



Hiperyüzelerde Optimizasyon Üzerine

Necmettin TANRIÖVER

*Başkent Üniversitesi Mühendislik Fakültesi,
Eskşehir Yolu 20.km, Bağlica, Etimesgut, Ankara, TÜRKİYE*

Received: 10.10.2014; Accepted: 25.03.2015

Özet. Bu çalışmada, önce bir hiperyüzeyin Hessian formu tanımlandı. Hessian formla, hiperyüzeyin İkinci Temel formu arasındaki bağıntı verildi. Daha sonra, bu formlarla; bir hiperyüzeyin, verilen bir hiperdüzleme göre lokal ekstremumlarının ve kısıta bağlı ekstremumlarının nasıl hesaplanacağı açıklandı.

Anahtar kelimeler. Hiperyüzey, gradient, kovaryant türev, Hessian form, ikinci temel form, ekstremum.

Abstract

In this work, we first define the Hessian form of a hypersurface, then we relate it to the Second Fundamental form of the hypersurface. In the remaining part of this work, we use these formulas to show, how to evaluate the local and restricted extreme values of the hypersurface according to a given hyperplane.

Keywords. Hypersurface, gradient, covariant derivative, Hessian form, second fundamental form, extremum.

1 Giriş

Endüstride, mühendislikte, ekonomide, tarımda, işletmelerde minimum maliyetle, maksimum ve kaliteli üretim yapmak ve maksimum kar etmek hedeflenir ([7], [8]). Üretim ve maliyet; zaman, yatırım, emek, doğa gibi bir çok etkene, yani parametreye, değişkene bağlı birer çok değişkenli vektörel fonksiyonlardır. Bu gibi fonksiyonların geometrideki karşılıkları birer hiperyüzeydir ([5], [6]). İşte bu çalışmada, bu amaca uygun bilgiler derlenip toplanıp iyileştirilmesi ve geliştirilmesi hedeflendi. Daha sonra, kısıtlara bağlı bir

* Corresponding author. Email address: ntanriov@baskent.edu.tr

bölgede bir hiperyüzey parçasının, orijinden geçen herhangi bir birim vektöre dik olan bir hiperdüzleme göre lokal maksimum-minimumlarının ve kısıt bölgesinin kenarlarında ve köşelerindeki hiperyüzeyin aldığı değerleri ve bunların ekstremumlarının bulunması için bir algoritma verilmeye çalışıldı. Bulunan bu değerlerin karşılaştırılması ile üretimin en uygun şekilde nasıl planlanması gerektiği belirlenebilir.

2 Temel Bilgiler

Tanım 2.1: S, E^n de bir hiperyüzey olsun. $\forall p \in S$ için S ,

$$H_p^+ = \{q \in E^n : (q - p) \cdot N(p) \geq 0\} \quad \text{veya}$$

$$H_p^- = \{q \in E^n : (q - p) \cdot N(p) \leq 0\}$$

kapalı yarıuzayları içinde kalırsa, S ye konveks (global konveks)tir denir. Burada N, S nin Gauss dönüşümüdür. E^n de R^n metrik uzayıdır.

Tanım 2.2: S yönlendirilmiş bir hiperyüzey olsun. Bir $p \in S$ için p yi içeren E^n nin bir V açık alt kümesi varsa, öyleki $(S \cap V) \subset H_p^+$ veya $(S \cap V) \subset H_p^-$ ise, S ye p noktasında konvekstir denir (Küçük bir aralıkta, komşulukta konveks).

Sonuç 2.1: Konveks bir hiperyüzey $\forall p \in S$ de konvekstir. Ancak, herhangi bir p noktasında konveks olan bir hiperyüzey konveks olmak zorunda değildir.

Tanım 2.3: S konveks bir hiperyüzey ve $\forall p \in S$ için $S \cap H_p = \{p\}$ ise S ye strictly konvekstir denir. Burada H_p ,

$$H_p = \{q \in E^n : (q - p) \cdot N(p) = 0\}$$

hiperdüzlemdir.

Bu H_p, p noktasında S ye teğet hiperdüzlem olur.

S, p de strictly konveks ise S, p de konveks olur.

Tanım 2.4: $S, p \in S$ de konveks bir hiperyüzey ve bu $p \in S$ için

$$(S \cap V) \cap H_p = \{p\}$$

ise S, p de strictly konvekstir denir.

Tanım 2.5: S, E^n de boş olmayan bir küme olsun. $\forall P, Q \in S (P \neq Q)$ noktası için $\overline{PQ} \subset S$ ise S ye konvekstir denir.

Teorem 2.1: $S_1, S_2 E^n$ de konveks iki küme ise

1. $S_1 \cap S_2$ konvekstir.
2. $S_1 + S_2 = \{p_1 + p_2; p_1 \in S_1, p_2 \in S_2\}$ konvekstir.
3. $S_1 - S_2 = \{p_1 - p_2; p_1 \in S_1, p_2 \in S_2\}$ konvekstir.

Tanım 2.6: $Q(x) = x^T . A . x$ bir kuadratik form olsun.

1) $\forall x \neq 0$ için $Q(x) > 0$ ise Q ya pozitif tanımlıdır denir.

2) $\forall x$ için $Q(x) \geq 0$ ise Q ya pozitif yarı tanımlı kuadratik form denir.

Teorem 2.2: Q kuadratik formu pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow A$ nın tüm aygen değerleri pozitifdir.

Teorem 2.3: Bir simetrik A matrisi pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow A$ nın tüm ana alt matrislerinin determinantları pozitifdir.

Teorem 2.4: Bir simetrik A matrisi pozitif yarı tanımlıdır $\Leftrightarrow A$ nın tüm aygen değerleri pozitif veya sıfırdır (negatif değil).

