MAKÜ FEBED
ISSN Online: 1309-2243
http://dergipark.gov.tr/makufebed
DOI: 10.29048/makufebed.416745

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 9(2): 151-156 (2018)
The Journal of Graduate School of Natural and Applied Sciences of Mehmet Akif Ersoy University 9(2): 151-156 (2018)

Araştırma Makalesi / Research Paper

Üst Yaklaşım Sayılarının Öncül Komşuluklarla Elde Edilmesi

Sadık BAYHAN[1*], Nazlı Tuğçe BAYTAROĞLU[2]

[1]Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Burdur
[2]Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Burdur

Geliş Tarihi (Received): 18.04.2018, Kabul Tarihi (Accepted): 01.06.2018
Sorumlu Yazar (Corresponding author): bayhan@mehmetakif.edu.tr*
+90 248 2133042 +90 248 2133099

ÖZ

Kaba küme teorisi belirsizliğe matematiksel bir yaklaşım olarak düşünülmüş; yararlı ve etkili bir araç olarak çeşitli bilim alanlarında kullanılmaktadır. Lineer cebirde yer alan lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, taban, rank gibi temel kavramlarının genelleştirilmesi Matroid teorisiyle olanaklı olmuştur. Bu çalışmada bir bağıntıdan oluşturulan matroid için öncül komşuluklara dayalı üst yaklaşım sayısal fonksiyonu tanımlanarak genelleştirilmiş kaba kümelerle ilişkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kaba küme, Matroid, Alt yaklaşım, Üst yaklaşım

Obtaining Upper Approximation Numbers with Predecessor Neighborhoods

ABSTRACT

Rough set theory is considered as a mathematical approach to uncertainty as a useful and effective tool in various fields of science. The generalization of the basic concepts such as linear dependence, linear independence, base and rank in linear algebra is possible by matroid theory. In this study, the upper approximation number function based on predecessor neighborhoods will be defined for the matroid generated from a relation and generalized rough sets associations will be examined.

Keywords: Rough set, Matroid, Lower approximation, Upper approximation

GİRİŞ

Matroid Teorisi'nin başlangıcı 1930lu yılların ilk yarısına kadar uzanır ve "matroid" sözcüğü ilk olarak 1935 yılında Whitney'in makalesinde kullanılmıştır (Whitney, 1935). Matroid Teorisi'nin temeli lineer cebir, soyut cebir ve çizge teorisine dayanmaktadır. Matroid adı verilen yapı; lineer cebirin temel konularından olan lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, taban, rank gibi kavramların genelleştirilmesidir (Oxley, 1992). Matris yapısının soyut bir genellemesi matroid kavramı kullanılarak ifade edilmiştir (Whitney, 1935). Matroid yapıları hem teori hem de uygulama bakımından önemlidir. Uygulama alanları arasında çizge teorisi ve kombinatorik sayılabilir. Kaba küme teorisi ise matroid teorisinden neredeyse 50 yıl sonra belirsizliğe bir yaklaşım olarak Pawlak (1982) tarafından verilmiştir. Pawlak'ın (1982) kaba küme yaklaşımı ilk olarak bilgi sistemleriyle başlar. Bir bilgi sistemi, en basit anlamda, nesneler ve özelliklerden oluşan bir çizelge ile ifade edilen yapılar olarak düşünülebilir. Nesneler ve özelliklerin eşleştirilmesi matematiksel anlamda bir bağıntıya karşılık gelir. Kaba küme yaklaşımının temelini özel bir bağıntı türü olan denklik bağıntısı oluşturur ve bir evrensel kümenin herhangi bir altkümesinin, üst yaklaşım ve alt yaklaşım adı verilen operatörler yardımıyla karakterize edilmesi esasına dayanır. Bu yaklaşımda istatistiksel bilgilere gereksinme duyulmaması teorinin farklı alanlarda kullanılabilirliğini ve yaygınlığını genişletmektedir. Kaba küme teorisi iki önemli açıdan incelenir. Birincisi yapısal yöntemler, ikincisi cebirsel yöntemlerdir. Yapısal yöntemlerin içeriğinde bir evrensel küme üzerinde tanımlanan bağıntılar, bir evrensel kümenin örtüleri ve ayrışımları, komşuluk sistemleri ve örgüler yer almaktadır (Yao, 1996; 1998a; 1998b). Cebirsel yöntemlerin içinde ise alt ve üst yaklaşım operatörleri bulunmaktadır. Kaba kümelerin genelleştirilmesi düşüncesi çeşitli doğrultularda ortaya konulmuştur. Bunlar arasında, denklik bağıntısı olmayan bir bağıntıdan eleman tabanlı genelleştirme ve örtüler kullanılarak tanecik tabanlı genelleştirme sayılabilir. Kaba küme kavramının temelini oluşturan denklik bağıntısı, çalışmaların bütünü düşünüldüğünde oldukça sınırlayıcı ve ağır bir koşuldur. Bu nedenle denklik bağıntısı yerine, daha zayıf özelliklere sahip bağıntılar alınarak kaba kümeler genelleştirilmiştir. Günümüzde, genelleştirilmiş kaba kümeler üzerinde yoğun olarak çalışmaların varlığı bilinmektedir. İlk bakışta matroid ve kaba küme teorilerinin birbirlerinden farklı doğrultularda gelişme gösterdiği düşünülebilir. Ancak her iki teorinin ortak noktaları ortaya konularak çalışmaların yapıldığı görülmektedir. Bu çalışmalar arasında; bağıntıyı temel alan genelleştirilmiş kaba kümelerle matroid teorisini bir araya getiren çalışmalar bulunmaktadır (Zhu, 2007; 2009). Matroidin rank fonksiyonundan esinlenerek üst yaklaşım sayısı, bağıntıdan elde edilen matroid için uyarlanmış ve üst yaklaşım sayısını ardıl komşuluklar kullanarak ifade edilmiştir (Zhu ve Wang, 2011). Bu çalışmanın temel düşüncesi ise; bir matroidin rank fonksiyonunun üst yaklaşım sayısının öncül komşuluk kavramıyla verilmesidir.

