru sonucu verecektir. Ancak böyle bir modeli üç-boyutlu incelemek genellikle çok karmaşık ve güçtür. Dolayısıyla bu analizin sonuçlarını elde etmek için ihtiyaç duyulan bilgisayar gücü ve zamanı çok pahalı olacaktır. Böyle bir model, bazı kabuller yapılarak mümkün mertebe basitleştirilmelidir ya da iki-boyuta indirgenmelidir. Bu çalışmada, Navier-Stokes denklemleri üç-boyutlu yerine üçüncü boyut olan z-doğrultusunda kanalın h kalınlığı boyunca entegrali alınarak $2\frac{1}{2}$*- boyuta indirgenerek yeniden düzenlenmiştir. Bu, hesaplamada belirli bir tasarrufu sağlar, örneğin [u,v,w] gibi uzaysal hız bileşenlerinden biri indirgenerek* $[\overline{u},\overline{v}]$ *şeklinde düzlemsel ortalama hızlara dönüşür. Bu düzenlemede parabolik ve düz olmak üzere iki farklı hız profili kullanılarak iki değişik formülasyon elde edilmiştir.*

Anahtar Kelimeler: İnce Kesitli Kanal, Navier-Stokes Denklemi, $2\frac{1}{2}$*-Boyut.*

GİRİŞ

İnce kesitli kanallarda akışkanların bilgisayar ortamında analizi ve bunların uygulaması endüstriyel açıdan oldukça önemlidir. Endüstride dökümle üretilen birçok parça ince kesitli geometriye sahip olduğundan üretimleri daha fazla hassasiyet ve teknoloji gerektirir. Örneğin, güncel modern teknolojik gelişme, üretim masraflarını azaltmaya, malzeme kullanımını optimize etmeye yönelmiştir. Bu nedenle otomobil sanayiindeki birçok parçanın (silindir kapakları, bloklar, manifoldlar, yağ karteri vb.) kalınlıkları 2-6 mm'ye kadar düşürülmüş ve bu şekilde daha ince kesitli parça tasarımı yapılarak potansiyel tasarruflar sağlanmıştır [1,2]. Çalışmanın izleyen bölümlerinde böyle bir çalışma için gerekli olan denklemlerin türetilmesi ve incelemesi yer almaktadır.

Bir boşluk içerisindeki akışkanın hareketini belirlerken, bu akışkanın basınç ve hız dağılımlarından yararlanılır. Basınç ve hız dağılımları kütlenin ve momentumun korunumu kanunlarına göre kurulmakta ve buradaki hız ve basınç değişkenleri basit değişkenler olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca bunlar literatürlerde akışkan akımı modellerini temsil etmek için sıkça kullanılmaktadır [3-10].

Birçok kaynakta [3-6] Navier-Stokes denklemleri olarak bilinen momentum denklemleri, süreklilik denklemleriyle birlikte basit değişkenleri belirlemekte kullanılmışlardır. Basit değişkenlere ait formülasyonun kullanılmasının bir avantajı hem laminer hem de türbülanslı akımlarda rahatlıkla kullanılabilir olmasıdır [11-14].

Süreklilik denklemi, kütlenin korunumu esasına dayalı olarak türetilmiş olup sıkıştırılamayan bir akışkan için bu denklem,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad (1)$$

şeklindir. Burada $\mathbf{u} = [u, v, w]$ hız vektörüdür.

Sıkıştırılamayan Newtoniyen bir akım için Navier-Stokes denkleminin genel diferansiyel eşitliğini vektörel biçimde,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot \sigma + \rho\, \mathbf{g} \qquad (2)$$

yazmak mümkündür. Burada t zamanı, ρ yoğunluğu, g ağırlık kuvveti terimlerini yani yerçekimi ve elektromanyetik kuvvetleri temsil eder. σ gerilme tensörü olup, bütün normal ve kayma gerilmesi bileşenlerinden oluşur. Gerilme tensörü σ,

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau \tag{3}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada p, τ ve $\mathbf{I}$ sırası ile termodinamik basınç, viskoz gerilme tensörü ve özdeşlik tensörüdür. Buna göre dinamik viskozite μ'nün ilavesiyle Newtoniyen bir akışkanın gerilme tensörü,

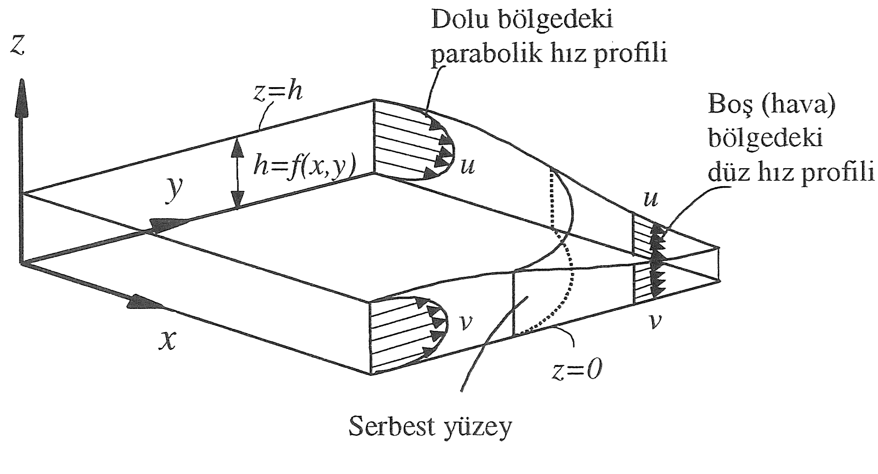
$$\tau = \mu\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right] \tag{4}$$

şeklinde tanımlanır.