Teorem 2.5: S, E^n de yönlendirilmiş ve $p \in S$ de konveks bir hiperyüzey ise S nin ikinci temel formu II, p de pozitif tanımlıdır. Yani, $II_p(V) > 0$ dir.

İspat: Farzedelim ki $p \in S$ de $(S \cap V) \subset H_p^+$ dir. $\exists V \subset E^n$ açığı ve $v \in S_p$ için bir $\alpha : I \rightarrow S \cap V$ eğrisi alalım öyleki $\alpha(t_0) = p$ ve $\alpha'(t_0) = v$ olsun. Bir $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$h(t) = (\alpha(t) - p) . N(p)$$

olarak tanımlayalım. $\alpha(t) \in H_p^+$ olduğundan $h(t) \geq 0$ dir. Çünkü, $N(p)$ ile $\alpha(t) - p$ vektörü arasındaki açı dar açı olur.

$h(t_0) = 0$ olduğundan h, t_0 da mutlak minimuma ulaşır. Çünkü h nin

en küçük değeri 0 dir. Böylece 2. Temel Form

$$II(v) = \alpha''(t_0) . N(\alpha(t_0)) = h''(t_0) \geq 0$$

bulunur. Zira, $N' = 0$ olduğundan

$$h'(t) = \alpha'(t) . N(p) \Rightarrow h''(t) = \alpha''(t) . N(p) + \alpha'(t) . N'(p) = \alpha''(t) . N(p)$$

$$\alpha''(t) . N(p) = 0 \Leftrightarrow h''(t) = 0 \Leftrightarrow II(v) \geq 0 \Leftrightarrow S, p \text{ de konvekstir.}$$

Eğer $S \subset H_p^-$ ise $\forall v \in S_p$ için eşitsizlik ters döner. Yani $II(v) < 0$ olur.

NOT: Bu teoremin karşıtı doğru değildir ($z = x^2 - y^4$ yüzeyinde olduğu gibi).

Teorem 2.6: S, p de konvekstir $\Leftrightarrow h, p$ de extremum (max veya min) değere ulaşır.

İspat: $p \longleftrightarrow t = t_0$ da ekstremum var $\Leftrightarrow h'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha'(t) . N(p) = 0 \Leftrightarrow \alpha''(t) . N(p) = 0 \Leftrightarrow h''(t) = 0 \Leftrightarrow II(v) \geq 0 \Leftrightarrow S, p$ de konvekstir.

Tanım 2.7 (Yükseklik Fonksiyonu): S, E^n de bir hiperyüzey olsun. $p \in S, q \in S$ olmak üzere

$$h : S \rightarrow \mathbb{R} \\ h(q) = q . N(p)$$

Hiperyüzeylerde Optimizasyon Üzerine

olarak tanımlı h fonksiyonuna yükseklik fonksiyonu denir. h fonksiyonu değişken $q \in S$ noktasının, $N^\perp(p)$ altuzayına olan uzaklığını ya da yüksekliğini verir. $N^\perp(p)$, O dan geçen $N(p)$ ye dik olan altuzaydır. Çünkü,

$$h(p) = q \cdot N(p) = \|q\| \cdot \|N(p)\| \cdot \cos \theta \implies \cos \theta = \frac{h(q)}{\|q\|}$$

NOT: $N(p)$ birim vektörü S nin p deki birim normalinin O ya bağlanmışdır (Gauss dönüşümü). Bunu $Q = \sqrt{L \cdot K}$ Coob-Douglas üretim yüzeyine uygularken, bu yüzeyi $q = S(L, K) = (L, K, \sqrt{L \cdot K})$ olarak alımp uygulanması gerekir.

$$q = S(x, y) = (x, y, \sqrt{xy}), \quad N = \frac{\nabla(Q - \sqrt{xy})}{\|\nabla(Q - \sqrt{xy})\|} \text{ dir.}$$

S, \mathbb{R}^3 de bir yüzey ve u, \mathbb{R}^3 de bir birim vektör olsun. $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, $h(q) = q \cdot u$ olarak tanımlı h , fonksiyonu yükseklik fonksiyonu olur.

Sonuç 2.2: Yükseklik fonksiyonu h , $q \in S$ noktasının, $S_p\{u\}$ nun ortogonal tümleyeni olan u^\perp altuzayı (n -boyutlu bir hiperdüzlem) üstündeki yüksekliğini, yani, $q \in S$ nin u^\perp düzleminden yüksekliğini (u^\perp düzlemine olan uzaklığını) verir.

Örnek 2.1: S yüzeyi $Q = S(x, y) = (x, y, \sqrt{xy})$ olsun. $\vec{u} = (0, 0, 1) = e_3$ alalım. $q \in S$ ise $q = (x, y, \sqrt{xy})$ dir.

$$h(q) = q \cdot u = (x, y, \sqrt{xy}) \cdot (0, 0, 1) = \sqrt{xy} \text{ olur.}$$

Bu $p \in S$ noktasının; $S_p\{e_3\}$ ün ortogonal tümleyeni olan e_3^\perp uzayından; yani $x \circ y$ düzleminden olan yüksekliğini gösterir.

Örnek 2.2: S yüzeyi $Q = S(x, y) = (x, y, 2x + 3y)$ olsun. $\vec{u} = e_3 = (0, 0, 1)$ diyelim. $q \in S$ nin tabandan yani $x \circ y$ düzleminden yüksekliği; $h(q) = q \cdot e_3 = 2x + 3y$ olur. Bu q nun, $x \circ y$ düzleminden olan yüksekliğini gösterir.

S, \mathbb{R}^{n+1} de bir hiperyüzey olsun. $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, $h(q) = q \cdot N(p)$ olarak tanımlı h fonksiyonuna, yükseklik fonksiyonu denmiştir.