MATERYAL VE YÖNTEM

U boş olmayan sonlu bir küme ve $U \times U$ çarpım kümesinin herhangi bir R alt kümesine U üzerinde bir bağıntı denir. Aksi belirtilmediği sürece, U kümesi üzerinde bir R bağıntısı yerine kısaca R nin bir bağıntı olduğunu ifade edilecektir. $x, y \in U$ için $(x, y) \in R$ olması x öğesinin R bağıntısı ile y öğesiyle ilişkili olmasını ifade eder ve durumda xRy gösterimi kullanılır. R bir bağıntı olsun. R bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişli olma özelliklerini sağlıyorsa denklik bağıntısı olarak adlandırılır. R bir denklik bağıntısı ve $x \in U$ olsun. x öğesinin R bağıntısına göre denklik bölüğü $[x] = \{y \in U : xRy\} = \{y \in U : yRx\}$ olarak tanımlanır. R bir denklik bağıntısı olmak üzere, (U, R) ikilisine yaklaşım uzayı ya da Pawlak uzayı denir. Bir (U, R) yaklaşım uzayında, $P(U)$ kuvvet kümesini göstermek üzere, bir $X \subseteq U$ altkümesinin alt yaklaşım operatörü, $\underline{apr} : P(U) \to P(U)$, $\underline{apr}(X) = \{x \in U : [x] \subseteq X\}$ ve üst yaklaşım operatörü $\overline{apr}(X) : P(U) \to P(U)$, $\overline{apr}(X) = \{x \in U : [x] \cap X \neq \emptyset\}$ eşitlikleri ile tanımlanırlar (Yao, 1996; 1998b).

Pawlak tarafından verilen kaba küme kavramı temel olarak bir denklik bağıntısına dayanır. Bir (U, R) yaklaşım uzayında bir $X \subseteq U$ altkümesinin kaba olması, X in alt yaklaşımı ile üst yaklaşımının birbirinden farklı olmasıyla, yani $\underline{apr}(X) \neq \overline{apr}(X)$ olarak tanımlanır. Yaklaşım uzayı tanımında yer alan denklik bağıntısı olma koşulu hem ağır hem de çalışmak için sınırlayıcı olabilmektedir. Bu nedenle denklik bağıntısı yerine herhangi bir bağıntı, denklik bölüğü yerine de ardıl ve öncül komşuluklar alınarak kaba kümelerin genelleştirildiği çalışmaların yapıldığı görülmektedir (Yao, 1998b).

