BAZI CEBİRSEL PROBLEMLERİN GENELLENMESİ VE GEOMETRİK ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

REGULATIONS OF SEVERAL ALGEBRAIC PROBLEMS AND SUGGESTIONS OF GEOMETRICAL SOLUTIONS

Ömür AYVALI[1] **Defne Nesrin ÇİÇEK**[2] **Yusuf İPEK**[3]

[1,2,3] Adana Çukurova Bilim ve Sanat Merkezi
[1,2,3] Adana Çukurova Science and Art Center

futtapat1@gmail.com
[1]**ORCİD ID:** 0009-0004-9492-0680

defwe26@gmail.com
[2]**ORCID ID:** 0009-0006-7853-3503

yusufipek01@hotmail.com
[3]**ORCID ID:** 0000-0001-7806-3544

MAKALE BİLGİSİ / ARTICLE INFORMATION

Geliş Tarihi / Date Received
30.05.2025

Kabul Tarihi / Date Accepted
14.12.2025

Yayın Tarihi / Date Published
Aralık / December 2025

Yayın Sezonu / Pub Date Season
Aralık - Haziran / December - June

ATIF / CITE as

Ayvalı, Ö., Çiçek, D. N.,İpek, Y. (2025). ‘’Bazı cebirsel Problemlerin Genellenmesi ve Geometrik Çözüm Önerileri’’/ ‘’Regulations of Severel Algebraic Problems and Suggestions of Geometrical Solutions’’. Bilar: Bilim Armonisi Dergisi, 8 (2): 91-112 doi: 10.37215/bilar.1710307

BAZI CEBİRSEL PROBLEMLERİN GENELLENMESİ VE GEOMETRİK ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

REGULATIONS OF SEVERAL ALGEBRAIC PROBLEMS AND SUGGESTIONS OF GEOMETRICAL SOLUTIONS

ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

ÖZET

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından yapılan Ulusal Matematik Olimpiyatı 2023 Yılı 1.Aşama sınavında sorulan bir problemden esinlenilerek ortaya çıkmıştır. Problemin geometrik bir bakış açısıyla çözülebileceğinin fark edilmesi sonrası bu problem genellenmiştir. Genel probleme genel bir çözüm olacak şekilde bir iddiada bulunulmuş ve iddia ispatlanmıştır. Daha sonra geometrik olarak çözüm yapılabilecek benzer cebirsel problemler oluşturulup bu problemlere de genel çözümler sunulmuştur. Böylece çalışmamız ile uygun şartlardaki cebirsel problemlere dair yeni bir yaklaşımın gün yüzüne çıkarılması amaçlanmış ve bu yeni yaklaşımın geometri ile en belirgin hâline getirilebileceği keşfedilmiştir. Bu nedenle çalışmamızın amacı bazı cebirsel problemlere geometriyi kullanarak yeni bir çözüm yolu işaret etmek oldu. Bu amaca ulaşmada yöntem olarak birden çok kaynaktan cebir problemleri araştırıp çeşitli gözlem ve denemeler ile problemleri genelleyip her genel problem için bir iddiada bulunmak ve iddiayı ispatlamak oldu. İspat aşamalarında doğrudan ispat yöntemi kullanılmış ve algoritmik bir dil kullanarak adım adım sonuca gidilmiştir. Sonuç olarak çeşitli genel sonuçlar elde edilmiş ve bulgular bölümünde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel Problem, Geometrik Çözüm, Genelleme

ABSTRACT

This article's presence has been caused by the inspiration of an algebraic problem that was presented in The National Mathematics Olympics whose organisation and execution are under the responsibility of TÜBİTAK. After the realisation that the problem could be solved with a geometrical approach, the problem was regulated. To regulate a solution to this problem, a claim had been made and the said claim was then proven sufficient. Later, algebraic problems that were similarly capable of containing geometrical solutions had been created and these problems were presented with regulated solutions as well. Thus our goal with this work had shaped into unsurfacing viewpoints regarding algebraic problems and it came to be that these viewpoints could be unsurfaced with geometry. Because of the reasons told in the last sentence, this work's goal has been to point out possibly unnoticed paths of solution to algebraic problems by the usage of geometry. The method used to achieve such a goal was to first search for algebraic problems from multiple sources, then -through several observations and experimentations- regulate the problems and lastly offer a solution for each regulated problem and prove these solution offers. The direct method of proof was used while proving each solution and an algorythmic, step-by-step demonstration was held for each submission of proof. As results, several regulated solutions have been obtained and presented in The Findings section.

Keywords: Algebraic Problem, Geometrical Solution, Regulation

1. GİRİŞ

Cebir problemleri matematiksel çözümler gerektiren pek çok yerde karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmadaki amacımız bazı cebir problemlerini çözerken daha kolay ve pratik bir çözüm yolu sunmaktır. TÜBİTAK'ın yaptığı Ulusal Matematik Olimpiyatlarında ve çeşitli ulusal bilim olimpiyatlarında da sıklıkla rastladığımız cebir problemlerini çözmek uzun ve zorolabilmektedir. Çalışmamızda uygun şartlardaki cebir problemlerini geometri ile ilişkilendirerek geometri tabanlı olarak çözmek ve genellemeler yapmak hedeflenmiştir. Böylece; cebir problemlerini geometri ile ilişkilendirerek her iki alanın birleşiminden doğan bir çözüm yöntemine işaret etmekle birlikte benzer olimpiyat problemlerinde işlem karmaşasından kurtularak daha kolay işlem yapılması ve zamandan da tasarruf edilmesi de amaçlanmıştır. Ayrıca bu tür cebir problemlerinin çözümlerini geometri ile ifade ederek öğrencilerde, uzamsal beceri gelişiminin ve geometrik fikir ve becerilerin gelişimine katkı sunmak da bir başka hedefimizdir.