Bu fonksiyon yönlü bir uzaklık, yükseklik verir. Çünkü, h , iç çarpımla tanımlanmıştır.

$h, q \in S$ noktasının; O dan geçen ve P deki teğet altuzaya paralel olan altuzaya (hiperdüzleme) uzaklığını ölçer.

Örnek 2.3: $q = Q(x, y) = (x, y, \sqrt{xy})$ veya $Q = z - \sqrt{xy} = 0$ ise $h(q) = q \cdot N(p)$ yükseklik fonksiyonunu hesaplayalım.

$$\text{ÇÖZÜM: } \nabla Q = (Q_x, Q_y, Q_z) = \left(\frac{-y}{2\sqrt{xy}}, \frac{-x}{2\sqrt{xy}}, 1 \right)$$

$$\|\nabla Q\| = \sqrt{\frac{y^2}{4xy} + \frac{x^2}{4xy} + 1} = \sqrt{\frac{y^2 + x^2 + 4xy}{4xy}}$$

$$\|\nabla Q\| = \frac{\sqrt{y^2+x^2+4xy}}{2\sqrt{xy}}$$

$$N = \frac{\nabla Q}{\|\nabla Q\|} = \left(\frac{-y}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}}, \frac{-x}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}}, \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}} \right) \text{ olur.}$$

Bu, $z = \sqrt{xy}$ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır.
 $q = p = (x, y, \sqrt{xy})$ ise

$$h = q.N = \frac{-y.x}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}} + \frac{-xy}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}} + \frac{2xy}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}} = 0$$

çıkıyor. Ancak;

$$q = (1, 9, \sqrt{1.9}) = (1, 9, 3)$$

$$p = (1, 1, \sqrt{1.1}) = (1, 1, 1)$$

ise

$$N(p) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)_0 \quad (0 \text{ da tanjant vektör, Gauss dönüşümü})$$

$$h(q) = q.N(p) = (1, 9, 3) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{6}} - \frac{9}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{6}}$$

bulunur. İç çarpım negatif çıkabilir. Bu yönlü uzaklıktır.

Bu da beklenildiği gibidir. Çünkü, bu h yükseklik fonksiyonu, $q \in S$ noktasının; $S_p \{N(p)\}$ normal uzayının ortogonal tümleyeni olan p deki S nin teğet düzleminin O ya paralel kaymışına olan uzaklığını, yani $(S_p \{N(p)\})^\perp$ teğet düzleminin orijine kaymışından yüksekliğini gösterir.

Tanım 2.7: $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall v \in S_p$ için $D_v h = 0$ ise yani $\alpha(t_0) = p$ olacak biçimdeki her $\alpha \subset S$ eğrisi için $(h \circ \alpha)'(t_0) = 0$ ise, h ya p de stationary(durağan)dır, denir. Burada D , kovaryant türev operatörüdür.

Tanım 2.8: S, E^n de bir hiperyüzey, $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün (C^∞ sınıftan) bir fonksiyon olsun.

Yükseklik fonksiyonu h nin gradient vektör alanı $\text{grad } h$;

$$(\text{grad } h)(p) = \nabla \tilde{h}(p) - \left(\nabla \tilde{h}(p) \cdot N(p) \right) \cdot N(p)$$

olarak tanımlanır. Burada \tilde{h} , h nın S yi içeren bir açık alt küme üzerine düzgün bir genişletilmiştir. N de S nin birim normal vektör alanıdır.

NOT: $\text{grad } h$, S üstünde düzgün (diferensiyellenebilir) bir teğet vektör alanıdır. Ayrıca, $\text{grad } h$, $\nabla \tilde{h}$ nın teğetsel bileşenidir.

Teorem 2.7: $\text{grad } h$, aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\forall p \in S, \forall v \in S_p$ için $D_v h = (\text{grad } h)(p) \cdot v$ dir. ($D_v h$, E^n deki kovaryant türev)
2. $\alpha : I \rightarrow S$ herhangi parametrelendirilmiş bir eğri ise,

$$(h \circ \alpha)'(t) = ((\text{grad } h)(\alpha(t))) \cdot \dot{\alpha}(t)$$

dir.

3. $(\text{grad } h)(p) = \sum_{i=1}^n (D_{v_i} h) \cdot v_i$ dir. Burada $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, S_p nin orto-normal bir bazıdır.

4. $(\text{grad } h)(p) = 0 \Leftrightarrow h, p$ de stationary(durağan, sabit) dir.

Özellikle, $\text{grad } h, \tilde{h}$ genişletmesinin seçilişinden bağımsızdır. 2. özellik, zincir kuralının bir değişik formudur ([1]).

İspat:

- 1) $D_v h = D_v \tilde{h} = D \tilde{h}(p) \cdot v = (\text{grad } h)(p) \cdot v$ olduğundan 1. özellik doğrudur.
- 2) $(h \circ \alpha)'(t) = D_{\dot{\alpha}(t)} h$ olduğundan ve 1. den 2. özellik elde edilir.
- 3) $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için v_j ile 2 nin iki tarafını çarparsak

$$v_j \cdot (h \circ \alpha)'(t) = v_j \cdot D_{\dot{\alpha}(t)} h$$

ve 1. kullanılırsa, 3 ün doğru olduğu görülür.

- 4) 1. ve 3. özellik; birlikte gerektirir ki

$$\forall v \in S_p \text{ için } (\text{grad } h)(p) = 0 \Leftrightarrow D_v h = 0$$

Bu da 4. özelliği oluşturur. (Çünkü, $\forall v \in S_p$ için $D_v h = 0$ ise $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in S$ de stationary (durağan)dır. Yani S de $\alpha(t_0) = p$ olmak üzere her parametrelendirilmiş α eğrisi için $(h \circ \alpha)'(t) = 0$ dir.)