TANIM 1 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı ve U kümesinin kuvvet kümesi $P(U)$ olsun. Herhangi bir $x \in U$ için $R_s : U \to P(U)$, $R_s(x) = \{y \in U : xRy\}$ kümesine x öğesinin ardıl komşuluğu, $R_p : U \to P(U)$, $R_p(x) = \{y \in U : yRx\}$ kümesine de x öğesinin öncül komşuluğu denir. R bağıntısında birbirlerinden farklı bütün ardıl komşulukların ailesi $N^s = \{R_s(x) : x \in U\}$, öncül komşulukların ailesi $N^p = \{R_p(x) : x \in U\}$ ile gösterilir ve $N^s, N^p \subseteq P(U)$ olur.

R bir denklik bağıntısı ve $x \in U$ olsun. $R_s(x) = [x] = R_p(x)$ eşitlikleri tanımların doğal bir sonucu olarak yazılabilir (Yao, 1998b).

ÖRNEK 2 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, a), (c, d), (d, c)\}$ bağıntısı verilsin. Ardıl komşuluklar ailesi $N^s = \{\{b, d\}, \{c\}, \{a, d\}\}$ ve öncül komşuluklar ailesi $N^p = \{\{b, d\}, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}\}$ olur.

Bir (U, R) yaklaşım uzayında bir $X \subseteq U$ altkümesinin $\underline{apr}(X)$ alt yaklaşım ve $\overline{apr}(X)$ üst yaklaşım tanımları denklik bölüğüne dayalı olarak verilir. Aşağıda verilen tanımlarda, alt yaklaşım ve üst yaklaşım operatörleri daha genel olarak verilmiştir.

TANIM 3 R bir bağıntı ve $X \subseteq U$ olsun. $L^s, H^s : P(U) \to P(U)$ operatörleri ardıl komşuluklar türünden, sırasıyla,

$$L^s(X) = \{x : \forall y, xRy \Longrightarrow y \in X\} = \{x : R_s(x) \subseteq X\},$$
$$H^s(X) = \{x : \exists y[y \in X, xRy]\} = \{x : R_s(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

eşitlikleri ile tanımlanırlar. L^s ye ardıl alt yaklaşım operatörü, H^s ye de ardıl üst yaklaşım operatörü adları verilir (Zhu, 2007).

Alt ve üst yaklaşım operatörleri öncül komşuluklar için;

TANIM 4 R bir bağıntı ve $X \subseteq U$ olsun.

$L^p, H^p : P(U) \to P(U)$ operatörleri öncül komşuluklar türünden,
$L^p(X) = \{x: \forall y, yRx \Longrightarrow y \in X\} = \{x: R_p(x) \subseteq X\}$
$H^p(X) = \{x : \exists y[y \in X, yRx]\} = \{x : R_p(x) \cap X \neq \emptyset\}$

eşitlikleriyle tanımlanırlar. L^p ye öncül alt yaklaşım operatörü, H^p ye de öncül üst yaklaşım operatörü denir.

ÖNERME 5 R bir bağıntı olsun. $L^s, H^s : P(U) \longrightarrow P(U)$ operatörleri için aşağıdaki özellikler gerçeklenir (Zhu and Wang, 2011):

i. $L^s(U) = U$,
ii. Her $X, Y \subseteq U$ için $X \subseteq Y$ ise, $L^s(X) \subseteq L^s(Y)$ dir,
iii. Her $X, Y \subseteq U$ için $L^s(X \cap Y) = L^s(X) \cap L^s(Y)$ dir,
iv. $H^s(\emptyset) = \emptyset$,
v. Her $X, Y \subseteq U$ için $X \subseteq Y$ ise, $H^s(X) \subseteq H^s(Y)$ dir,
vi. Her $X, Y \subseteq U$ için $H^s(X \cup Y) = H^s(X) \cup H^s(Y)$ dir.