Harizmi'nin "Al Kitab Fi Hisab Al Cabr wal Muqabalah" isimli kitabındaki "Al Cabr" sözcüğünden adını alan cebir, aritmetiğin genelleştirilmiş şekli olarak düşünülebilir (Amerom 2003; Brezina 2006; Katz 2007; Baki ve Bütüner 2011). Cebir; genelleştirilmiş sayılarla, değişkenlerle ve fonksiyonlarla ilgilenir (Carraher vd. 2006). Bilinmeyen veya değişken niceliklerle ilgili muhakeme yapmayı, özel ve genel durumlar arasındaki farklılıkları tanımlamayı gerektirir (Amerom 2003). Cebir problemleri ise, bilinmeyenin veya diğer bir değişle değişkenin değeri bulunarak verilen eşitliğin çözülmesine dayanmaktadır (Brezina 2006).

Geometri; nokta, doğru, düzlem, düzlemsel şekiller, uzay, uzaysal şekiller ve bunlar arasındaki ilişkileri inceleme, geometrik şekillerin açı, uzunluk, alan, hacim gibi ölçümleri ile ilgilenen matematiğin bir dalıdır (Baykul 2002). Bazı öğrenciler geometriyi formül yığını, kural ezberleme, şekil ezberleme dersi olarak görmektedir. Oysa geometriyi işlevsel yönleriyle ele alıp ilişkiler ağı olarak görmek ve göstermek olanaklıdır. Bu şekliyle geometrinin günlük hayatta kullanım alanı oldukça fazladır (Olkun ve Aydoğdu 2003). Cebir ile geometri arasındaki bağlar "neredeyse görünmez ve kopmaz nitelikte" (Mazur 2017) olup oldukça eskiye dayanmaktadır.

Matematik kavramları soyuttur ve bu soyut kavramların öğrenciler tarafından kazanılması zor olmaktadır. Öğretim sırasında, birtakım araçlar kullanarak, bu kavramları somutlaştırmaya çalışmakla, kavramların kazanılmasındaki zorluğun giderilebileceği, en azından azaltılabileceği belirtilmektedir (Baykul 1999a). Kavram ya da düşüncelerimizi somutlaştırırken şekil, çizim ve benzerlerinden yararlanırız. Bu somutlaştırma işlemi görselleştirme olarak adlandırılır. Matematik eğitimi dünyasındaki birçok araştırmacı, matematik öğretiminde görselleştirmenin önemli olduğunu vurgulamaktadır. Resimler ve şekiller, karmaşık kavramları ve işlemleri sezgisel olarak anlamamızı veya soyut ilişkiler kurmamızı sağlamaktadır (Özdemir vd. 2005). Görselleştirme, matematiğe yönelik düşünmede, dil düşüncesinden ve geleneksel cebirden farklı bir yol yaratmaktadır ve bundan dolayı öğrencilerin matematik öğrenmelerinde güçlü ve alternatif bir kaynak olarak değerlendirilmektedir (Konyalıoğlu 2003). Bazı araştırmacılar anlamanın zihinde canlandırma ile gerçekleştiğini düşünmektedir (Dörfler 1991).

Bu çalışmada özellikle matematik olimpiyatlarında sorulmuş olan bazı cebirsel problemler genelleştirilerek ve geometrik anlamda görselleştirilerek çözüm yolları sunulacaktır.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde çalışmamızda kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Heron Alan Formülü: Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c olsun. ABC üçgeninin alanı Δ ve yarı çevresi $s = \frac{a+b+c}{2}$ olmak üzere $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ şeklinde bulunur. Bu bağıntıya Heron Alan Formülü denir (Özdemir 2019)

Kosinüs Teoremi: Bir ABC üçgeninde $|AB| = c$, $|BC| = a$ ve $|AC| = b$ olmak üzere
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$'dır (Şahin 2013)

2.2. Yöntem

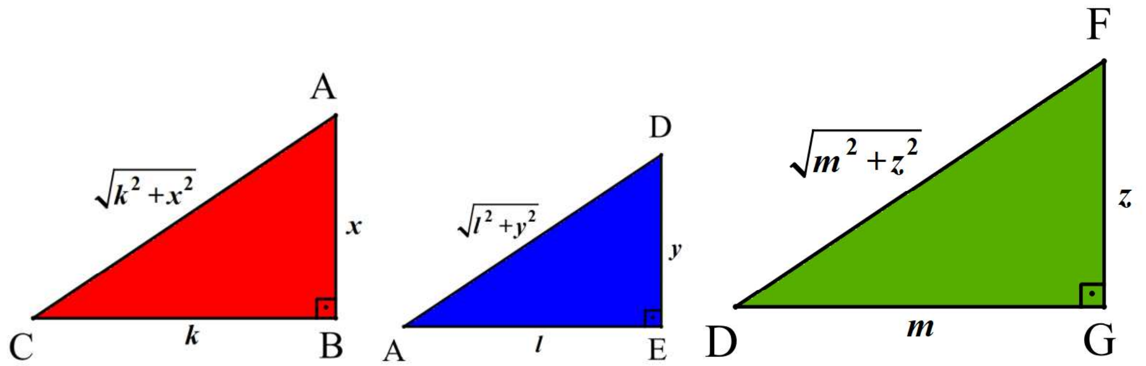
Araştırmamızda ilk olarak TÜBİTAK matematik olimpiyatı başta olmak üzere çeşitli ülkelerde yapılan matematik olimpiyatlarında sorulmuş olan bazı cebirsel problemler incelenmiştir. Bu problemlere çeşitli denemeler ve gözlemlerle yaklaşılıp çözüm yolları araştırılmıştır. Daha öncesinden yapılmış çeşitli çözümleri incelenmiş ve literatür taraması yapılmıştır. İlgili cebir problemlerinin mümkün oluyorsa somutlaştırılarak ve görselleştirilerek daha kolay çözülebileceği fark edilmiştir. Bunun sonucunda cebir problemleri geometri ile ilişkilendirilerek çözümlerimiz geometrik düzleme denklemlerin geometrik karşılıkları olacak şekilde aktarılmıştır. Ortaya koyduğumuz iddiaların ispatını yaparken doğrudan ispat yöntemi kullanılmış, her adımda şekiller belirtilerek algoritmik bir dil kullanılmıştır.

