



Periyodik Derivasyona Sahip Sonlu Boyutlu Kompleks Lie Cebirlerinin Bazı Özellikleri

Duygu YAMAN^{1*}, Nil MANSUROĞLU²

¹Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 40100, Kırşehir

²Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 40100, Kırşehir

*Tüm yazarların orcid bilgileri: 0000-0002-6400-2115, 0009-0000-0024-3406

*Sorumlu yazar e-mail: duygu4055@gmail.com

Araştırma Makalesi ÖZET

Makale Tarihiçesi:

Geliş tarihi: 23.05.2025
Kabul tarihi: 18.06.2025
Online Yayınlanma:
30.06.2025

Anahtar Kelimeler:

Lie cebirleri
Nilpotent Lie cebirleri
Derivasyon
Periyodik derivasyon

Bu çalışmanın temel amacı karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde tanımlı ve periyodik derivasyona sahip olan sonlu boyutlu Lie cebirlerinin yapısını araştırmaktır. Literatürde Lie cebirleri ve derivasyonları üzerine çok sayıda çalışmalar mevcuttur. Bunun için konu ile ilgili mevcut literatür taraması kapsamlı bir şekilde yapılmış ve yapılan çalışmalar incelenmiştir. Literatürde elde edilen araştırmalar ve çalışmalar doğrultusunda karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde tekil olmayan derivasyona sahip olan Lie cebirlerinin nilpotent olduğu ispatlandı. Bu çalışmada ise periyodik derivasyona sahip olan sonlu boyutlu kompleks Lie cebirlerinin ya abelyen ya da nilpotent olduğu gösterildi. Elde edilen sonuçlar Lie cebirlerinin yapısal özelliklerinin anlaşılmasında katkı sağlamaktadır.

Some Properties of Finite Dimensional Complex Lie Algebras Satisfying a Periodic Derivation

Research Article

ABSTRACT

Article History:

Received: 23.05.2025
Accepted: 18.06.2025
Published online:
30.06.2025

Keywords:

Lie algebras
Nilpotent Lie algebras
Derivation
Periodic derivation

The main objective of this study is to investigate the structure of finite dimensional Lie algebras defined over a field of characteristic zero and admitting a periodic derivation. The literature includes numerous studies on Lie algebras and derivations. Within this context an extensive literature review has been conducted. Based on previous studies it has been proven that Lie algebras with non-singular derivation over fields of characteristic zero are nilpotent. In this study it is shown that finite dimensional complex Lie algebra admitting a periodic derivation are either abelian or nilpotent. The results contribute to the understanding of the structural properties of Lie algebras.

ISSN: 2979-9198

To Cite: Yaman, D., & Mansuroğlu, N. (2025). Periyodik derivasyona sahip sonlu boyutlu kompleks Lie cebirlerinin bazı özellikleri. *Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 3(1), 22-25.

1. GİRİŞ

M.S. Lie tarafından 1870 yılında tanımlanan Lie cebirleri, matematiğin ve fiziğin birçok alanında yer almaktadır. Lie cebirleri ile ilgili literatürde birçok çalışma yer almaktadır. Bu çalışmada Lie cebirlerinin derivasyonları ve özellikleri incelenmiştir. Özellikle periyodik derivasyona sahip sonlu boyutlu kompleks Lie cebirlerinin yapısı üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Literatürde tekil olmayan derivasyonlara sahip olan Lie cebirleri üzerine (Burde, 2002) ve (Konstrikin ve Kuznetsov, 1995) gibi birçok çalışma yer almaktadır. 1955 yılında Jacobson makalesinde karakteristiği sıfır olan cisim üzerinde tekil olmayan derivasyona sahip olan Lie cebirlerinin nilpotent olduğunu gösterdi. Ancak bu durum karakteristiği asal sayı p olan cisim üzerinde Lie cebirleri için daha karışıktır. Benkart ve ark. (1995) makalesinde karakteristiği asal sayı p olan cisim üzerinde tekil olmayan derivasyona sahip olan Lie cebirlerinin nilpotent olmadığı ispatlanmıştır. 1999 yılında Shalev (1999) terslenebilir derivasyonların mertebeleri ile ilgili birçok çalışma yapmıştır.