ÖNERME 6 R bir bağıntı olsun. $L^p, H^p : P(U) \to P(U)$ operatörleri için aşağıdaki özellikler gerçeklenir:

i. $L^p(U) = U$,
ii. Her $X, Y \subseteq U$ için $X \subseteq Y$ ise, $L^p(X) \subseteq L^p(Y)$ dir,
iii. Her $X, Y \subseteq U$ için $L^p(X \cap Y) = L^p(X) \cap L^p(Y)$ dir,
iv. $H^p(\emptyset) = \emptyset$,
v. Her $X, Y \subseteq U$ için $X \subseteq Y$ ise, $H^p(X) \subseteq H^p(Y)$ dir,
vi. Her $X, Y \subseteq U$ için $H^p(X \cup Y) = H^p(X) \cup H^p(Y)$ dir.

Verilen bir R bağıntısı için, ardıl üst ve alt yaklaşımlar ile öncül üst ve alt yaklaşımlara ilişkin bir örnek verilecek olursa:

ÖRNEK 7 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b)\}$ bağıntısı verilsin. İlk olarak $\{a, b\} \subseteq U$ altkümesinin ardıl üst ve ardıl alt yaklaşımlarını belirleyelim. Tanımlar kullanılarak $L^s(\{a, b\}) = \{x : R_s(x) \subseteq \{a, b\}\} = \{a\}$ ve $H^s(\{a, b\}) = \{x : R_s(x) \cap \{a, b\} \neq \emptyset\} = \{a, b, c\}$ elde edilir. Şimdi aynı R bağıntısı ve $\{a, b\} \subseteq U$ altkümesi için öncül üst ve öncül alt yaklaşımlar, sırasıyla $L^p(\{a, b\}) = \{x : R_p(x) \subseteq \{a, b\}\} = \{c\}$ ve $H^p(\{a, b\}) = \{x : R_P(x) \cap \{a, b\} \neq \emptyset\} = \{a, b, c\}$ olur.

TANIM 8 *U* sonlu bir küme olmak üzere, *U* kümesinin altkümelerinin bir I ailesi aşağıdaki koşulları sağlasın:

[M1] $\emptyset \in I$,
[M2] Eğer $A \in I$ ve $B \subseteq \mathrm{A}$ ise $B \in I$ dır,
[M3] Eğer $A, B \in I$ ve $|A| = |B| + 1$ ise $A \cup \{e\} \in I$ olacak şekilde bir $e \in B \setminus A$ vardır.

(U, I) ikilisine bir matroid denir ve *U* kümesi üzerindeki matroid kısaca *M* ile gösterilir. Bu tanımda yer alan **| . |** gösterimi ilgili kümenin eleman sayısını, **** gösterimi ise iki kümenin farkını ifade etmektedir. I ailesinin elemanlarına *M* matroidinin bağımsız kümeleri, *U* kümesine matroidin temel kümesi, $P(U)$ kuvvet kümesine ait olan ancak I içinde yer almayan kümeye bağımlı küme adları verilir (Oxley, 1992).

Matroid tanımında yer alan [M3] özelliği, lineer cebirde iyi bilinen Steinitz Değişim Lemması'nın bir genelleştirilmesidir.

ÖRNEK 9 $U = \{a, b, c\}$ kümesi ile U nun altkümelerinin bir $I = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ ailesi verilsin. (U, I) ikilisi U kümesi üzerinde bir matroid belirler.

TANIM 10 $\mathrm{M} = (U, I)$ bir matroid olsun. Her $X \subseteq U$ için, M nin $r_M : P(U) \to \mathbb{N}$ ile gösterilen rank fonksiyonu $r_M(X) = max\{\ |A|: A \subseteq X, A \in I\}$ olarak tanımlanır (Zhu, 2007).

Bir matroid ile rank fonksiyonu arasındaki ilişki aşağıda verilen önerme ile ifade edilmiştir.

ÖNERME 11 $\mathrm{M} = (U, I)$ bir matroid ve r_M de M nin rank fonksiyonu olsun. Her $A \subseteq X$ için $r_M(X) = |X|$ olması için gerekli ve yeterli koşul $X \in I$ olmasıdır (Oxley, 1992).