3. BULGULAR

Bu bölümde, bazı cebirsel problemlerin genelleştirilmesi ve bu genel problemlere yönelik olarak elde ettiğimiz geometrik çözüm yaklaşımları sunulacaktır. Her genel problem için bir iddia ortaya konulmuş ve sonrasında iddia ispatlanmıştır.

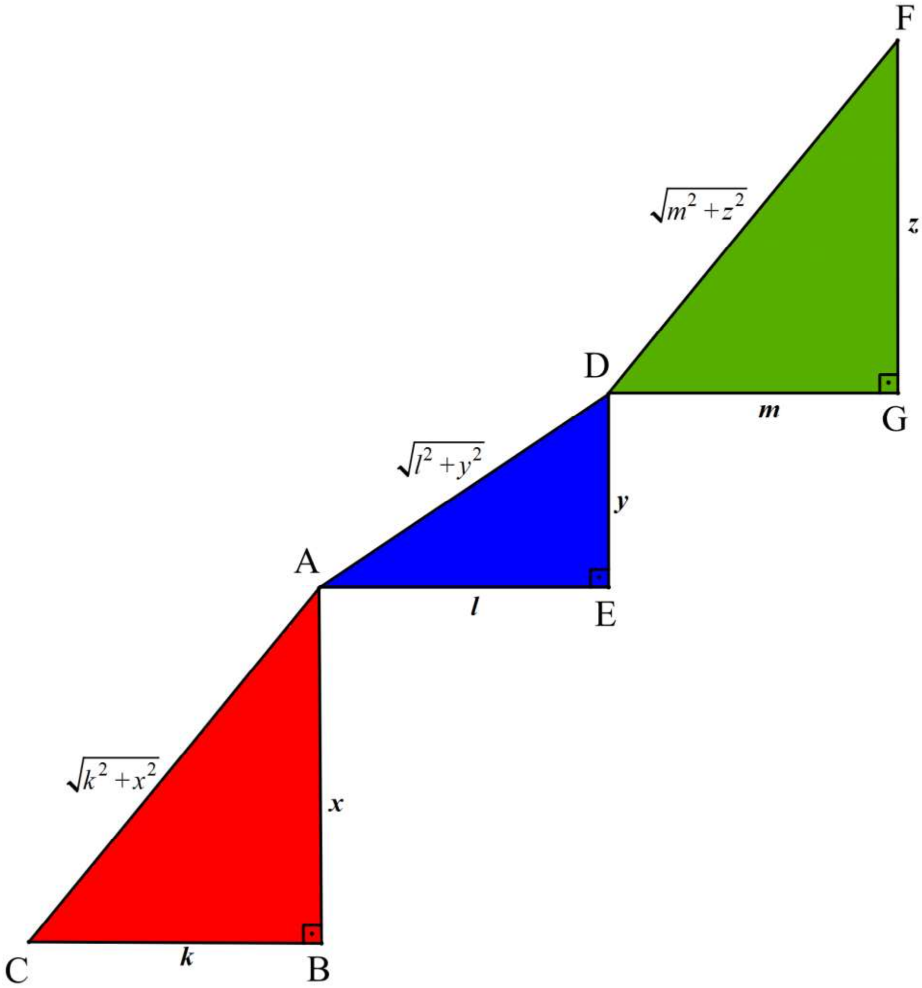
İddia 3.1 a, b, c, k, l, m, x, y, z pozitif gerçel sayılar olsun. $a^2+b^2=c^2$ olmak üzere, $x+y+z=a$ ve $k+l+m=b$ ise $\sqrt{k^2+x^2}+\sqrt{l^2+y^2}+\sqrt{m^2+z^2}$ ifadesinin en küçük değeri c'dir.

İspat: Kenar uzunlukları k, x, $\sqrt{k^2+x^2}$ olan ABC dik üçgeni, kenar uzunlukları l, y, $\sqrt{l^2+y^2}$ olan DEA dik üçgeni ve kenar uzunlukları m, z, $\sqrt{m^2+z^2}$ olan FDG dik üçgenlerini düşünelim. Bu üçgenler Şekil-1'de gösterilmiştir.