Akım problemlerinin çözümünde genellikle iki tip sınır şartı kullanılmaktadır. Bunlar kapalı bir sınır boyunca tanımlanabilen Neumann (doğal) ve Dirichlet (zorunlu) sınır şartlarıdır. Dirichlet sınır şartı, sınırlar üzerinde belirli noktalarda hızların tanımlanmasından ibarettir. Neumann şartı da sınırlar boyunca tanımlanan gerilme bileşenlerini veya çekmeleri (tractions) içerir.

DENKLEMLERİN TÜRETİLMESİ

İnce kesitli bir boşluktaki laminer akım için, genellikle kalınlık doğrultusunda büyük boyutlarda bir akım gerçekleşmez. Dolayısıyla düzlemsel doğrultuda hız profilleri ya parabolik ya da düz bir dağılım şeklinde gerçekleşir. Parabolik hız dağılımının oluştuğu bir durum, çok büyük ve duran iki paralel levha arasındaki laminer bir akım gibi ele alınarak incelenebilir. Böyle bir dağılımda boşluğun alt ve üst yüzeylerinde kayma şartı söz konusu değildir. Düz hız profilinin ele alındığı durum için ise alt ve üst yüzeylerde kaymaya izin verilir. Örnek vermek gerekirse yüksek viskoziteli bir akışkan, yüzeylerde yapışmaya sebep olacağından parabolik bir hız profili oluşumuna sebep olacaktır. Hava gibi düşük viskoziteli bir akışkan ise yüzeylerdeki kaymadan dolayı düz bir hız profili oluşturacaktır. Şekil 1'de böyle bir akıma ait her iki hız profilleri görülebilir.



Şekil 1. İnce kesitli bir kanal içersindeki akım

Bu çalışmada sunulan formülasyon, dar bir kanal içersindeki Poiseuille akımına [14] benzetilerek hız profilinin analizi üzerine kurulmuştur. Ele alınan akım viskoz, sıkıştırılamayan ve Newtoniyen bir akımdır. Kanalın alt ve üst yüzeyleri arasındaki mesafe h olup x veya y 'ye bağlı olarak değişmektedir. Kalınlık doğrultusunda bir akım olmadığı (w=0) gibi basınç gradyenti de yoktur. Alt ve üst yüzeylerde kayma şartının olmadığı kabul edilerek akışkanın boşluk içersindeki hız profili parabolik dağılım şeklinde verilebilir [15]. Bu hızın ortalama değer olarak ifadesi,

$$\mathbf{u}(z) = 6\bar{\mathbf{u}}\left[\left(\frac{z}{h}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right] \tag{5}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{u} = [u, v, w]$ gerçek hız vektörü, $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}, \bar{v}, 0]$ ortalama hız vektörüdür. h akışkanın hareket ettiği boşluğun kalınlığı olup $h=f(x,y)$ şeklindedir. Alt ve üst yüzeylerde kaymaya izin verilen düz hız profili için hız ifadesi basitçe,

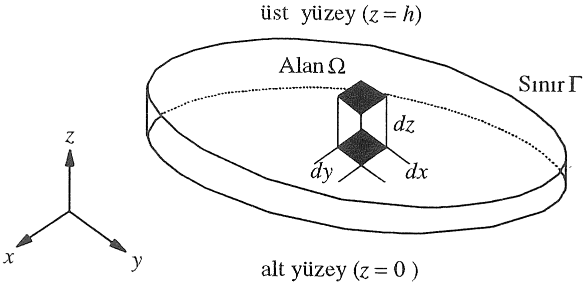
$$\mathbf{u}(z) = \bar{\mathbf{u}} \tag{6}$$

şeklinde yazılabilir. Burada temel denklemler olan süreklilik denklemi ve Navier-Stokes denklemi z-doğrultusunda h kalınlığı boyunca integre edilecektir [16]. Bu da kalınlığın ilave edildiği formülasyon olarak isimlendirilecektir.

Fomülasyonun oluşturulmasında başlangıç olarak hiçbir terim ihmal edilmemiştir. Ancak konuya yönelik seçilen örneklerle ilgili olarak kararlı hal koşullarında zamana bağlı terimler ihmal edilebilmektedir. Farklı uygulamalarda zamana bağlı terimler ve ilave denklemler (serbest yüzeyin takibi için kullanılan denklemler) kaynak [17]'de dikkate alınmaktadır.

Kütlenin Korunumu

Şekil 2 de görüldüğü gibi $dxdydz$ şeklinde sonsuz küçük bir akışkan elemanı göz önüne alınsın.



Şekil 2. İnce kesitli boşluk içersindeki sonsuz küçük bir eleman

Bir elemandaki kütlenin korunumu prensibini kalınlık doğrultusundaki hız bileşenini $w = 0$ alarak,

$$\left[\rho u+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dx-\rho u\right]dy$$

$$+\left[\rho v+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dy-\rho v\right]dx=-\frac{\partial}{\partial t}\rho dxdy \qquad (7)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bu ifade sadeleştirildikten sonra z-yönü boyunca integre edilirse (ρ yoğunluğu z-doğrultusu boyunca sabit),

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^h(\rho dz)\right]dxdy+\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h(\rho u)dz\right]dxdy$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial y}\int_0^h(\rho v)dz\right]dxdy=0 \qquad (8)$$

şeklinde ifade edilir. Tablo 1'de hız terimleri için kalınlığın integre edildiği tüm ifadeler listelenmiştir. Buna göre bu ifadenin her iki tarafı $dxdy$ alanına bölündüğünde,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho h\bar{u})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho h\bar{v})=0 \qquad (9)$$

Tablo 1. Çeşitli hız ifadelerinin integralleri

İntegral İfadesi	*Parabolik hız profili* (5)	*Düz hız profili* (6)
$\int_0^h \mathbf{u}dz$	$h\bar{\mathbf{u}}$	$h\bar{\mathbf{u}}$
$\int_0^h \nabla\cdot\mathbf{u}dz$	$\nabla\cdot(h\bar{\mathbf{u}})$	$\nabla\cdot(h\bar{\mathbf{u}})$
$\int_0^h \nabla\mathbf{u}dz$	$\nabla(h\bar{\mathbf{u}})$	$\nabla(h\bar{\mathbf{u}})$
$\int_0^h \mathbf{uu}dz$	$\frac{6}{5}h\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}$	$h\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}$
$\int_0^h (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}dz$	$\frac{6}{5}h(\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\bar{\mathbf{u}}$	$h(\bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\bar{\mathbf{u}}$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin vektörel formu,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\nabla\cdot(\rho h\bar{\mathbf{u}})=0 \qquad (10)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade iki tip hız profili için de aynı olup kalınlığın ilave edildiği süreklilik denklemi olarak tanımlanabilir.