Bir bağıntıdan bir matroid elde edebilmek için üst yaklaşım sayısı ve üst yaklaşım sayısal fonksiyonu kavramlarının tanımları aşağıda verilmiştir (Zhu and Wang, 2011).

TANIM 12 R bir bağıntı ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in U$ olmak üzere R bağıntısının bütün farklı ardıl komşulukları sırasıyla $R_s(x_1), R_s(x_2), \dots, R_s(x_m)$ olsun. Her $X \subseteq U$ altkümesi için

$$U_f^s(X) = |x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\} : R_s(x_i) \cap X \neq \emptyset\ \}|$$

eşitliği ile verilen $U_f^s(X)$ sayısına X kümesinin ardıl üst yaklaşım sayısı ve U_f^s fonksiyonuna da ardıl üst yaklaşım sayısal fonksiyonu adları verilir.

ÖNERME 13 *R* bir bağıntı olmak üzere U_f^s, *R* bağıntısına göre ardıl üst yaklaşım sayısal fonksiyonu olsun. $I(R) = \{A \subseteq U: her\ B \subseteq A\ için\ U_f^s(B) \geq\ |B|\}$ kümesini tanımlayalım. O halde $M(R) = (U, I(R))$ bir matroid belirler (Zhu and Wang, 2011).

ÖRNEK 14 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (d, b)\}$ bağıntısı verilsin. R bağıntısına göre ardıl üst yaklaşım sayısal fonksiyonundan elde edilen matroid yapısının elemanlarını belirleyelim. İlk olarak $R_s(a)=\{a,c\}, R_s(b)=\{a,b,c\}, R_s(c)=\emptyset, R_s(d)=\{b\}$ ardıl komşulukları elde edilir. $U_f^s(\emptyset)=U_f^s(\{d\})=0, U_f^s(\{a\})=U_f^s(\{b\})=U_f^s(\{c\})=U_f^s(\{a,d\})=U_f^s(\{b,d\})=U_f^s(\{c,d\})=U_f^s(\{a,c,d\})=2, U_f^s(\{a,b\})=U_f^s(\{a,c\})=U_f^s(\{b,c\})=U_f^s(\{a,b,c\})=U_f^s(\{a,b,d\})=U_f^s(\{b,c,d\})=U_f^s(\{a,b,c,d\})=3$ olarak ardıl yaklaşım üst sayıları belirlenir. O halde $I(R)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ olmak üzere $M=(U,I(R))$ bir matroid olur.

Tanım 12'de verilen kavramların açık olarak ardıl komşuluklarla ifade edildiği görülmektedir. Aşağıda verilen tanımda üst yaklaşım sayısı ve üst yaklaşım sayısal fonksiyonunun öncül komşuluklara dayalı ifadeleri yer almaktadır. Böylece bir bağıntıdan matroid elde etmek için öncül komşulukların rolü ortaya konularak buna ilişkin bir önerme verilmiştir.

TANIM 15 R bir bağıntı ve $x_1,x_2,\dots,x_m\in U$ olmak üzere R bağıntısının bütün farklı öncül komşulukları sırasıyla $R_p(x_1),R_p(x_2),\dots,R_p(x_m)$ olsun. Her $X\subseteq U$ altkümesi için

$$U_f^p(X)=\left|x_i\in\{x_1,x_2,\dots,x_m\}:R_p(x_i)\cap X\neq\emptyset\}\right|$$

eşitliği ile verilen $U_f^p(X)$ sayısına X kümesinin öncül üst yaklaşım sayısı ve U_f^s fonksiyonuna da öncül üst yaklaşım sayısal fonksiyonu denir.

ÖRNEK 16 $U=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde bir $R=\{(a,a),(a,c),(b,a),(c,b)\}$ bağıntısı verilsin. İlk olarak $\{b\}\subseteq U$ altkümesinin ardıl üst yaklaşım ve öncül üst yaklaşım sayılarını belirleyelim. Ardıl üst yaklaşım tanımı kullanılarak $U_f^s(\{b\})=|\{c\}|=1$ olmasına karşın $U_f^p(\{b\})=|\emptyset|=0$ olmaktadır.