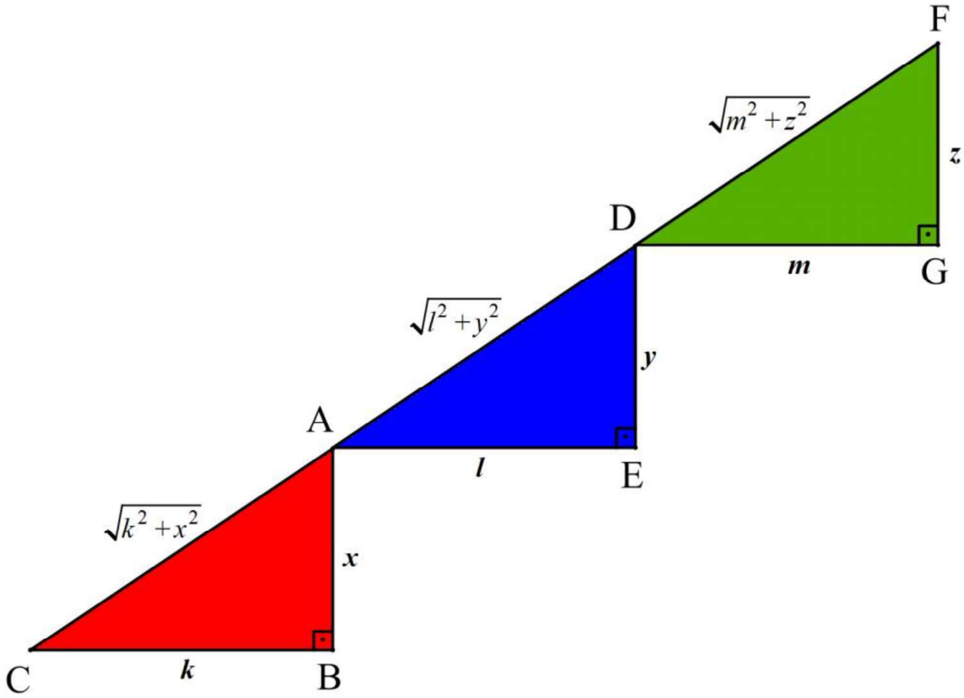
Şekil-1

Şekil-1'de gösterilen üçgenleri aynı isimli köşeleri ortak olacak ve $[AB]$, $[DE]$ ile $[FG]$ doğru parçaları aynı doğrultuda olacak şekilde uç uca ekleyelim. Bu durumda $[BC]$, $[EA]$ ve $[GD]$ doğru parçaları da aynı doğrultuda olacaktır. İlgili durum Şekil-2'de gösterilmiştir.



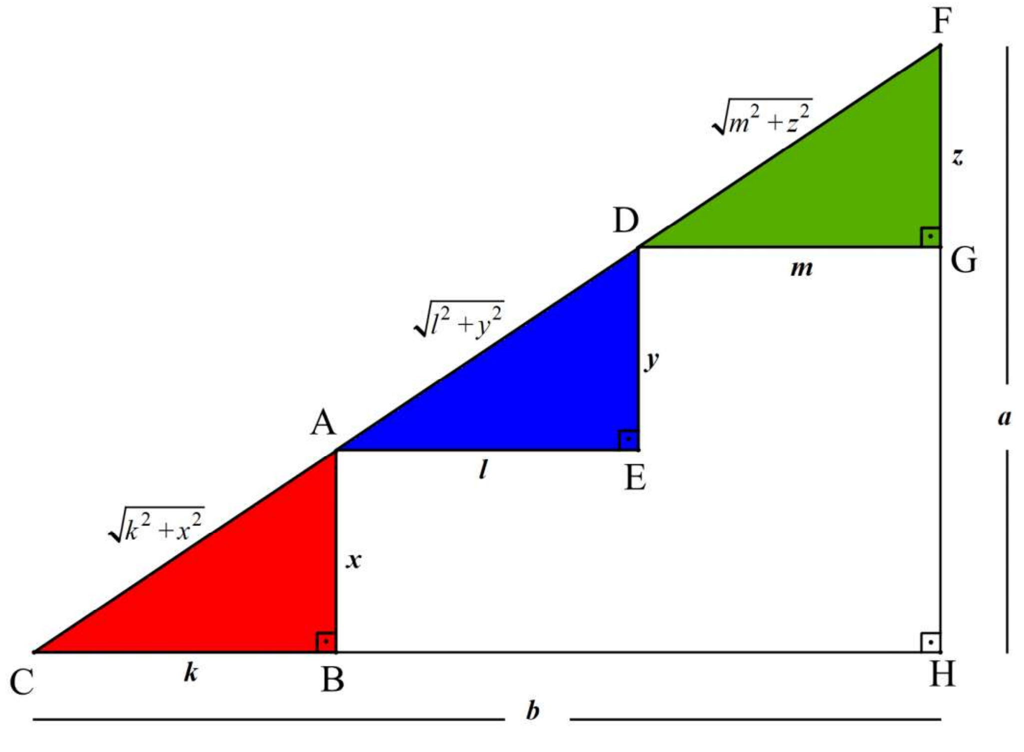
Şekil-2

Şekil-2'te $\sqrt{k^2+x^2}+\sqrt{l^2+y^2}+\sqrt{m^2+z^2}$ ifadesinin en küçük değerini alması için $[CA]$, $[AD]$ ve $[DF]$ doğru parçalarının doğrusal olması gerekir. k, l, m, x, y, z sayıları sabit olmadığı için bu sayılar uygun şekilde seçilerek $[CA]$, $[AD]$ ve $[DF]$ doğru parçaları doğrusal bir biçimde çizilebilir. İlgili durum Şekil-3'te gösterilmiştir.



Şekil-3

Bu durumda $[AB]$, $[DE]$ ve $[FG]$ doğru parçaları aynı doğrultuda ve $[BC]$, $[EA]$ ve $[GD]$ doğru parçaları da aynı doğrultuda olduğundan CFH dik üçgeni oluşturulabilir. Bu duruma ait görsel Şekil-4'te verilmiştir.



Şekil-4

Ayrıca, $a^2 + b^2 = c^2$ olarak verilmiş olduğundan, Şekil-4'te FHC üçgeni için Pisagor Teoremi kullanılırsa, $\sqrt{k^2 + x^2} + \sqrt{l^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + z^2} = c$ olarak bulunmuş olur.