Tanım 2.9: $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $p \in S$ noktasında stationary ise yani $(\text{grad } h)(p) = 0$ ise, p ye h nin kritik noktası denir.

Düzgün bir $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu kritik noktalarda üç çeşit durum gösterir: Lokal minimum, lokal maksimum, eyer noktası.

3 Hiperyüzeylerde Ekstremler

Tanım 3.1: W, E^n nin bir açık alt kümesi, $v = W \cap S$ ise $v \subset S$ ye S nin bir açık alt kümesi denir.

Tanım 3.2: $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $p \in v \subset S$ ve v, S nin bir açık alt kümesi olsun.

- 1) $\forall q \in v$ için $h(q) \geq h(p)$ ise h, p de lokal minimuma ulaşır denir.

- 2) $\forall q \in v$ için $h(q) \leq h(p)$ ise h, p de lokal maksimuma ulaşır denir.
 3) h, p de stationary ve extremuma sahip değilse p ye eyer noktası denir.
 4) Eşitlikler yoksa, h, p de strictly lokal extremuma sahiptir, denir.
 $(\text{grad } h)(p) = 0$, h nin kritik bir p noktası için 1. türev testidir.

Kritik noktaların tipini ayırtetmek için 2. türev testine ihtiyaç vardır.

Tanım 3.4 (Hessian Form): $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir kritik noktası p olsun.

$$H_p : S_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} H_p(v) &= D_v(\text{grad } h) \cdot v \\ &= D_v(\text{grad } h) \end{aligned}$$

formuna, h nin p deki Hessian'i denir [1, 2, 3, 9].

Böylece $H_p; v$ yi $D_v(\text{grad } h)$ ya gönderen, S üstünde self-ajoint lineer bir dönüşümle birleştirilmiş bir kuadratik form olur.

$$\forall v \in S_p \text{ için } D_v(\text{grad } h) \in S_p.$$

Çünkü $\text{grad } h = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} D_v(\text{grad } h) \cdot N(p) &= D_v((\text{grad } h) \cdot N) - (\text{grad } h)(p) \cdot D_v N \\ &= D_v(0) - 0 \cdot D_v N = 0 \implies D_v(\text{grad } h) \in S_p \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1 (Lokal Extremumlar için 2. türev testi): S, E^n de bir hiperyüzey, $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in S$ noktasında stationary olan bir düzgün fonksiyon ve H_p, p noktasında h nin Hessian'ı olsun.

- 1) Eğer h, p de lokal minimuma sahipse H_p yarı pozitif definittir. Yani;

$$(H_p(v) \geq 0),$$

eğer h, p de lokal maksimuma sahipse H_p yarı negatif definittir. Yani;

$$(H_p(v) \leq 0).$$

dır.

2) Eğer H_p pozitif definit ($H_p(v) > 0$) ise h, p de bir strict lokal minimuma sahiptir. Eğer H_p negatif definit ($H_p(v) < 0$) ise h, p de bir strict lokal maksimuma sahiptir [1].

İspat:

1) Farzedelim ki h, p de lokal minimuma sahip olsun. $v \in S_p$ için $\dot{\alpha}(t_0) = v$ olacak biçimde bir $\alpha : I \rightarrow S$ eğrisini alalım. O zaman $\forall t \in I$ için

$$(h \circ \alpha)'(t) = (\text{grad } h)(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t)$$

dir. iki tarafın t ye göre türevi alınır ve $t = t_0$ konursa

$$0 \leq (h \circ \alpha)''(t_0) = D_v(\text{grad } h) \cdot \dot{\alpha}(t_0) + (\text{grad } h)(\alpha(t_0)) \cdot \dot{\alpha}(t_0) = H_p(v)$$

bulunur. Çünkü $(\text{grad } h)(p) = 0$ dir.

Böylece H_p yarı pozitif definit bulunur.

Lokal maksimum için ispat benzer biçimde yapılır.

2) Bunun ispatı için, eğer h, p de strict lokal minimuma sahip değilse H_p nin pozitif definit olamayacağını göstermek yeterlidir. Çünkü $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ dir.

Farzedelim ki h, p de strict lokal minimuma sahip olmasın. O zaman $S - \{p\}$ de bir $\{p_k\}$ dizisi olmalıdır, $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$ olacak biçimde, öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}^+$ için $h(p_k) \leq h(p)$

Her bir k için $v_k = \frac{(p_k - p)}{\|p_k - p\|}$ diyelim. O zaman $\{v_k\}$, S^n birim küresinde bir dizidir. S^n kompakt olduğundan, $\{v_k\}$ yakınsak bir alt diziyeye sahip olmalıdır. $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$ olsun.

$v = (p, v) \in S_p$ ve $H_p(v) \leq 0$ olduğunu göstereceğiz.

W, \mathbb{R}^{n+1} de p yi taşıyan bir açık yuvarlak olsun, öyle ki h nin düzgün genişletilmesi \tilde{h} ve $(S$ de tanımlı düzgün bir fonksiyon $f^{-1}(c)$ olmak üzere) f, W üstünde tanımlıdır. O zaman, yeterli büyüklükteki k için $p_k \in W$ olur. $g(t) = f(p + t \cdot v_k)$ ya ortalama değer teoremini uygularsak, $\exists t_k \in (0, \|p_k - p\|)$ için

$$0 = \frac{f(p_k) - f(p)}{\|p_k - p\|} = \frac{g(\|p_k - p\|) - g(0)}{\|p_k - p\| - 0} = g'(t_k) = \nabla f(p + t_k \cdot v_k) \cdot v$$

bulunur. Burada $V_k = (p + t_k \cdot V_k, V_k)$ dir. $k \rightarrow \infty$ için limit alırsak $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$ olduğundan $0 = \nabla f(p) \cdot v$ bulunur. Dolayısıyla $v \in S_p$ dir.