Bu çalışmanın amacı abelyen olmayan periyodik derivasyona sahip kompleks Lie cebirlerinin yapısını ve periyodik derivasyonun hangi özelliklere sahip olduğunu incelemektir.

2. MATERYAL VE METOT

Bu bölümdeki temel kavramlar (Mansuroğlu, 2022) kaynağından yararlanarak ifade edilmiştir.

Tanım 2.1: $(L, \cdot)$, F cismi üzerinde bir cebir olsun. O zaman L cebiri

(L1) her $u \in L$ için $uu = 0$ (anti-komütatiflik)

(L2) her $u, v, w \in L$ için $(uv)w + (vw)u + (wu)v = 0$ (Jacobi özdeşliği)

koşullarını sağlıyorsa L ye Lie cebiri denir.

Tanım 2.2: $(L, \cdot)$, F cismi üzerinde birleşmeli bir cebir olsun. F cismi üzerinde

$$[\cdot]: L \times L \rightarrow L, (u, v) \mapsto [u, v] = uv - vu$$

şeklinde yeni bir çarpım tanımlansın. Bu çarpıma Lie çarpımı denir.

Tanım 2.3: L , F cismi üzerinde bir Lie cebiri ve K , L nin alt vektör uzayı olsun. Her $u, v \in K$ için $[u, v] \in K$ ise K ya L nin bir Lie alt cebiri denir. I , L nin bir alt vektör uzayı olsun. Her $u \in L$ ve $v \in I$ için $[u, v] \in I$ olduğu durumda I ya L nin bir ideali denir.

Tanım 2.4: L , F cismi üzerinde bir Lie cebir olsun. Her $u, v \in I$ için $[u, v] = 0$ oluyorsa L ye abelyen Lie cebir denir.

Tanım 2.5: L , F cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. $L^1 = L$ ve $s > 1$ tamsayısı için $L^{s+1} = [L^s, L]$ olmak üzere L nin ideallerinin $L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \dots \supseteq L^s \supseteq \dots$ bir azalan serisi elde edilir. Bu seriye L nin azalan merkezi serisi denir. $k > 0$ tamsayısı için $L^k = 0$ ise L ye nilpotent Lie cebiri denir. $L^c \neq 0$ ve $L^{c+1} = 0$ olacak şekilde c pozitif tamsayısı varsa c ye L nin nilpotentlik sınıfı denir.

Tanım 2.6: L , bir Lie cebir olsun. $\delta: L \rightarrow L$ lineer dönüşümü her $u, v \in L$ için

$$\delta([u, v]) = [\delta(u), v] + [u, \delta(v)]$$

koşulunu sağlıyorsa $\delta \in \text{End}(L)$ ye L nin bir derivasyonu denir. L nin bütün derivasyonlarının kümesi $\text{Der}(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.7: L , $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ bazına sahip n -boyutlu bir F -cebir ve δ , L üzerinde tanımlı bir derivasyon olsun. Eğer bazı lineer baz elemanları için $\delta(\beta_i) \in F\beta_i$ oluyorsa δ derivasyonuna yarı basit denir.

Bu çalışma boyunca L , sonlu boyutlu bir kompleks Lie cebir olarak kabul edilecektir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tanım 3.1: L , bir Lie cebir olsun. id birim dönüşüm olmak üzere L nin δ derivasyonu $\delta^s = id$ olacak şekilde s pozitif tamsayısı mevcutsa δ ya s . mertebeden periyodik derivasyon denir.