Örnek-1: (2023 TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyatı)

x, y, z pozitif gerçel sayıları,

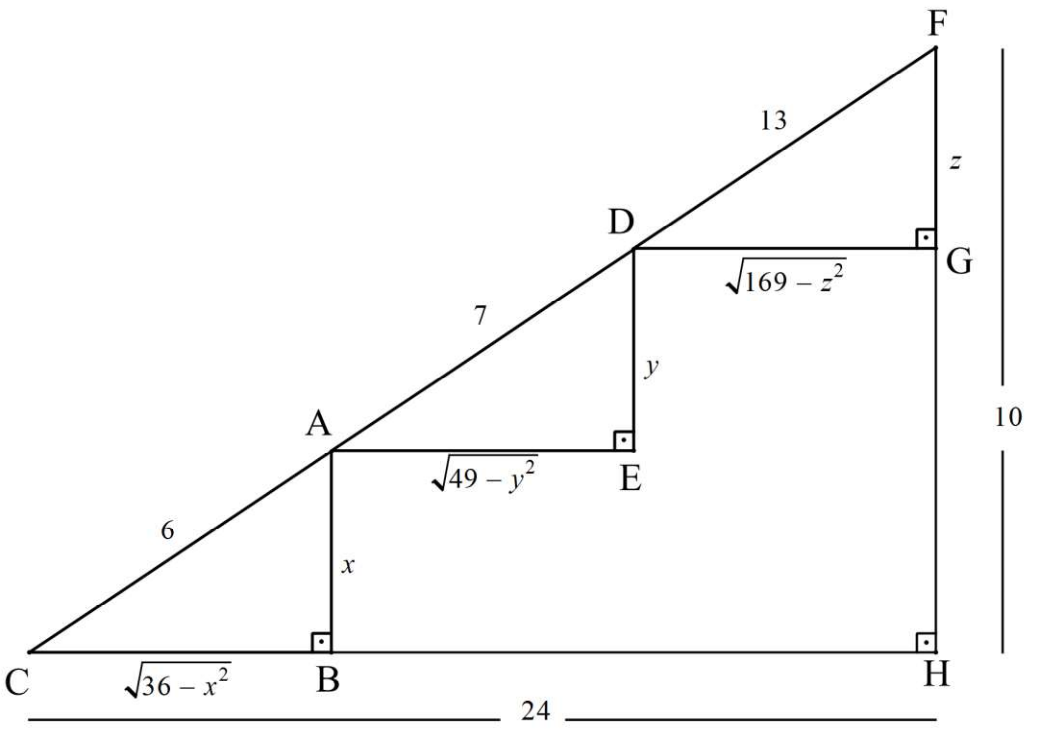
$x + y + z = 10$

$\sqrt{36 - x^2} + \sqrt{49 - y^2} + \sqrt{169 - z^2} = 24$

denklemlerini sağlıyorsa, $\frac{xz}{y}$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) $\frac{30}{7}$ b) 5 c) 6 d) $\frac{65}{8}$ e) $\frac{49}{3}$

Çözüm: İddia 3.1'den yararlanarak problemi çözelim. Kenar uzunlukları 6, x ve $\sqrt{36 - x^2}$ olan ABC dik üçgeni, kenar uzunlukları $7, y$ ve $\sqrt{49 - y^2}$ olan DEA dik üçgeni ve kenar uzunlukları 13, z ve $\sqrt{169 - z^2}$ olan DFG dik üçgenlerini düşünelim. Bu üçgenleri aynı isimli köşeleri ortak olacak ve $[AB]$, $[DE]$ ve $[FG]$ doğru parçaları aynı doğrultuda olacak şekilde uç uca ekleyelim. Bu durumda $[BC]$, $[EA]$ ve $[GD]$ doğru parçaları da aynı doğrultuda olacaktır. Böylece $|CH| = 24$ ve $|HF| = 10$ olur. Ayrıca $|CF| = 6 + 7 + 13 = 26$ olup, $26^2 = 10^2 + 24^2$ eşitliğinden dolayı C, A, D ve F aynı doğrultuda olup CHF bir dik üçgen belirtir. Böylece CAB, ADE, DFG ve CFH üçgenleri benzer olur.

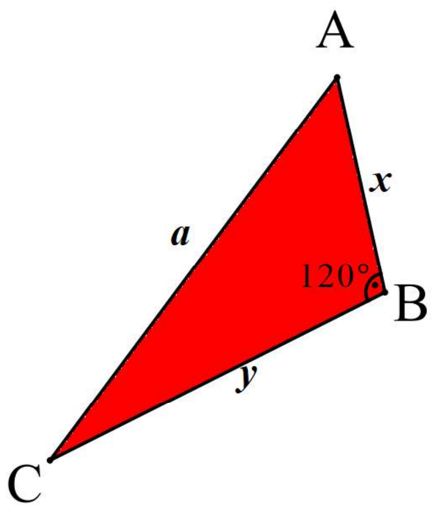


Benzerlik oranları yazılırsa $x = \frac{30}{13}$, $y = \frac{35}{13}$ ve $z = 5$ bulunur. Dolayısıyla $\frac{xz}{y} = \frac{30}{7}$ elde edilir.

İddia 3.2 $a, b, x, y, z > 0$ olmak üzere $x^2 + xy + y^2 = a^2$, $z^2 + zx + x^2 = b^2$, $y^2 + yz + z^2 = a^2 + b^2$ ise $x + y + z$ toplamı $\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$'tür.

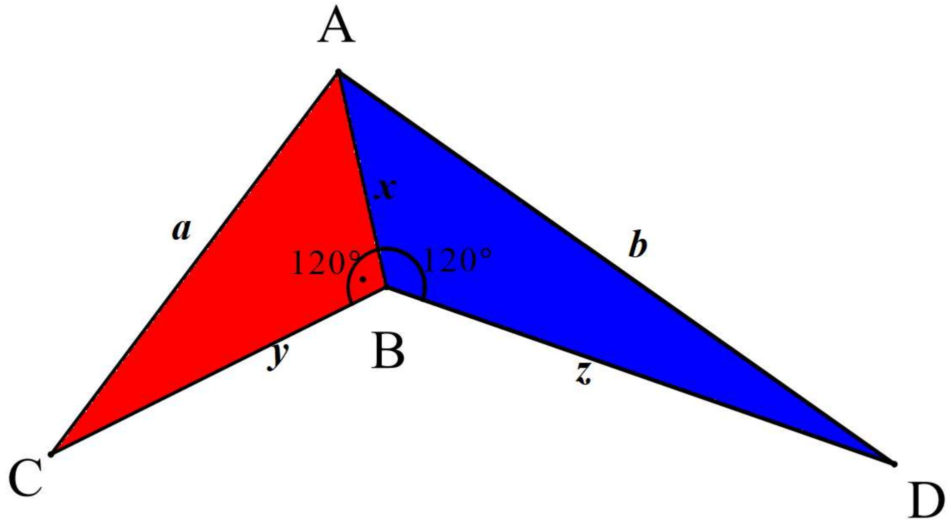
İspat: İspatı adım adım bir algoritma şeklinde yapalım.