ÖNERME 17 *R* bir bağıntı olmak üzere, *R* ye göre öncül üst yaklaşım sayısal fonksiyonu U_f^polsun. $I(R)=\{A\subseteq U: her\ B\subseteq A\ için\ U_f^p(B)\geq |B|\}$ olarak tanımlanan küme ile $M(R)=(U,I(R))$ bir matroid belirller.

Kanıt: M1 : $U_f^p(\emptyset)=\left|\{x\in U: R_p(x)\cap\emptyset\neq\emptyset\}\right|=|\emptyset|=0$ olduğundan $\emptyset\in I(R)$ dir.

M2 : $A\in I(R)$ ve $B\subseteq A$ olsun. O halde her $A^*\subseteq A$ için $L_f^s(A^*)\geq |A|$ sağlanır. Ayrıca her $B^*\subseteq B\subseteq A$ için $U_f^p(B^*)\geq |B|$ olur. Bu durumda $B\in I(R)$ elde edilir.

M3 : $A,B\in I(R)$ ve $|A|<|B|$ olsun. $A\cup\{c\}\in I(R)$ olacak biçimde $bir\ c\in B\backslash A$ öğesi bulmalıyız. Tersine her $c\in B\backslash A$ için $A\cup\{c\}\notin I(R)$ olduğunu varsayalım. O halde $|A|\leq U_f^p(A)\leq U_f^p(A\cup\{c\})<|A\cup\{c\}|\leq |A|+1\leq U_f^s(A)+1$ ya da bu eşitsizliğe eşdeğer olarak $U_f^p(A)=U_f^p(A\cup\{c\})=|A|$ olur. Her $c,d\in B\backslash A$ ve $c\neq d$ için $U_f^p(A\cup\{c,d\})+U_f^p(A)\leq U_f^p(A\cup\{c\})+U_f^p(A\cup\{d\})=2U_f^p(A)$ ya da $U_f^p(A\cup\{c,d\})\leq U_f^p(A)$ eşitsizlikleri elde edilir. Tanım gereğince $U_f^p(A)\leq U_f^p(A\cup\{c,d\})$ eşitsizliği her zaman sağlandığı için, $U_f^p(B)=U_f^p\left(A\cup(\cup_{c\in B\backslash A}\{c\}\right)=U_f^p(A)$ olur. Sonuç olarak $|A|=U_f^p(A)=U_f^p(B)\geq|B|$ elde edilir. Ancak bu eşitsizlik $|A|<|B|$ varsayımı ile çelişir. O halde $A\cup\{c\}\in I(R)$ olacak biçimde $bir\ c\in B\backslash A$ öğesi vardır. $I(R)$ ailesi $MI, M2\ ve\ M3$ özelliklerini sağladığından bir matroid olur.

ÖRNEK 18 $U=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $R=\{(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(d,b)\}$ bağıntısı verilsin. R bağıntısına göre öncül üst yaklaşım sayısal fonksiyonundan elde edilen matroid yapısını oluşturalım. Öncelikle $R_p(a)=\{a\}, R_p(b)=\{b,d\}, R_s(c)=\{a,b\}, R_s(d)=\emptyset$ öncül komşulukları elde edilir. Daha sonra $U_f^p(\emptyset)=U_f^p(\{c\})=0, U_f^p(\{d\})=U_f^p(\{a,c\})=U_f^p(\{c,d\})=1,$ $U_f^p(\{a\})=U_f^p(\{b\})=U_f^p(\{b,c\})=U_f^p(\{b,d\})=U_f^p(\{b,c,d\})=2, U_f^p(\{a,b\})=U_f^p(\{a,d\})=U_f^p(\{a,b,c\})=U_f^p(\{a,c,d\})=U_f^p(\{a,b,d\})=U_f^p(\{a,b,c,d\})=3$ olmak üzere öncül üst yaklaşım sayıları belirlenir. Son olarak $I(R)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{d\},\{a,b\},\{a,d\},\{a,b,d\}\}$ olmak üzere $M(R)=(U,I(R))$ matroidi elde edilir.