Sıkıştırılamaz akım için zamana bağlı türev ifadesi ile yoğunluğun yere ve zamana göre değişimi ihmal edilebilir. Buna göre kalınlığın ilave edildiği süreklilik denklemi aşağıdaki ifadeye dönüşür.

$$\nabla\cdot h\bar{\mathbf{u}}=0 \qquad (11)$$

Momentumun Korunumu

Newton'un ikinci hareket kanunu temel alınarak momentumun korunumu şu şekilde tarif edilebilir: Bir V hacmine etkiyen F dış kuvvetler toplamı, hacim yüzeyi S boyunca akan net lineer momentum miktarı ile hacim içersindeki lineer momentumun zamana göre değişim miktarının toplamına eşittir. Buna göre momentumun korunumu,

$$\sum \mathbf{F} = \oiint_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \mathbf{u} dV \qquad (12)$$

şeklinde ifade edilir. (12) eşitliğindeki her bir terim aşağıda ayrı ayrı açıklanmıştır.

a) Dış Kuvvetlerin Toplamı

Dış kuvvetler toplamını ağırlık ve yüzey kuvvetleri olmak üzere iki farklı kuvvetin toplamları şeklinde ele almak mümkündür. Buna göre bu toplam,

$$\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_\sigma + \sum \mathbf{F}_b \qquad (13)$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{F}_\sigma$ normal ve kayma gerilmelerinden dolayı etki eden yüzeysel dış kuvvetler, $\mathbf{F}_b$ ağırlık kuvvetleridir.

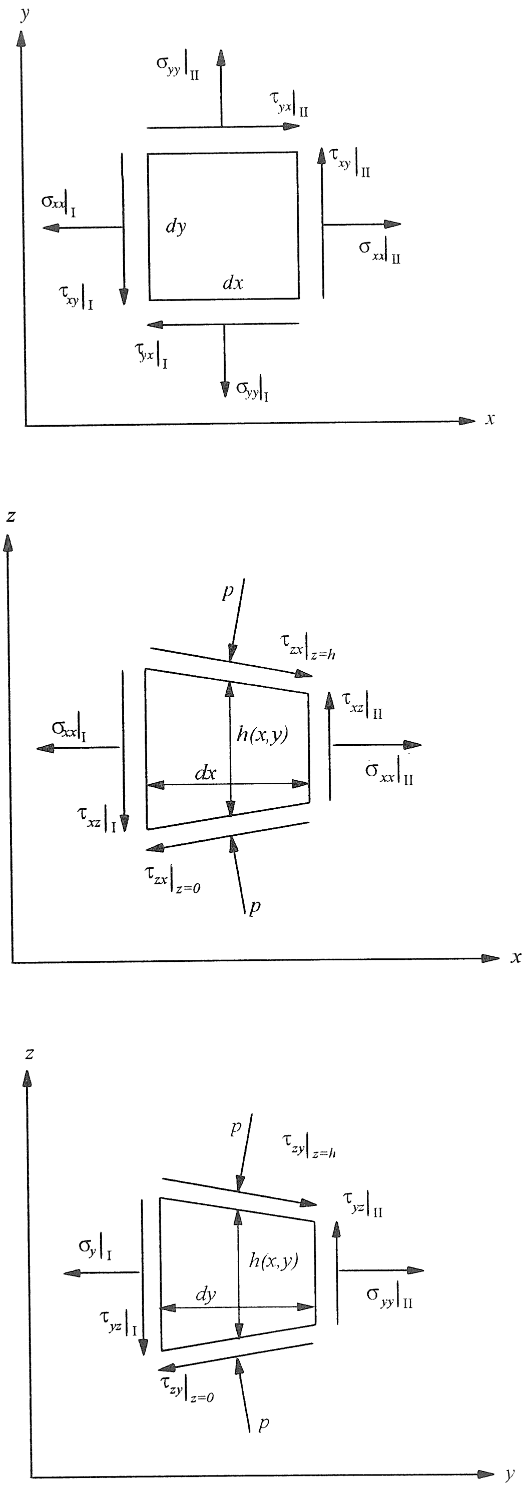
Şekil 3'e göre x-doğrultusundaki kuvvetlerin toplamı şöyle yazılabilir:

$$\sum F_x = \left[\sigma_{xx}\big|_{II} - \sigma_{xx}\big|_{I}\right]dydz + \left[\tau_{yx}\big|_{II} - \tau_{yx}\big|_{I}\right]dxdz + \left[\tau_{zx}\big|_{II} - \tau_{zx}\big|_{I}\right]dxdy + p\,dydz + g_x\rho\,dxdydz \qquad (14)$$

Bu ifade daha geniş olarak tekrar yazılacak olursa,

$$\sum F_x = \left[\sigma_{xx} + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx\right) - \sigma_{xx}\right]dydz + \left[\tau_{yx} + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right) - \tau_{yx}\right]dxdz + \left[\tau_{zx} + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right) - \tau_{zx}\right]dxdy + pdydz + g_x\rho\,dxdydz \qquad (15)$$

şeklinde bir eşitlik elde edilir. Burada g_x yerçekimi ivmesinin x-doğrultusundaki bileşenidir. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak ve enine akımın olmadığı (w=0) kabul edilerek Newtoniyen bir akım için σ gerilme tensörü Şekil 3'de görüldüğü gibi,