1. adım: $x^2 + xy + y^2 = a^2$ denklemi, Kosinüs Teoremi kullanarak, geometrik olarak kenar uzunlukları x, y ve a olan, ayrıca x ve y kenar uzunluklarına sahip kenarlar arasındaki açının ölçüsü $120°$ olan bir üçgen belirtir. $x^2 + xy + y^2 = a^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden ABC üçgeni, Şekil-5'te kırmızı renkte gösterilmiştir.



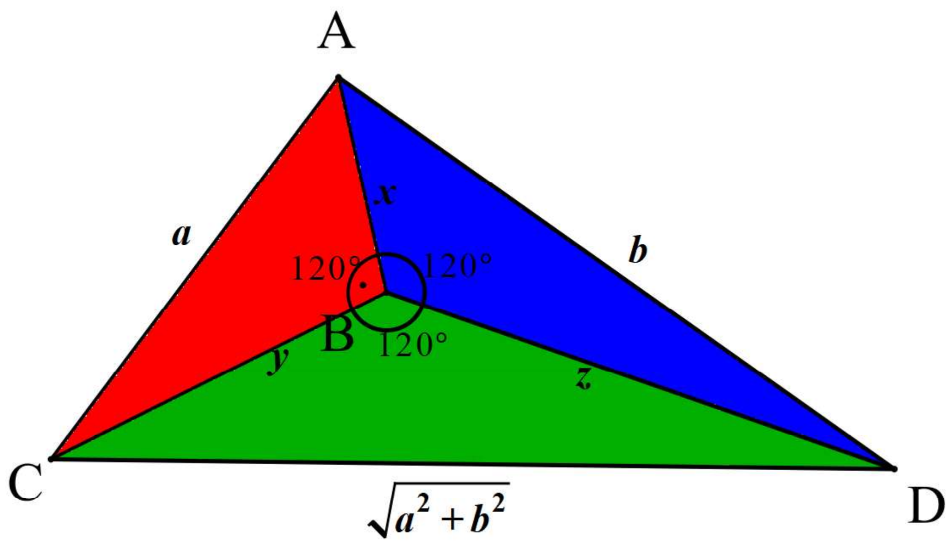
Şekil-5

2. adım: $z^2 + zx + x^2 = b^2$ denklemi, Kosinüs Teoremi kullanarak, geometrik olarak kenar uzunlukları x, z ve b olan, ayrıca x ve z kenar uzunluklarına sahip kenarlar arasındaki açının ölçüsü $120°$ olan bir üçgen belirtir. $z^2 + zx + x^2 = b^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden ABD üçgeni, Şekil-6'da mavi renkte gösterilmiştir.



Şekil-6

3. adım: $y^2 + yz + z^2 = a^2 + b^2$ denklemi, Kosinüs Teoremi kullanarak, geometrik olarak kenar uzunlukları y, z ve $\sqrt{a^2 + b^2}$ olan, ayrıca y ve z kenar uzunluklarına sahip kenarlar arasındaki açının ölçüsü $120°$ olan bir üçgen belirtir. $y^2 + yz + z^2 = a^2 + b^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden CBD üçgeni Şekil 7'de yeşil renkte gösterilmiştir.



Şekil-7

4. adım: $A(ACD) = A(ABC) + A(ABD) + A(CBD)$ olup bu üçgenlerin alanları Sinüs Alan Formülü ile bulunarak yerine yazılırsa

$$\Delta = \frac{1}{2}xy\sin 120° + \frac{1}{2}yz\sin 120° + \frac{1}{2}zx\sin 120°$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{\sqrt{3}}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}zx\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$$

olur. Ayrıca ACD üçgeninin kenar uzunlukları Pisagor Teoremini sağlıyor olduğundan $m(CAD) = 90°$ olur. O hâlde dik üçgen alan formülünden

$$A(ACD) = \frac{ab}{2}$$

bulunur. Bu iki değer eşitlenirse

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx) = \frac{ab}{2}$$

$$xy + yz + zx = \frac{2ab}{\sqrt{3}}$$

ifadesi elde edilir. Ana eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx = a^2 + b^2 + a^2 + b^2$$

$$2[(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)] + xy + yz + zx = 2a^2 + 2b^2$$

$$2(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = 2(a^2 + b^2)$$

eşitliği elde edilir. $xy + yz + zx = \frac{2ab}{\sqrt{3}}$ değeri yerine yazılırsa

$$2(x+y+z)^2 - 3\left(\frac{2ab}{\sqrt{3}}\right) = 2(a^2+b^2)$$

$$(x+y+z)^2 = a^2+b^2+\sqrt{3}ab$$

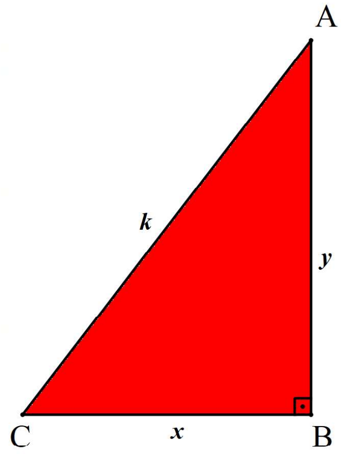
$$x+y+z = \sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}$$

elde edilir.

İddia 3.3 $x, y, z, k, l, m > 0$ için, $x^2+y^2=k^2$, $y^2+yz\sqrt{3}+z^2=l^2$ ve $x^2+xz+z^2=m^2$ ise $2xy+yz+xz\sqrt{3} = \sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$'dir.