Şimdi $H_p(v) \leq 0$ olduğunu gösterelim.

$$(\text{grad } h)(p) = 0 \text{ ve } \lambda = \frac{\nabla \tilde{h}(p) \cdot \nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|^2}$$

olduğundan $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için $\nabla \tilde{h}(p) = \lambda \nabla f(p)$ dir. $\alpha_k(t) = p + t.v_k$ olmak üzere Taylor teoremini $g_k(t) = \left(\tilde{h} - \lambda f \right) (\alpha_k(t))$ ye uygulayalım.

$$g'_k(t) = \nabla \left(\tilde{h} - \lambda f \right) (\alpha_k(t)) \cdot \dot{\alpha}_k(t) = \left(\nabla \tilde{h} - \lambda \nabla f \right) (\alpha_k(t)) \cdot (\alpha_k(t), v_k)$$

ve

$$g''_k(t) = \nabla_{\dot{\alpha}_k(t)} \left(\nabla \tilde{h} - \lambda \nabla f \right) (\alpha_k(t), v_k)$$

olduğundan $\exists t_k \in (0, \|p_k - p\|)$ için

$$\begin{aligned} g_k(\|p_k - p\|) &= g_k(0) + g'_k(0) \|p_k - p\| + \frac{1}{2} g''_k(t_k) \|p_k - p\|^2 \\ &= g_k(0) + \left(\left(\nabla \tilde{h} - \lambda \nabla f \right) (p) \cdot (p, p_k) \right) \cdot \|p_k - p\| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\nabla_{\dot{\alpha}_k(t)} \left(\nabla \tilde{h} - \lambda \nabla f \right) \right) (\alpha_k(t), v_k) \cdot \|p_k - p\|^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$\nabla \tilde{h}(p) = \lambda \nabla f(p)$ olduğundan, orta terim 0 dir.

Böylece

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{h(p_k) - h(p)}{\|p_k - p\|^2} = \frac{\tilde{h}(p_k) - \tilde{h}(p)}{\|p_k - p\|^2} && (f(p_k) = f(p) = c \text{ olduğundan}) \\ &= \frac{\left(\tilde{h} - \lambda f \right) (p_k) - \left(\tilde{h} - \lambda f \right) (p)}{\|p_k - p\|^2} \\ &= \frac{g_k(\|p_k - p\|) - g_k(0)}{\|p_k - p\|^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(D_{\dot{\alpha}_k(t)} \left(\nabla \tilde{h} - \lambda \nabla f \right) \right) \cdot (\alpha_k(t_k), v_k) \end{aligned}$$

elde edilir.

$k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$0 \geq \frac{1}{2} D_v \left(\nabla \tilde{h} - \lambda \nabla f \right) \cdot v \quad \dots (1)$$

bulunur. Oysa,

$$\begin{aligned}
 H_p(v) &= D_v(\text{grad } h) \cdot v \\
 &= D_v \left(\nabla \tilde{h} - \left(\nabla \tilde{h} - N \right) N \right) \cdot v \\
 &= D_v \left(\nabla \tilde{h} - \frac{\nabla \tilde{h} \cdot \nabla f}{\|\nabla f\|^2} \cdot \nabla f \right) \cdot v \\
 &= D_v \left(\nabla \tilde{h} \right) \cdot v - \nabla_v \left(\frac{\nabla \tilde{h} \cdot \nabla f}{\|\nabla f\|^2} \right) \cdot \nabla f(p) \cdot v - \left(\frac{\nabla \tilde{h} \cdot \nabla f}{\|\nabla f\|^2} \right) (p) \cdot \nabla_v (\nabla f) \cdot v \\
 &= D_v \left(\nabla \tilde{h} \right) \cdot v - \lambda \nabla_v (\nabla f) \cdot v \\
 &= D_v \left(\nabla \tilde{h} - \lambda \nabla f \right) \cdot v
 \end{aligned}$$

dir. Buna göre, (1) den $H_p(v) \leq 0$ elde edilir [1].

O halde, h , p noktasında strict lokal minimuma sahip değilse S nin Hessian'ı H_p pozitif definit olamaz.

h , p de strict lokal maksimuma sahip değilse, H nin negatif definit olmayacağı benzer biçimde ispatlanır.

$H_p(v)$ nin işareti incelenerek, p noktasının lokal ekstremum nokta olup olmadığı belirlenir.

Örnek 3.1: $q = Q(x, y) = (x, y, \sqrt{xy})$, $(x, y > 0)$ ve $z - \sqrt{xy} = 0$ yüzeyi S olsun. $u = (0, 0, 1) = e_3$ için $h(q) = q \cdot u = \sqrt{xy}$ olur.

$$\text{grad } h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \left(\frac{y}{2\sqrt{xy}}, \frac{x}{2\sqrt{xy}} \right) = \left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}, \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \right) = (Y_1, Y_2)$$

olur. $\text{grad } h = 0$ in kökü yok. O halde S nin kritik noktası yoktur.

h nin Hessian'ı $H_p(v) = D_v(\text{grad } h) \cdot v$ den hesaplanır.

$$\begin{aligned}
 D_v(\text{grad } h) &= (v \cdot \text{grad } Y_1, v \cdot \text{grad } Y_2) \\
 &= \left(v \cdot \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}, \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right), v \cdot \left(\frac{\partial Y_2}{\partial x}, \frac{\partial Y_2}{\partial y} \right) \right)
 \end{aligned}$$

dir.

S üstüne $x = t$, $y = 1 - t$, $z = \sqrt{t(1-t)}$ eğrisini

$$\alpha(t) = \left(t, 1 - t, \sqrt{t - t^2} \right)$$

olarak alalım.

$$v = \alpha'(t) = \left(1, -1, \frac{1-2t}{2\sqrt{t-t^2}}\right)$$

olur.