SONUÇ 19 *R* bir bağıntı olsun. *R* bağıntısına göre ardıl üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile öncül üst yaklaşım sayısal fonksiyonundan indirgenen matroid yapıları birbirlerinden farklıdır.

Ardıl üst yaklaşım sayısal fonksiyonu rank fonksiyonunun genelleştirilmişi olarak düşünülebilir ve bu fonksiyona ilişkin özellikler aşağıda verilmiştir. Herhangi bir bağıntıdan matroid yapısının elde edilmesinde bu özellikler önemli rol oynamaktadır.

ÖNERME 20 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı ve R bağıntısına göre ardıl komşuluk üst yaklaşım sayısal fonksiyonu U_f^s olsun. Her $X,Y\subseteq U$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Zhu and Wang, 2011).

$i. U_f^s(\emptyset)=0,$
$ii. X\subseteq Y\subseteq U\Rightarrow U_f^s(X)\leq U_f^s(Y),$
$iii. U_f^s(X\cup Y)+U_f^s(X\cap Y)\leq U_f^s(X)+U_f^s(Y).$

Aşağıda verilen önerme üst yaklaşım sayısal fonksiyonunun öncül komşuluklara dayalı ifadesine ait özellikleri vermektedir.

ÖNERME 21 R bir bağıntı ve R bağıntısına göre öncül komşuluk üst yaklaşım sayısal fonksiyonu U_f^p olsun. Her $X, Y \subseteq U$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$i.\ U_f^p(\emptyset) = 0,$
$ii.\ X \subseteq Y \subseteq U \Rightarrow U_f^p(X) \leq U_f^p(Y),$
$iii.\ U_f^p(X \cup Y) + U_f^p(X \cap Y) \leq U_f^p(X) + U_f^p(Y).$

Kanıt : i. $U_f^p(\emptyset) = |\{x \in U : R_s(x) \cap \emptyset \neq \emptyset| = 0.$
ii. $X \subseteq Y \subseteq U$ olsun. $|X| \leq |Y|$ olduğundan $U_f^p(X) = |x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\} : R_p(x_i) \cap X \neq \emptyset\}| \leq U_f^p(Y) = |x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\} : R_p(x_i) \cap Y \neq \emptyset\}|$ dir.
iii. $X = \emptyset$ ve $Y = \emptyset$ olması durumunda, (i) gereğince istenen eşitsizlik sağlanır. $X = \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ olması durumunda $U_f^p(Y) + U_f^p(\emptyset) = U_f^p(Y) \leq U_f^p(\emptyset) + U_f^p(Y) = U_f^p(Y)$ olur. O halde $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ ve $X \cap Y = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} U_f^p(X \cup Y) + U_f^p(X \cap Y) &= U_f^p(X \cup Y) \\ &= |x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\} : R_p(x_i) \cap (X \cup Y) \neq \emptyset\}| \\ &= |x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\} : (R_p(x_i) \cap X) \cup (R_p(x_i) \cap Y) \neq \emptyset\}| \\ &\leq |x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\} : (R_p(x_i) \cap X) \neq \emptyset\}| \\ &\quad + |x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\} : (R_p(x_i) \cap Y) \neq \emptyset\}| \\ &= U_f^p(X) + U_f^p(Y) \end{aligned}$$

istenen eşitsizlik sağlanır. $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ ve $X \cap Y \neq \emptyset$ olması durumu da benzer olarak gösterilerek kanıt tamamlanır.

ÖNERME 22 R bir bağıntı olsun. R bağıntısına göre ardıl üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile indirgenen $M = (U, I(R))$ matroidinin rank fonksiyonu $r_{M(R)}^s$ olsun. O halde her $X \subseteq U$ için $r_{M(R)}^s(X) = min_{Y \subseteq X} \{U_f^s(Y) + |X \setminus Y|\}$ dir (Zhu and Wang, 2011).

Aşağıda verilen önermede öncül üst yaklaşım sayısal fonksiyonu tarafından indirgenen matroidin rank fonksiyonu ifade edilmiştir.