Şekil 3. Sonsuz küçük bir elemana etki eden kuvvetler

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\frac{\partial u}{\partial z} \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & -p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & \mu\frac{\partial v}{\partial z} \\ \mu\frac{\partial u}{\partial z} & \mu\frac{\partial v}{\partial z} & -p \end{bmatrix} \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir. (16) denklemindeki gerilme değerleri (15) eşitliğinde yerine yazılarak her bir terimin h kalınlığı boyunca integrali alınır. Daha sonra sonuç $dxdy$ alanına bölünerek eleman boyutları sıfıra yaklaştırılır. Elde edilen ifade,

$$\lim_{dx,dy\to 0}\frac{\sum F_x}{dxdy}=\int_0^h\frac{\partial}{\partial x}\left(-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)dz$$
$$+\int_0^h\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dz$$
$$+\int_0^h\frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz+p\int_0^h\frac{\partial v}{\partial x}dz+\int_0^h g_x\rho dxdydz \quad (17)$$

şeklini alır. Tablo 1 deki integral ifadelerinin kullanılmasıyla,

$$\lim_{dx,dy\to 0}\frac{\sum F_x}{dxdy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-hp+2\mu\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u})\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}(h\bar{u})+\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{v})\right)\right)-12\mu\frac{\bar{u}}{h}$$
$$+\rho hg_x+p\frac{\partial h}{\partial x} \quad (18)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde y-doğrultusundaki dış kuvvetler toplamı da,

$$\lim_{dx,dy\to 0}\frac{\sum F_y}{dxdy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}(h\bar{u})+\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{v})\right)\right)+$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-hp+2\mu\frac{\partial}{\partial y}(h\bar{v})\right)-12\mu\frac{\bar{v}}{h}+\rho hg_y+p\frac{\partial h}{\partial y} \quad (19)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca bu eşitlikleri aşağıdaki gibi vektörel formda yazarak daha genel ifade etmek mümkündür.

$$\lim_{dx,dy\to 0}\frac{\sum \mathbf{F}}{dxdy}=-h\nabla p+\nabla\cdot\mu\left[\nabla(h\bar{\mathbf{u}})+(\nabla(h\bar{\mathbf{u}}))^{\mathrm{T}}\right]$$
$$-12\mu\frac{\bar{\mathbf{u}}}{h}+\rho h\mathbf{g} \quad (20)$$

Burada bütün değişkenler aynı anlamları taşımakta olup, p, μ, ve $\mathbf{g}$ sırasıyla termodinamik basınç, dinamik viskozite ve yerçekimi ivmesini tanımlar. Diğer yandan düz hız profili için dış kuvvetlerin limit ifadesi,

$$\lim_{dx,dy\to 0}\frac{\sum \mathbf{F}}{dxdy}=-h\nabla p$$
$$+\nabla\cdot\mu\left[\nabla(h\bar{\mathbf{u}})+(\nabla(h\bar{\mathbf{u}}))^{\mathrm{T}}\right]+\rho h\mathbf{g} \quad (21)$$

eşitliği ile yazılabilir. Burada (20) ve (21) eşitliklerindeki $\nabla\cdot\mu\left[\nabla(h\bar{\mathbf{u}})+(\nabla(h\bar{\mathbf{u}}))^{\mathrm{T}}\right]$ terimini $\nabla\cdot h\bar{\tau}+\nabla\cdot\mu\left[\bar{u}\nabla h+(\bar{u}\nabla h)^{\mathrm{T}}\right]$ şeklinde de yazmak mümkündür.

b) Net Momentum Akısı

Şekil 2 görülen sonsuz küçük eleman için Şekil 4 deki lineer momentum göz önüne alınarak ve kalınlık doğrultusunda akımın olmadığı (w=0) kabul edilerek Şekil 4 de gösterilen eleman boyunca net momentum akısı,

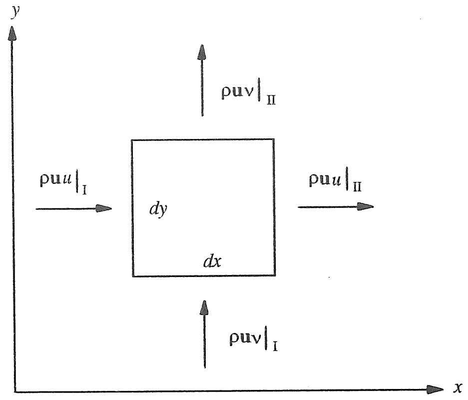
$$\oiint_S \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS=\left[\rho\mathbf{u}u+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\mathbf{u}u)dx-\rho\mathbf{u}u\right]dy$$
$$+\left[\rho v+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\mathbf{u}v)dy-\rho\mathbf{u}v\right]dx \quad (22)$$

şeklindedir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra her bir terimin h kalınlığı boyunca integrali alınırsa,

$$\oiint_S \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS=\int_0^h\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho\mathbf{u}u)dz\right)dxdy$$
$$+\int_0^h\left(\frac{\partial}{\partial y}(\rho\mathbf{u}v)dz\right)dxdy \quad (23)$$

şeklinde bir ifade elde edilir. Tablo 1'deki integral değerlerinin kullanılmasıyla ve eleman boyutlarının sıfıra yaklaşmasıyla parabolik hız profili için yukarıdaki eşitliğin limit ifadesi şöyle yazılabilir:

$$\lim_{dx,dy\to 0} \frac{\int_S \rho\, \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS}{dxdy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{6}{5}\rho h\overline{u}\overline{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{6}{5}\rho h\overline{u}\overline{v}\right) \quad (24)$$