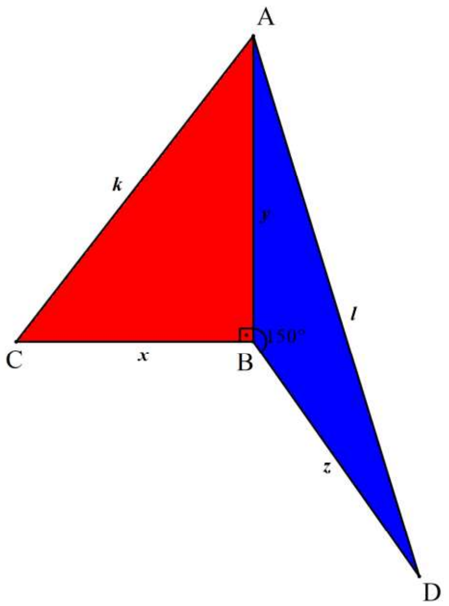
İspat: İspatı adım adım bir algoritma şeklinde yapalım.

1. adım: $x^2+y^2=k^2$ denklemi geometrik olarak, dik kenar uzunlukları x ve y hipotenüsü k uzunluğunda olan bir dik üçgene karşılık gelir. $x^2+y^2=k^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden dik açılı ABC üçgeni Şekil-8'de kırmızı renkte gösterilmiştir.



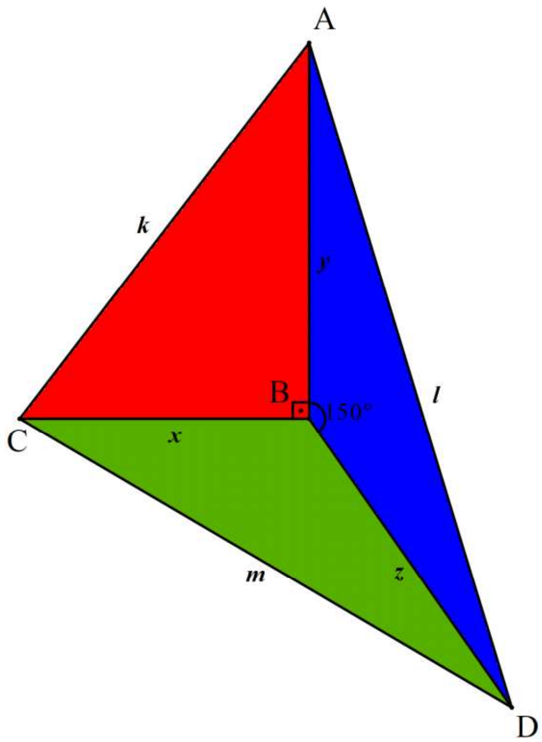
Şekil-8

2. adım: $y^2+yz\sqrt{3}+z^2=l^2$ denklemi geometrik olarak, kenar uzunlukları y, z ve l olup, y ile z kenarları arasındaki açı $150°$ olan bir üçgene karşılık gelir. $y^2+yz\sqrt{3}+z^2=l^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden ABD üçgeni Şekil-9'da mavi renkte gösterilmiştir.



Şekil-9

3. adım: $x^2 + xz + z^2 = m^2$ denklemi geometrik olarak, kenar uzunlukları x, z ve m olup, x ile z kenarları arasındaki açı $120°$ olan bir üçgene karşılık gelir. $x^2 + xz + z^2 = m^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden CBD üçgeni Şekil-10'da yeşil renkte gösterilmiştir.



Şekil-10

4. adım: ACD üçgeni için, $s = \frac{k+l+m}{2}$ olup bu değer, $A(ACD) = \Delta$ ile gösterilmek üzere Heron Alan Formülü olan $\Delta = \sqrt{s(s-k)(s-l)(s-m)}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{k+l+m}{2}\right)\left(\frac{k+l+m}{2}-k\right)\left(\frac{k+l+m}{2}-l\right)\left(\frac{k+l+m}{2}-m\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{k+l+m}{2}\right)\left(\frac{-k+l+m}{2}\right)\left(\frac{k-l+m}{2}\right)\left(\frac{k+l-m}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$$

olur. Ayrıca, $\Delta = A(ABC) + A(ABD) + A(CBD)$ olup bu üçgenlerin alanları Sinüs Alan Formülü ile bulunarak yerine yazılırsa,

$$\Delta = \frac{1}{2}xy\sin 90° + \frac{1}{2}yz\sin 150° + \frac{1}{2}xz\sin 120°$$

$$= \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{2}yz + \frac{\sqrt{3}}{2}xz\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2xy + yz + xz\sqrt{3}\right)$$

olup bu değerler eşitlenirse,

$$\frac{1}{4}\left(2xy + yz + xz\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$$

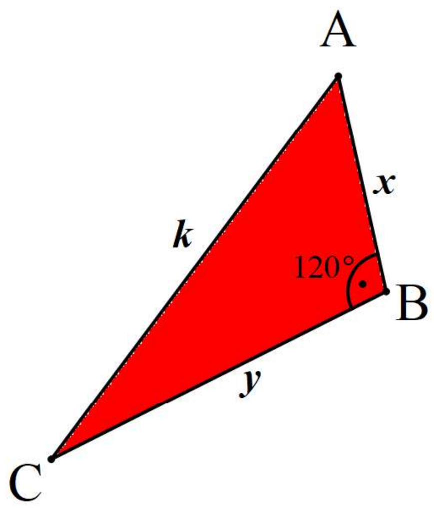
$$2xy + yz + xz\sqrt{3} = \sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$$

eşitliği elde edilir.

İddia 3.4 $x, y, z, k, l, m > 0$ için, $x^2 + xy + y^2 = k^2$, $z^2 + zx + x^2 = l^2$ ve $y^2 + yz + z^2 = m^2$ olmak üzere $xy + yz + zx = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$'dir.