ÖNERME 23 R bir bağıntı olsun. R bağıntısına göre öncül üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile indirgenen $M = (U, I(R))$ matroidinin rank fonksiyonu $r_{M(R)}^p$ olmak üzere her $X \subseteq U$ için $r_{M(R)}^p(X) = min_{Y \subseteq X} \{U_f^p(Y) + |X \setminus Y|\}$ dir.

Kanıt : $X \in I(R)$ olsun. Her $Y \subseteq X$ için $U_f^s(Y) \geq |Y|$ ve $|Y| = |X| - |X \setminus Y|$ olduğundan $U_f^s(Y) + |X \setminus Y| \geq |X|$ dir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $Y \subseteq X$ üzerinden minimumu alınırsa istenen eşitlik elde edilir.

NOT: Bir R bağıntısı verilsin. R bağıntısına göre ardıl üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile indirgenen ilgili rank fonksiyonu da doğal olarak farklılık gösterecektir. Bu durumu somutlaştıran bir örneği inceleyelim.

ÖRNEK 24 $U = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a,a), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (d,b)\}$ bağıntısından elde edilen $M(R) = (U, I(R))$ bir matroidi Örnek 14'de verilmişti. $M(R)$ matroidine göre $X_1 = \{a, c\}$ ve $X_2 = \{d\}$ altkümelerinin, ardıl üst sayısal fonksiyonu ile indirgenen rankı $r_{M(R)}^s(\{a, c\}) = 2$ ve öncül üst sayısal fonksiyonu ile indirgenen rankı $r_{M(R)}^p(\{d\}) = 1$ dir.

TANIM 25 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı ve R bağıntısına göre öncül üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile indirgenen matroid $M^p(R)$, ilgili rank fonksiyonu $r_{M^p(R)}^p$ ve $X \subseteq U$ olsun. $\overline{M^p}: P(U) \longrightarrow P(U)$, $\overline{M^p}(X) = \{y \in U : r_{M^p(R)}^p(X \cup \{y\}) = r_{M^p(R)}^p\}$ olarak tanımlanan $\overline{M^p}$ ye matroid öncül üst yaklaşım operatörü ve . $\overline{M^p}(X)$ kümesine de X in matroid üst yaklaşımı denir.

ÖNERME 26 R, U kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Her $X \subseteq U$ için $H^p(X) \subseteq \overline{M^p}(X)$ dir.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Herhangi bir bağıntıdan ardıl ve öncül komşuluk operatörlerinden farklı matroid yapıları elde edilebilir. Bundan sonraki çalışmalarda ardıl ve öncül ($N^s \cap N^p$), ardıl veya öncül ($N^s \cup N^p$) komşuluk operatörlerinin indirgediği matroidler ve bunların her birine karşılık gelen rank fonksiyonları üzerinde çalışmalar yapılabilir.

SONUÇ

Bu makalede herhangi bir bağıntıdan öncül üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile bir matroid elde edildi. Bu matroidin ardıl üst yaklaşım sayısal fonksiyonu ile indirgenen matroid ile aynı olmadığı gösterildi. Her iki yolla elde edilen matroidlerin rank fonksiyonlarının tanımları verildi.

KAYNAKLAR

Oxley, J. (1992). Matroid Theory, Oxford University Press, New York.

Pawlak, Z. (1982). Rough sets, International Journal of Computer & Information Sciences 11 (5): 341–356.

Whitney, H. (1935). On the abstract properties of linear dependence,, Amer. J. Math. 57: 509-533.

Yao, Y. Y. (1996). Two views of the theory of rough sets in finite universes, International Journal of Approximate Reasoning. 15 (4): 291–317.

Yao, Y. Y. (1998a). Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets, Information Sciences 109: 21–47.

Yao, Y. Y. (1998b). Relational interpretational of neighborhood operators and rough set approximation operators, Information Sciences 111: 239–259.

Zhu, W. (2007). Generalized rough sets based on relations, Information Sciences. 177: 4997-5011.

Zhu, W. (2009). Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering, Information Sciences 179: 210–225.

Zhu, W., Wang, S. (2011). Matroidal approaches to generalized rough sets based on relations, International Journal of Machine Learning and Cybernetics 2: 273– 279.