Şekil 4. Sonsuz küçük eleman boyunca momentum akısı

Sıkıştırılamaz akışkan için (24) eşitliği daha genel olarak yazılacak olursa,

$$\lim_{dx,dy\to 0} \frac{\iint_S \rho\, \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS}{dxdy} = \tfrac{6}{5}\rho h(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}} \quad (25)$$

eşitliğine indirgenir. Benzer olarak düz hız profili için limit ifadesi,

$$\lim_{dx,dy\to 0} \frac{\iint_S \rho\, \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS}{dxdy} = \rho h(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}} \quad (26)$$

şeklindedir.

c) Momentumun Zamana Göre Değişim Miktarı

Elemandaki momentumun zamana göre değişim miktarı aşağıdaki şekilde direkt olarak incelenebilir.

$$\lim_{dx,dy\to 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, \mathbf{u} dV}{dxdy} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^h \rho\, \mathbf{u} dz\right)dxdy}{dxdy} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, h\overline{\mathbf{u}}) \quad (27)$$

Sıkıştırılamaz akışkan için (27) denklemi,

$$\lim_{dx,dy\to 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, \mathbf{u} dV}{dxdy} = \rho h\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad (28)$$

şekline indirgenir.

Yukarıda elde edilen ifadelerin, (12) eşitliğinde yerine yazılmasıyla Navier-Stokes denkleminin yeniden düzenlenmiş hali elde edilebilir. Böylece parabolik hız profilinin kullanılmasıyla elde edilen kalınlığın ilave edildiği Navier-Stokes denklemi,

$$\rho h\left\{\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \tfrac{6}{5}(\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}}\right\} = -h\nabla p + \nabla\cdot h\overline{\tau} + \nabla\cdot\mu\left[\overline{\mathbf{u}}\nabla h + (\overline{\mathbf{u}}\nabla h)^T\right] + \rho h\mathbf{g} - 12\mu\frac{\overline{\mathbf{u}}}{h} \quad (29)$$

ve düz hız profilinin kullanıldığı fomülasyon için,

$$\rho h\left\{\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{u}}\right\} = -h\nabla p + \nabla\cdot h\overline{\tau} + \nabla\cdot\mu\left[\overline{\mathbf{u}}\nabla h + (\overline{\mathbf{u}}\nabla h)^T\right] + \rho h\mathbf{g} \quad (30)$$

elde edilir. Burada $\overline{\tau}$ ortalama viskoz gerilme tensörü olup,

$$\overline{\tau} = \mu\left[\nabla\overline{\mathbf{u}} + (\nabla\overline{\mathbf{u}})^{\mathbf{T}}\right] \quad (31)$$

ifadesiyle tanımlanmıştır.

Sınır Şartları

İnce kesitli bir kanal içersindeki akıma ait formülasyonun temel denklemleri süreklilik denklemi (11) ve Navier-Stokes denklemleri (29) ve (30)'dir. Bu formülasyon için Dirichlet (zorunlu) sınır şartı iki-boyutlu akım problemleri için kullanılan sınır şartının benzeridir.

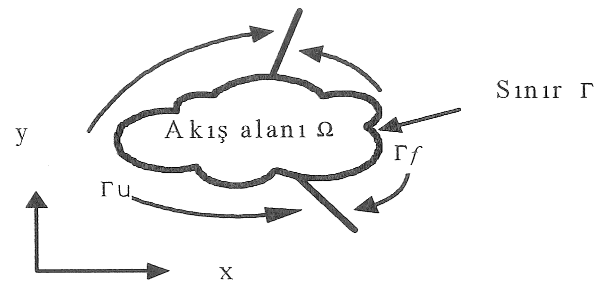
$$\Gamma_u \quad \text{da} \quad \overline{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} \quad (32)$$

Neumann (doğal) sınır şartı aşağıda ifade edildiği gibi normal ve/veya teğetsel çekme sınır şartı olarak uygulanır.

$$\Gamma_f \quad \text{da} \quad \begin{cases} f_n = -p + 2\mu\dfrac{\partial \overline{u}_n}{\partial n} \\ f_t = \mu\left(\dfrac{\partial \overline{u}_n}{\partial t} + \dfrac{\partial \overline{u}_t}{\partial n}\right) \end{cases} \quad (33)$$

Burada n ve t sırasıyla Γ_f sınırındaki birim normal ve teğetsel vektörlerdir. Γ_u ve Γ_f alan Ω'yu çevreleyen kapalı Γ sınırının parçalarıdır. Buna göre Şekil 5'den yararlanarak $\varnothing$ sıfırı temsil etmek kaydıyla, aşağıdaki gibi bir ilişkiyi yazmak mümkündür.

$$\Gamma_u \cup \Gamma_f = \Gamma$$
$$\Gamma_u \cap \Gamma_f = \varnothing$$



Şekil 5. Akım alanının tanımı ve sınır tipleri

ÖRNEK UYGULAMA

Yukarıda elde edilen kalınlığın ilave edildiği akım formülasyonunu test etmek amacıyla karmaşık olmayan bir şekil ele alınarak iki değişik örnek için analitik çözüm gerçekleştirilmiştir. Her iki durumda da parabolik hız profili için elde edilen (29) formülasyonu kararlı hal koşulları için test edilmiştir.

Karşılaştırma amacıyla yapılan nümerik çözümlemede sonlu elemanların Galerkin yöntemi uygulanmıştır. Oluşturulan bir FORTRAN programı ile problemin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Ancak yöntem ile programın detayları ve formülasyona uygulanışı bu çalışma kapsamına alınmamıştır. Konuyla ilgili diğer detaylar kaynak [17] de bulunabilir. Bu alandaki daha ayrıntılı ve uygulamalı çözüm örnekleri gelecekteki bir çalışmada yer alacaktır.

Türetilmiş olan bu formülasyon analitik çözümün elde edilebildiği bir dikdörtgen kesit arasındaki akışkan akımını simule etmek için kullanılmıştır. Bu nedenle akışkan için seçilen özellikler $\rho = 1$ kg/m^3 ve $\mu = 1$ kg/ms şeklindedir. Bunlar tipik bir sıvı metalin özelliklerini taşımayıp sadece nümerik algoritmanın tutarlılığını test etmek için seçilmiştir. Ayrıca seçilen geometrinin basitliği buna dayalı analitik çözümlerin oluşturulmasına ve nümerik kıyaslamanın yapılabilmesine imkan vermektedir.