L , 1. mertebeden periyodik derivasyonu δ olan bir Lie cebir olsun. O zaman her $u, v \in L$ için

$$[u, v] = \delta([u, v]) = [\delta(u), v] + [u, \delta(v)] = 2[u, v]$$

elde edilir. Dolayısıyla $[u, v] = 0$ olur. Bu L nin abelyen olduğu anlamına gelir. Diğer taraftan abelyen Lie cebir mertebesi herhangi pozitif tamsayı s olan periyodik derivasyonlara sahip olabilir. Bunu ispatlamak kolaydır. L , abelyen bir Lie cebir olsun. Böylece μ_s , birimin s . mertebeden bir ilkel kökü olmak üzere $\delta = \mu_s id \in \text{End}(L) = \text{Der}(L)$ olur. Dolayısıyla $\delta^s = id$ elde edileceğinden δ , L nin s . mertebeden bir periyodik derivasyonu olur.

Ana sonuçların ispatlarında kullanılacak olan literatürdeki bazı sonuçlar aşağıda veriliyor.

Önerme 3.2: (Burde ve Moens, 2011) σ, τ karmaşık sayılar ve $|\sigma| = |\tau| = |\sigma + \tau| = 1$ olsun. O zaman θ , birimin 3. mertebeden bir ilkel kökü olmak üzere $\tau = \theta\sigma$ dır.

Önerme 3.3: (Burde ve Moens, 2011) $\sigma, \tau, \varphi \in \mathbb{C}$ olsun. O halde $\sigma, \tau, \varphi, \sigma + \varphi, \tau + \varphi, \sigma + \tau + \varphi$ sayılarından en az biri birimin s . kökü değildir.

Teorem 3.4: (Jacobson, 1955) L , tekil olmayan bir derivasyona sahip olan ve karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde bir Lie cebir olsun. O zaman L nilpotenttir.

Şimdi ana sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.5: L , periyodik derivasyona sahip karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde bir Lie cebir olsun. O zaman L nilpotenttir.

İspat 3.5: Periyodik bir derivasyon lineer bir dönüşüm olarak tekil olmayan bir derivasyondur. O zaman Teorem 3.4 ten dolayı L nilpotenttir.

Teorem 3.6: L , periyodik derivasyona sahip bir Lie cebir olsun. O halde L , nilpotentlik sınıfı en fazla iki olan nilpotent Lie cebiridir.

İspat 3.6: δ , L nin bir periyodik derivasyonu olsun. O zaman δ yarı basittir. $L^3 = [[L, L], L] \neq 0$ olduğu kabul edilsin. O zaman δ nın $[[x, y], z] \neq 0$ olacak şekilde özdeğerleri σ, τ, φ olan x, y, z özvektörleri vardır. Böylece $[x, y] \neq 0$ sonucuna ulaşılır. Jacobi özdeşliği kullanılarak $[[y, z], x] \neq 0$ olduğu kabul edilir. Dolayısıyla $[y, z] \neq 0$ olur. Buradan $\sigma, \tau, \varphi, \sigma + \varphi, \tau + \varphi, \sigma + \tau + \varphi$ birimin s . kökleri olduğu sonucuna ulaşılır. Bu da Önerme 3.3 ile çelişir.

Örnek 3.7: $L, [x_1, x_2] = x_3$ çarpımı ile bazı $\{x_1, x_2, x_3\}$ olan Heisenberg Lie cebiridir.

$$\begin{aligned} L^1 &= L = \langle x_1, x_2 \rangle \\ L^2 &= [L^1, L^1] = \langle x_3 \rangle \\ L^3 &= [L^2, L^1] = 0 \end{aligned}$$

olduğundan dolayı bu cebir nilpotenttir ve nilpotentlik sınıfı 2 dir. Ayrıca bu Lie cebiri $\delta = \text{köşeg}(1, \theta, 1 + \theta)$ mertebesi 6 olan periyodik derivasyona sahiptir.

Teorem 3.8: δ , periyodik bir derivasyon olsun. O zaman δ nin tersi δ^{-1} de bir derivasyondur.