S_p teğet uzayın bir baz $B = \{Q_x|_p, Q_y|_p\}$ dir.

$Q_x = \left(1, 0, \frac{y}{2\sqrt{xy}}\right)$, $Q_y = \left(0, 1, \frac{x}{2\sqrt{xy}}\right)$ vektör alanları α eğrisi boyunca, $x = t$, $y = 1 - t$ olduğundan, $Q_x = \left(1, 0, \frac{1-t}{2\sqrt{t(1-t)}}\right)$, $Q_y = \left(0, 1, \frac{t}{2\sqrt{t(1-t)}}\right)$ ye dönüşür. Bu B bazına göre v vektörü $v = 1.Q_x - 1.Q_y = (1, -1)_B$ olur.

$$v.\text{grad } Y_1 = 1.\frac{\partial Y_1}{\partial x} - 1.\frac{\partial Y_1}{\partial y}$$

$$v.\text{grad } Y_2 = 1.\frac{\partial Y_2}{\partial x} - 1.\text{grad } Y_2 \partial y$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_v(\text{grad } h) &= (v.\text{grad } Y_1, v.\text{grad } Y_2) \\ &= \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_1}{\partial y}, \frac{\partial Y_2}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

olur.

h nin Hessian'ı

$$H_p(v) = D_v(\text{grad } h).v = 1.\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right) - 1.\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right)$$

$$H_p(v) = -\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{6\sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}}$$

bulunur. $x.y > 0 \implies H_p(v) < 0$. Ancak, $\text{grad } h = 0$ m kökü olmadığından p kritik nokta değildir. O halde S nin lokal ekstremumu yoktur.

Teorem 3.2: u, E^n de birim vektör ve p, S nin bir kritik noktası ise

$$H_p(v) = \mp II_p(v)$$

dir.[1]

İspat: u, E^n nin bir birim vektörü olsun. $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ yükseklik fonksiyonu için

$$h_u(q) = q.u$$

olarak tanımlı h_u yükseklik fonksiyonunu alalım. Bu q nun u^\perp hiperdüzlemine olan uzaklığını (yüksekliğini) verir.

Hiperyüzelerde Optimizasyon Üzerine

$\forall p \in E^n$ ve $\forall v \in T_{E^n}(q)$ için

$$\tilde{h}_u(q) = q \cdot u$$

$$D\tilde{h}_u(q) = (q, u)$$

$$D_v \left(\nabla \tilde{h}_u \right) = 0$$

dır. $\tilde{h}_u|_S = h_u$ dir.

$p \in S$, h_u nun kritik noktasıdır $\iff (p, u) = \lambda \nabla f(p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. u birim vektör olduğundan

$$|\lambda| = \frac{1}{\|\nabla f(p)\|}$$

olmalıdır. Böylece p kritik noktadır $\iff (p, u) = \mp N(p)$

Eğer, p , h_u nun kritik noktası ve $v \in S_p$ ise

$$\begin{aligned} H_p(v) &= D_v \left(\nabla \tilde{h}_u - \left(\nabla \tilde{h}_u \cdot N \right) N \right) \cdot v \\ &= \left(\nabla \tilde{h}_u \cdot N \right) (p) (-\nabla_v N \cdot v) \\ &= (u \cdot N(p)) II_p(v) \\ &= \mp 1 \cdot II_p(v) \end{aligned}$$

bulunur [1].

Teorem 3.3: S , E^n de yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve S nin ikinci temel formu II , p de pozitif veya negatif definit ise S , p de strictly konvektir.

İspat: S nin p de strictly konveks olması için gerek ve yeter koşul, $h_{N(p)} : S \rightarrow \mathbb{R}$ yükseklik fonksiyonunun p de strict lokal ekstremumma sahip olmasıdır. Bu ise $h_{N(p)}$ nin p de stationary olması halidir.

$$H_p = \mp II_p$$

olduğundan II_p definit olur ($II_p > 0$ veya $II_p < 0$).

Bu durumda S , p noktasında bir ekstremum değere sahiptir. Dolayısıyla S nin ekstremum noktalarını bulmak için ikinci temel formdan da yararlanılabilmektedir.

4 Hiperyüzelerde Optimizasyon

1) Optimizasyon problemlerinde, optimum (ekstremum) uygun noktaları bulmak için önce, hiperyüzeyin kritik noktaları bulunur. Hessian'ın bu noktalarda aldığı değerlere bakarak noktaların maksimum veya minimum oldukları ayırtedilebilir. Bunlar lokal ekstremum noktalardır.

2) Kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde ise, kısıtlılık bölgesinin köşelerinde aldığı değerlerle, kısıt altuzay parçalarında fonksiyonun aldığı ekstremum değerler araştırılır.

Bunun için, kısıt bölgesinin yüzlerini oluşturan alt uzay parçaları ile (ayırtlar, şimdilik lineer yarı alt uzay parçaları) asıl hiperyüzeyin alt hiperyüzeyleri alınır. Bunların tümünün ekstremumları aynı yöntemle hesaplanır. Bunlar, lokal ekstremum değerler ile karşılaştırılır. En büyük değer veya en küçük değer, çözüm için istenen optimum değerlerdir.

3) Daha sonra bulunan tüm ekstremum değerler bir kümede toplanır. Bu kümenin en büyük elemanı veya en küçük elemanı istenen optimum değerlerdir.

NOT: Bu hesaplamalarda, Simpleks yönetimi gibi bilgisayar programlarından yararlanılabilir. Kısıtlar lineer olmadığı takdirde, Lagrange çarpımı yönteminden de yararlanılabilir [7, 8].