Örnek 1

Bu problemde akışkanın sabit kalınlığa sahip bir kanal içersindeki dikdörtgensel kesit boyunca akımı tasarlanmıştır. Akışkan 50 kPa'lık sabit bir basınç farkı ile sürüklenmekte ve akım doğrultusunda yerçekimi ivmesi etki etmemektedir.

Buna göre ele alınan akım problemi x-doğrultusu boyunca olan bir akım olduğuna göre (29) eşitliğinin sadece x-doğrultusundaki ifadesi göz önüne alınacaktır. Bu ifadenin diferansiyel formu şöyle yazılabilir.

$$\rho h\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{6}{5}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\right]= -h\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u})\right]+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}(h\bar{u})+\frac{\partial}{\partial x}(h\bar{v})\right)\right]+\rho h g_x-12\mu\frac{\bar{u}}{h} \tag{34}$$

Şekil 6 göz önünde bulundurularak yapılan bazı kabullerle (34) eşitliği şöyle sadeleşir.

$$\mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}-12\frac{\mu\bar{u}}{h^2}+\frac{\Delta p}{L}=0 \tag{35}$$

Burada $(-\partial p/\partial x)=\Delta p/L$ olup, Δp uzunluk L boyunca giriş ve çıkış arasındaki mutlak basınç farkıdır. Problem sadece kararlı hal koşulları için ele alınacağından zamana bağlı terimler ihmal edilmiştir. Aşağıdan verilen sınır şartları doğrultusunda,

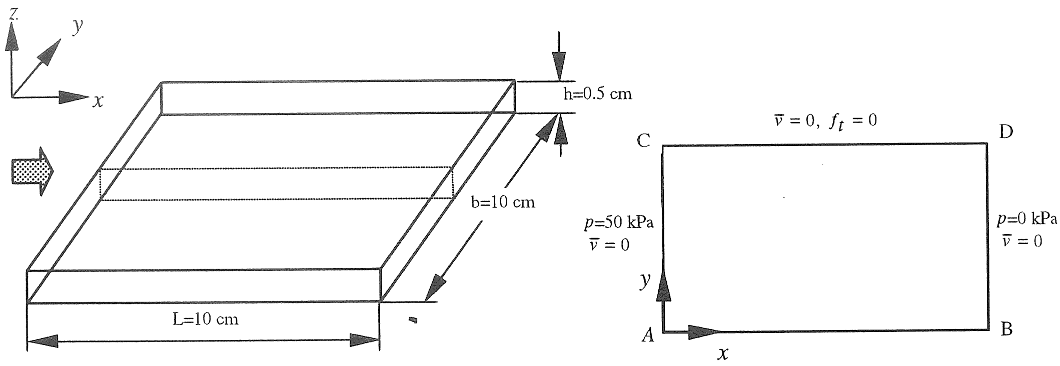
$$\bar{u}\big|_{y=0}=0 \qquad \text{ve} \qquad \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|_{y=\frac{1}{2}b}=0 \tag{36}$$

eşitliğin çözümünden $\bar{u}$ hızı,

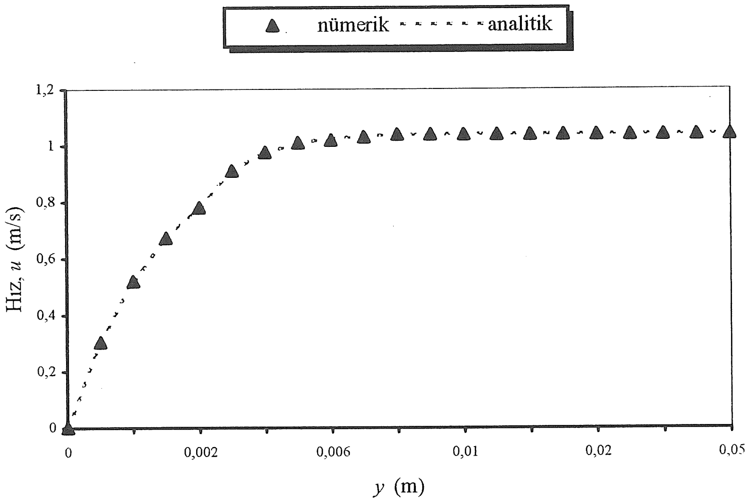
$$\bar{u}(y)=\frac{h^2\,\Delta p}{12\mu\,L}\left[1-\frac{\exp\left(2\sqrt{3}\,y/h\right)}{1+\exp\left(2\sqrt{3}\,b/h\right)}-\frac{\exp\left(-2\sqrt{3}\,y/h\right)}{1+\exp\left(-2\sqrt{3}\,b/h\right)}\right] \tag{37}$$

şeklinde elde edilir.

Burada b, L, h kanalın boyutları olup basınç farkı Δp=50 kPa olarak alınmıştır. Şeklin simetrisinden yararlanılarak kanalın yarısı göz önüne alınmış ve AB kenarında kayma olmayan sınır şartı uygulanmıştır. Cidara yakın bölgede yüksek hız gradyenti beklendiğinden çözüm için bu kısımda daha sık aralıklar kullanılmıştır. Sonuç olarak analitik ve nümerik çözüm sonucu arasındaki benzerlik Şekil 7 de net olarak görülebilmektedir.