İspat 3.8: δ , periyodik bir derivasyon olduğundan dolayı yarı basittir. Özdeğerleri $a_1, a_2, \dots, a_n$ olan $b_1, b_2, \dots, b_n$ özvektörlerinden oluşan küme L nin bir bazı olsun. Önerme 3.2 den dolayı özdeğerleri a_i ve a_j olan farklı iki b_i ve b_j özvektörleri için $a_i = \theta a_j$ dir. O zaman

$$a_i^{-1} + a_j^{-1} = a_j^{-1}(1 + \theta^{-1}) = a_j^{-1}(1 + \theta)^{-1} = (a_i + a_j)^{-1}$$

dir. Bu sonuçtan yararlanarak

$$\delta^{-1}([b_i, b_j]) = [\delta^{-1}(b_i), b_j] + [b_i, \delta^{-1}(b_j)]$$

elde edilir.

Örnek 3.9: $L, [e_1, e_2] = e_4, [e_2, e_3] = e_6, [e_1, e_3] = e_5$ çarpımı ile bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ olan bir Lie cebiridir. Bu Lie cebir $L^1 = L, L^2 = [L, L] = \langle e_4, e_5, e_6 \rangle, L^3 = [L^2, L] = 0$ olduğundan dolayı nilpotentlik sınıfı 2 olan nilpotent Lie cebiridir. Ayrıca $L, \delta = \text{köşeg}(1, \theta, \theta^2, 1 + \theta, 1 + \theta^2, \theta + \theta^2)$ ile mertebesi 6 olan periyodik derivasyona sahiptir. Bu periyodik derivasyonun tersi $\delta^{-1} = \text{köşeg}(1, \theta^2, \theta, 1 + \theta^2, 1 + \theta, \theta + \theta^2)$ ile yine bir derivasyondur.

Uyarı 3.10: Periyodik derivasyona sahip sonlu boyutlu kompleks Lie cebirleri nilpotenttir. Fakat her nilpotent Lie cebiri periyodik derivasyona sahip olmayabilir.

Örnek 3.11: $L, [e_1, e_3] = e_6, [e_1, e_2] = e_5, [e_3, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_7$ çarpımı ile bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$ olan bir Lie cebiridir. Ayrıca nilpotentlik sınıfı 2 olan nilpotent Lie cebiridir. Fakat bu cebir periyodik derivasyona sahip değildir.

4. SONUÇLAR

Periyodik derivasyona sahip sonlu boyutlu kompleks Lie cebirleri üzerinde yapılan çalışmaların sonucunda bu cebir yapısının abelyen ya da nilpotent olduğu ispatlanmıştır. Nilpotent olan periyodik derivasyona sahip sonlu boyutlu kompleks Lie cebirlerinin nilpotentlik sınıfının en fazla iki olduğu gösterildi ve bulunan sonuçlarla ilgili örnek verilmiştir.

Teşekkür

Makalenin tamamı Duygu Yaman'ın Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde halen devam etmekte olduğu lisansüstü tezinde yer alacaktır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarları arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazarların makaleye katkı oranları eşittir.

Kaynaklar

- Benkart, G., Kostrikin, A.I., & Kuznetsov, M.I. (1995). Finite dimensional simple Lie algebras with a nonsingular derivation, *Journal of Algebra*, 171, 894-916.
- Burde, D. (2002). Lie algebra prederivations and strongly nilpotent Lie algebras, *Communications in Algebra*, 30(7), 3157-3175.
- Burde, D., & Moens, W.A. (2011). Periodic derivations and prederivations of Lie algebras, *Journal of Algebra*, 357, 208-221.
- Dixmier, J., & Lister, W.G. (1957). Derivations of nilpotent Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* 8, 155-157.
- Jacobson, N. (1955). A note on automorphisms and derivations of Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 153(6), 281-283.
- Kostrikin, A.I., & Kuznetsov, M.I. (1995). Two remarks on Lie algebras with a nonsingular derivation, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 208, 166-171.
- Mansuroğlu, N. (2022). *Fundamentals of Lie algebras*, Gece kitaplığı, 167 pages.
- Shalev, A. (1999). The orders of nonsingular derivations, *J. Austral. Math. Soc.*, 67, 254-260.