Şimdi, yukarıda verilen teorik bilgilerin, uygulamalarda nasıl yapılabileceğini gösteren birkaç örnek verelim.

Örnek 4.1: S yüzeyi $q = Q(x, y) = (x, y, \sqrt{xy})$ parametrizasyonu ile verilsin. $B = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ kısıtlayıcısına göre $u = (0, 0, 1)$ yönünde u^\perp uzayına göre ($x \circ y$ düzlemine göre) ekstremum noktalarını ve değerlerini bulalım.

1) Yükseklik fonksiyonu $h(q) = \sqrt{xy}$ idi. $\text{grad } h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (0, 0) \Rightarrow \frac{y}{2\sqrt{xy}} = 0, \frac{x}{2\sqrt{xy}} = 0$ için $x, y \in \mathbb{R}$ yoktur. Dolayısıyla B bölgesinde lokal ekstremumlar yoktur.

2) B bölgesinin köşe noktaları $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ dir.

$Q(0, 0) = (0, 0, 0), \quad Q(1, 0) = (1, 0, 0), \quad Q(0, 1) = (0, 1, 0)$ dir.

Buradaki yükseklikler 0 dir.

3) B bölgesinin sınır altuzay parçaları $\overline{OA}, \overline{OC}$ ve \overline{AC} doğru parçalarıdır. \overline{OA} ya karşılık gelen yüzey parçası $Q(x, 0) = (x, 0, \sqrt{x \cdot 0}) = (x, 0, 0)$ doğrusudur. Buradaki yükseklik 0 dir. \overline{OC} ye karşılık gelen yüzey parçası $Q(0, y) = (0, y, \sqrt{0 \cdot y}) = (0, y, 0)$ doğrusudur. Buradaki yükseklik de 0 dir. \overline{AC} ye karşılık gelen yüzey parçası $Q(t, 1-t) = (1, 1-t, \sqrt{t-t^2})$ eğrisidir. Yük-

Hiperyüzelerde Optimizasyon Üzerine

seklği $h = \sqrt{t - t^2}$ dir.

$$h'(t) = \frac{1 - 2t}{2\sqrt{t - t^2}} = 0 \implies t = \frac{1}{2} \text{ için } h = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ çıkar.}$$

Bu maksimum değerdir. Maksimum nokta $Q(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ noktasıdır.

Bütün bunlar gözönüne alırsa, S nın B üstünde maksimum noktasının $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ noktası olduğu, maksimum değerinin de $\frac{1}{2}$ olduğu anlaşılır.

Örnek 4.2: S yüzeyi $q = Q(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 + 1)$ yani $z - x^2 - y^2 - 1 = 0$ olsun. $u = (0, 0, 1) = e_3$ için $h(q) = q \cdot u = x^2 + y^2 + 1$ olur. Ekxtremumları bulalım.

$\text{grad } h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (2x, 2y) = (Y_1, Y_2) = 0 \implies x = 0, y = 0 \implies (0, 0, 1) = p \in S$ noktası S nin kritik noktasıdır. h nin Hessian'ı

$$\begin{aligned} H_p(v) &= D_v(\text{grad } h) \cdot v \\ &= (v \cdot \text{grad } Y_1, v \cdot \text{grad } Y_2) \\ &= \left(v \cdot \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}, \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right), v \cdot \left(\frac{\partial Y_2}{\partial x}, \frac{\partial Y_2}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

den hesaplanır.

S üstünde $x = \cos t, y = \sin t, z = 1$ eğrisini, yani

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$$

çemberini alalım.

$$v = \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

olur. S_p teğet uzayının bir bazı $B = \{Q_x, Q_y\}$ dir.

$Q_x = (1, 0, 2x), Q_y = (0, 1, 2y)$ vektör alanlarını α eğrisini kısıtlarsak

$Q_x = (1, 0, 2 \cos t), Q_y = (0, 1, 2 \sin t)$ olur. Bu B bazına göre v

vektörü $v = (-\sin t, \cos t)_B$ olarak yazılır.

$$v \cdot \text{grad } Y_1 = (-\sin t, \cos t) \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}, \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) = (-\sin t, \cos t) \cdot (2, 0) = -2 \sin t$$

$$v \cdot \text{grad } Y_2 = (-\sin t, \cos t) \left(\frac{\partial Y_2}{\partial x}, \frac{\partial Y_2}{\partial y} \right) = (-\sin t, \cos t) \cdot (0, 2) = 2 \cos t$$

çıkar.

$$D_v(\text{grad } h) = (v \cdot \text{grad } Y_1, v \cdot \text{grad } Y_2) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \text{ olur.}$$

$$h \text{ nin Hessian'ı } H_p(v) = D_v(\text{grad } h) \cdot v = 2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t = 2 > 0$$

$\forall x, y$ için $H_p = 1 > 0 \implies p = (0, 0, 1)$ lokal minimumdur.

2.YÖL: $z = x^2 + y^2 + 1$

$$z_x = 2x \quad z_y = 2y \quad z_{xx} = 2 \quad z_{yy} = 2 \quad z_{xy} = 0 \text{ olduğundan}$$

$H = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \implies x = 0, y = 0$ de lokal minimum var.