Şekil 6. Sabit kalınlıktaki bir kanal içerisindeki akım



Şekil 7. Sabit kalınlıktaki dikdörtgen kesit arasındaki akımın hız sonuçları

Örnek 2

İkinci testte kalınlık değişiminin akım üzerine etkisi incelenmiştir. Lineer olarak daralan kesitte (Şekil 8) aynı tip akışkan kullanılmıştır. Akışkan kanal içersinde yine 50 kPa'lık bir basınç farkı ile sürüklenmektedir. AB ve CD kenarları boyunca olan akımın serbest akım gibi davranmasını sağlamak için kayma sınır şartı uygulanmıştır. Bu problemde çözüm h'ın lineer fonksiyonu,

$$h(x) = h_{\text{giriş}} + r_x x \tag{38}$$

göz önüne alınarak ulaşılmıştır. Burada r_x sabit kalınlık gradyenti olup değişim bölgesi $0 \le x \le L$ dır.

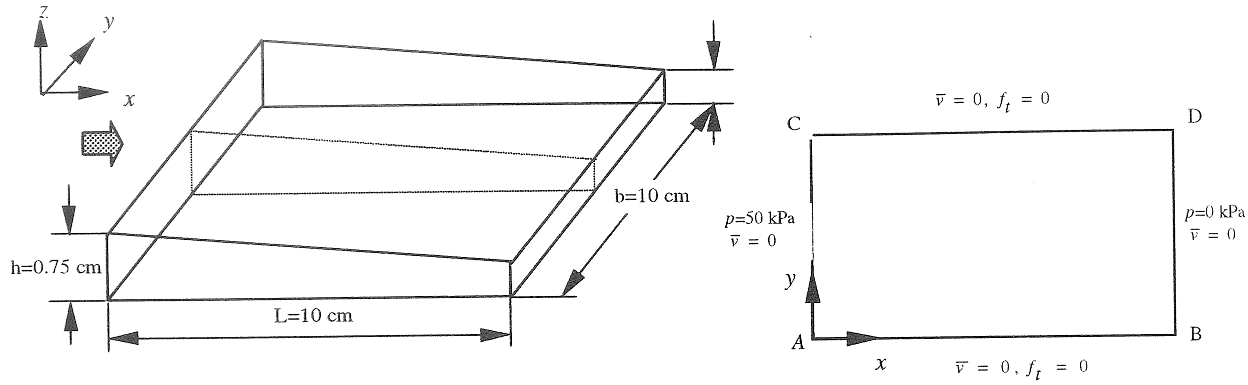
Süreklilik denklemi (11)'nin integrasyonu birim kalınlık başına düşen akım miktarını vereceğinden q,

$$q(x) = h(x) \cdot \bar{u}(x) \tag{39}$$

olacaktır. Buna göre (34) eşitliği ve süreklilik denklemi kararlı hal koşulları için

$$\rho h \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \tfrac{6}{5} \rho h \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -h \frac{\partial p}{\partial x} - 12\mu \frac{\bar{u}}{h} \tag{40}$$

şeklinde sadeleştirilebilir. (40) eşitliğinin q'ya bağlı ifadesi şöyle elde edilebilir.



Şekil 8. Lineer olarak daralan bir kanal içersindeki akım

$$p_{\text{giriş}}-p_{\text{çıkış}}\equiv\Delta p=\tfrac{6}{5}\frac{\rho q}{h^3}\left(r_x q-10\frac{\mu}{\rho}\right) \tag{41}$$

Verilen sınır şartlarından yararlanarak gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapılarak q'nun x'e bağlı çözümü,

$$q=\frac{1}{r_x}\left[5\frac{\mu}{\rho}-\sqrt{\left(5\frac{\mu}{\rho}\right)^2-\tfrac{5}{3}\left(\frac{h_{\text{giriş}}^2\,h_{\text{çıkış}}^2}{h_{\text{giriş}}+h_{\text{çıkış}}}\right)\frac{r_x\Delta p}{\rho L}}\right] \tag{42}$$

olarak elde edilir. Buna göre $\bar{u}$ hızı (41) ve (42) eşitliklerinden,

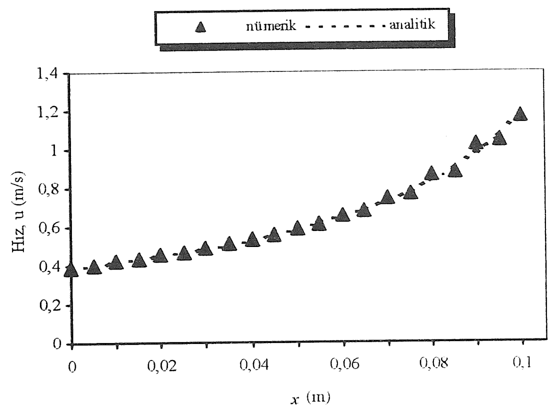
$$\bar{u}(x)=\frac{q}{h_{\text{giriş}}+r_x x} \tag{43}$$

şeklinde kolaylıkla hesaplanabilir. p basıncının çözümü için (41) ifadesinin [0, L] bölgesi içersinde integrali alınarak aşağıdaki eşitlikten elde edilebilir.

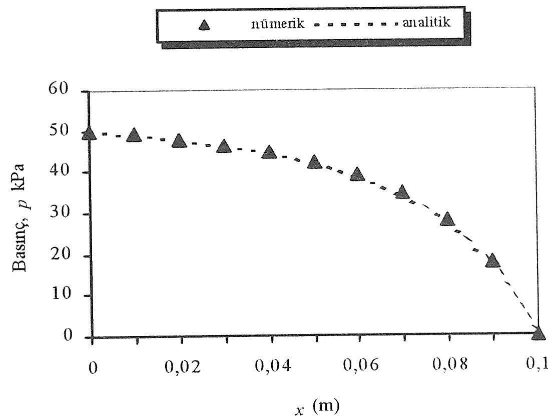
$$p(x)=p_{\text{çıkış}}+q\left(\tfrac{3}{5}\rho q-6\frac{\mu}{r_x}\right)\left[\frac{1}{h_{\text{çıkış}}^2}-\frac{1}{\left(h_{\text{giriş}}+r_x x\right)^2}\right] \tag{44}$$

Bütün bu denklemler için değişkenlerin değerleri Şekil 8'den elde edilebilir.

Sonuç olarak hız ve basıncın analitik ve nümerik çözümleri arasındaki uyumlu benzerlik Şekil 9'da net olarak görülmektedir. Hızın çıkışa doğru olan titreşimleri çözüm aralıklarının sıklaştırılmasıyla giderilebilir.



(a)



(b)

Şekil 9. Lineer olarak daralan bir kanal içersindeki akımın hız ve basınç sonuçları

SONUÇ

Çalışmada elde edilen formülasyonlar kalıp boşluğuna basılan bir sıvı metalin hareketinin incelenmesinde kullanılmak üzere türetilmiştir. Analitik çözümün elde edilebilmesi için basit geometriye sahip örnekler seçilerek bir dikdörtgen kesit arasındaki akışkan akımı simule edilmiştir. Ancak bu çalışmada, daha önce de bahsedildiği gibi nümerik hesaplamalar ve kalıp boşluğunun doldurulmasıyla ilgili uygulama kısmı ele alınmamış, sadece formülasyonun elde edilişi üzerinde durularak uygulama için basamak oluşturulmak istenmiştir. Sonuç olarak yapılan hesaplamalarda analitik ve nümerik çözümlerde uyumlu sonuçların elde edilmesi yaklaşımın doğruluğunu göstermektedir.

GELECEKTEKİ ÇALIŞMALAR

Elde edilen formülasyon kullanılarak uygulamaya yönelik detaylara, örnek ve sonuçlara sonraki çalışmalarda yer verilecektir.

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to acknowledge to Prof. Dr. D. T. GETHIN (University College of Swansea) and Dr. S. ABDULLAH (University Kebangsaam Malaysia) for their help, advise and criticism of the results for the programs and data.

A QUASI-THREE DIMENSIONAL FORMULATION OF FLOW ANALYSIS THROUGH A THIN SECTION CHANNEL

Analysis of a fluid flow through thin section channels is very important for industrial applications. Three-dimensional approach produces accurate results for this type analysis. However it is very difficult and complicated to analyse such a model, which specially has a complex shape in three-dimensions. In addition the three-dimensional analysis of a model is very costly because it needs large amount of computing time and powerful computers. Therefore, such a model should, whenever possible, be simplified or reduced to an equivalent two-dimensional representation. In this study, three-dimensional Navier-Stokes equations, which are then integrated along channel thickness *h*, over the *z*-direction, are reduced to a *quasi three-dimensional* representation. This will lead a saving in computing time since spatial velocity components $[u, v, w]$ are transformed to planar mean velocities $[\bar{u}, \bar{v}]$ by reducing one of the spatial velocity components such as *w*. In that modification two different formulations have been derived using a parabolic and a planar velocity profile.

Keywords: Thin Section Channel, Navier-Stokes Equations, Quasi-Three Dimensions.

KAYNAKÇA

1. Campbell, J., Thin Wall Casting, *Materials Science and Technology*, 4:194-204, (1988).
2. Zhang, Y.F., Liu, W.K., Wang, H.P., Cast Filling Simulations of Thin-walled Cavities, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128:199-230, (1995).
3. Hughes, T.J.R., Liu, W.K., Brooks, A., Finite Elemant Analysis in Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation, *Journal of Computational Physics*, 30:1-60, (1979).
4. Leone, J.M., Gresho, P.M., Finite Element Simulation of Steady, Two-dimensional, Viscous Incompressible Flows Over a Step, *Journal of Computational Physics*, 41:167-191, (1981).
5. Berocvier, M., Engelman, M., A Finite Element for the Numerical Solution of Viscous Incompressible Flows, *Journal of Computational Physics*, 30:181-201, (1979).
6. Donea, J., Giuliani, S., Laval, H., Finite Element Solution of the Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional-step Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 30:53-73, (1982).
7. Sotirpooulos, F., Abdallah, S., Coupled Fully Implicit Solution Procedure for the Steady Incompressible Navier-Stokes Equations, *Journal of Computational Physics*, 87:328-348, (1990).
8. Prakash, C., Patankar, S.V., A Control Volume-Based Finite-Element Method for Solving the Navier-Stokes Equations Using Equal-Order Velocity-Pressure Interpolation, *Numerical Heat Transfer*, 8: 259-280, (1985).
9. Ramaswamy, B., Theory and Implementation of a Semi-implicit Finite Element Method for Viscous Incompressible Flow, *Computers Fluids*, 22(6):725-747, (1993).
10. Stenberg, R., A Technique for Analysing Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11:935-948, (1990).
11. Thomas, B.G., Najjar, F.M., Finite Element Modelling of Turbulent Fluid flow and Heat

Transfer in Continuous Casting, *Applied Mathematics and Modelling*, 15:226-243, (1991).
12. Zaidi, K., Abbes, B., Teodosiu, C., Finite Element Simulation of Mold Filling Using Marker Particles and the k-$\in$ Model of Turbulence, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 144:227-233, (1997).
13. Dhatt, G., Gao, D.M., Ben Cheikh, A., A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* 30:821-831, (1990).
14. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill Book Company, (1979).
15. Wang, H.P., Perry, E.M., An Interactive Parametric Analysis Tool for Thin-Walled Investment Casting, *Proceeding of Fifth Inter. Conference on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes,* M. Rappaz et. al. (editors), Palm Coast, Florida, The Minerals, Metals and Materials Society, 595-602, (1991).
16. Subbiah, S., Trafford, D.L., Güçeri, S.I., Non-Isotermal Flow of Polymer into Two-Dimensional, Thin Cavity Molds: A Numerical Grid Generation Approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* 32:415-434, (1989).
17. Yaman, G., *İnce Kesitli Döküm Boşluğunu Doldurmakta Olan Ergimiş Malzemeye Ait Hareketin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile İncelenmesi*, Doktora Tezi, Balıkesir, 1999.