Şimdi S nin $p(0, 0, 1)$ noktasında 2. temel formunu bulalım.

$$Q(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 + 1)$$

idi.

$$\begin{aligned} Q_x &= (1, 0, 2x), & Q_y &= (0, 1, 2y) \implies \|Q_x\| = \sqrt{1 + 4x^2}, \|Q_y\| = \sqrt{1 + 4y^2} \\ Q_{xx} &= (0, 0, 2), & Q_{yy} &= (0, 0, 2), & Q_{xy} &= (0, 0, 0) = Q_{yx} \\ Q_x \cdot Q_y &\neq 0 \implies \text{Şekil operatörünün matrisi} \end{aligned}$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{-\det(Q_{xx}, Q_x, Q_y)}{\|Q_x\|^3 \|Q_y\|} & \frac{-\det(Q_{xy}, Q_x, Q_y)}{\|Q_x\|^2 \|Q_y\|^2} \\ \frac{-\det(Q_{xy}, Q_x, Q_y)}{\|Q_x\|^2 \|Q_y\|^2} & \frac{-\det(Q_{yy}, Q_x, Q_y)}{\|Q_x\|^3 \|Q_y\|} \end{bmatrix}$$

dir.

$$\begin{aligned} \det(Q_{xx}, Q_x, Q_y) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = 2; \\ \det(Q_{yy}, Q_x, Q_y) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = 2 \text{ olduğundan} \end{aligned}$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{(1+4x^2)^3} \sqrt{1+4y^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{(1+4x^2)^3} \sqrt{1+4y^2}} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$x = 0, \quad y = 0 \text{ için } W|_p = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ çıkar.}$$

$p = (0, 0, 1)$ deki İkinci Temel form: $W_p(v) \cdot v$ dir.

$$W_p(v) = (2 \sin t, -2 \cos t)$$

olur.

$$II_{p(v)} = W_p(v) \cdot v = -2 \sin^2 t - 2 \cos^2 t = -2$$

bulunur.

$p = (0, 0, 1)$ deki Hessian'da $H_p(v) = 2$ bulunmuştu.

O halde, gerçekten $H_p(v) = \mp II_p(v) \cdot v$ dir.

S yüzeyi $q = Q(x, y) = (x, y, x^2 + y^2 + 1)$ in Gauss dönüşümünü bulalım.

Hiperyüzelerde Optimizasyon Üzerine

Bu yüzeyin herhangi bir p noktasında normal vektör alanı N ,

$$N = Q_x \wedge Q_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

dir. $\|N\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$

Birim normal vektör alanı

$$N = \frac{N}{\|N\|} = \left(\frac{-2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \right) \text{ dir.}$$

$p = (1, 1, 3)$ için $N_p = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3} \right)_p$ dir. Bunun orijine yani O ya paralel taşınmış olan tanjant vektör (Gauss dönüşümü yapılmış oluyor) $N(p) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3} \right)_O$ veya $N(p) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ olur.

Değişken $q \in S$ noktası için h yükseklik fonksiyonu

$$h(q) = q \cdot N(q) = (x, y, x^2 + y^2 + 1) \cdot \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$h(q) = \frac{-2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{1}{3}$$

olur. Bu, h fonksiyonunun değişken $q \in S$ noktasının $N^\perp(p) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3} \right)_O^\perp$ dik uzayına göre yüksekliğini verir.

Özel olarak $h(p) = h(1, 1) = -\frac{1}{3}$ değeri p nin $N^\perp(p)$ altuzayına olan yönlü uzaklığı gösterir. Bu altuzaya mutlak uzaklığı $\frac{1}{3}$ demektir.

Bu hesaplamalar, herhangi bir vektör yönünde ve herhangi bir düzleme göre, benzer biçimde yapılabilir. Ancak, hesaplar biraz daha karışık olur.

5 Sonuç ve Tartışma

Endüstride ve ekonomide üretim, toplam maliyet gibi kavramlar en önemli kavramlardır. Bazı durumlarda bunların matematiksel olarak birer fonksiyon oldukları görülür.[4]. Çok boyutlu üretim ve bunların toplam maliyet fonksiyonları n -değişkenli, m -boyutlu lineer veya nonlineer vektörel fonksiyonlar olarak karşımıza çıkar. Bunların analitik ifadeleri, yani formülüzasyonları belirlenmişse; gelecekte emek, yatırım, zaman gibi parametrelerin değişiminde üretimin ne olacağı, toplam maliyetin ne olacağı tam olarak olmasa da yaklaşık olarak kestirilebilir. Belli kısıtlar altında üretim fonksiyonu, toplam maliyet fonksiyonu gibi fonksiyonların ekstremum noktalarının veya en uygun noktalarının bilinmesi; üretim planlaması, dolayısıyla işletmelerin, kurumların, fabrikaların, imalathanelerin daha verimli çalışabilmeleri için çok önemli katkılar sağlar.

6 Kaynaklar

- [1] Jonh A. Thorpe. Elementary Topics in Differential Geometry. Springer-Verlag, New York. 1979. pp. 95-100
- [2] Stephen Nash, Ariela Sofer, Linear and Nonlinear Programming. The McGraw-Hill Companies Inc., New York, 1996. pp: 338-650
- [3] Mokhtar S. Bazaran, C.M. Shetty. Nonlinear Programming Theory and Algorithms. John Wiley & Sons, New York, 1979. pp:252
- [4] Jafolich C. Arya, Robin W. Lardner. Mathematical Analysis, Prentice Hall, Inc. New York 1993 pp :768
- [5] Boothby M. William. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry Academic Press. New York, 1995. pp:363-369
- [6] Kobayashi S. , Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. vol:2. Interscience Publishers, New York, 1967. pp:40-46
- [7] A. A. Groenwold. Positive definite separable quadratic programs for non-convex problems, Structural Multidisciplinary Optimization, (2012) 46:795–802, DOI 10.1007/s00158-012-0810-8
- [8] Zh. B. Zhu, J. B. Jian. An Improved Feasible QP-free Algorithm for Inequality Constrained Optimization, Acta Mathematica Sinica, English Series, Dec., 2012, Vol. 28, No. 12, pp. 2475–2488, DOI: 10.1007/s10114-012-0561-x
- [9] M. Petrache, Meaning of the Hessian of a function in a critical point, February 1, 2012, <http://www.math.ethz.ch/~petrache/hessian.pdf>