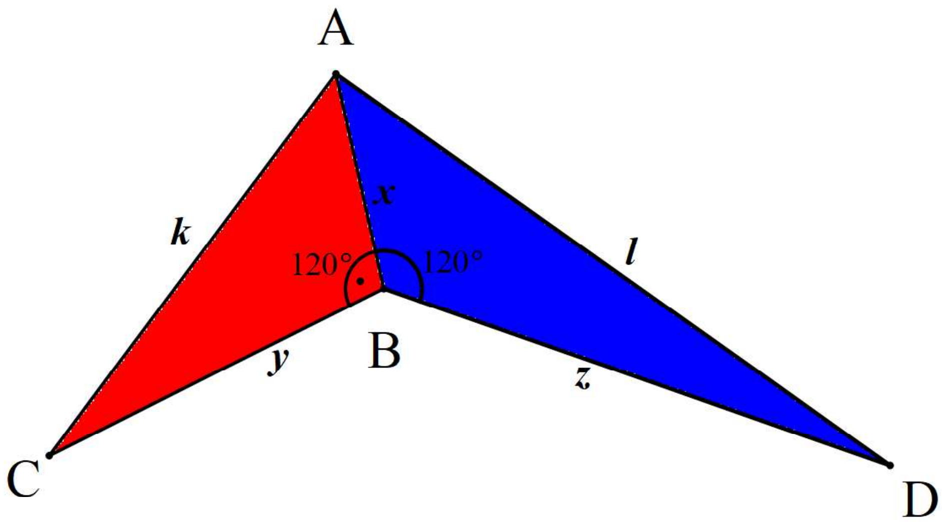
İspat: İspatı adım adım bir algoritma şeklinde yapalım.

1. adım: $x^2 + xy + y^2 = k^2$ denklemi, geometrik olarak kenar uzunlukları x, y ve k olan, ayrıca x ile y kenar uzunluğuna sahip kenarlar arasındaki açının ölçüsü $120°$ olan bir üçgen belirtir. $x^2 + xy + y^2 = k^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden ABC üçgeni Şekil-11'de kırmızı renkte gösterilmiştir.



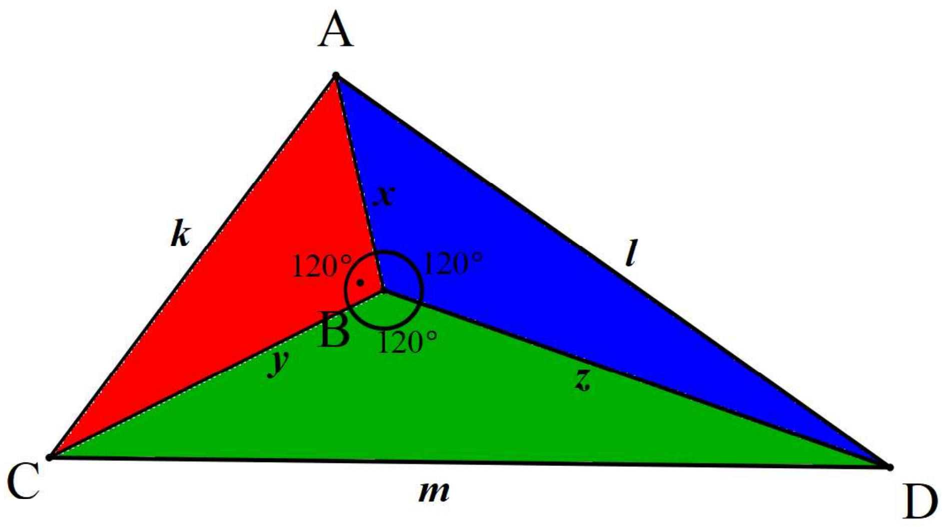
Şekil-11

2. adım: $z^2 + zx + x^2 = l^2$ denklemi, geometrik olarak kenar uzunlukları x, z ve l olan, ayrıca x ile z kenar uzunluğuna sahip kenarlar arasındaki açının ölçüsü $120°$ olan bir üçgen belirtir. $z^2 + zx + x^2 = l^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden ABD üçgeni Şekil-12'de mavi renkte gösterilmiştir.



Şekil-12

3. adım: $y^2 + yz + z^2 = m^2$ denklemi, geometrik olarak kenar uzunlukları y, z ve m olan, ayrıca y ve z kenar uzunluğuna sahip kenarlar arasındaki açının ölçüsü $120°$ olan bir üçgen belirtir. $y^2 + yz + z^2 = m^2$ denklemini geometrik olarak temsil eden CBD üçgeni Şekil-13'te yeşil renkte gösterilmiştir.



Şekil-13

4. adım: $A(ACD) = \Delta$ olmak üzere, $\Delta = A(ABC) + A(ABD) + A(CBD)$ olup bu üçgenlerin alanları Sinüs Alan Formülü ile bulunarak yerine yazılırsa,

$$\Delta = \frac{1}{2}xy\sin 120° + \frac{1}{2}zx\sin 120° + \frac{1}{2}yz\sin 120°$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{\sqrt{3}}{2}zx + \frac{\sqrt{3}}{2}yz\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + zx + yz)$$

değeri elde edilir. Ayrıca ACD üçgeni için $s = \frac{k+l+m}{2}$ olup bu değer, Heron Alan Formülü olan $\Delta = \sqrt{s(s-k)(s-l)(s-m)}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{k+l+m}{2}\right)\left(\frac{k+l+m}{2} - k\right)\left(\frac{k+l+m}{2} - l\right)\left(\frac{k+l+m}{2} - m\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{k+l+m}{2}\right)\left(\frac{-k+l+m}{2}\right)\left(\frac{k-l+m}{2}\right)\left(\frac{k+l-m}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$$

bulunur. Bu iki değer de eşitlenirse,

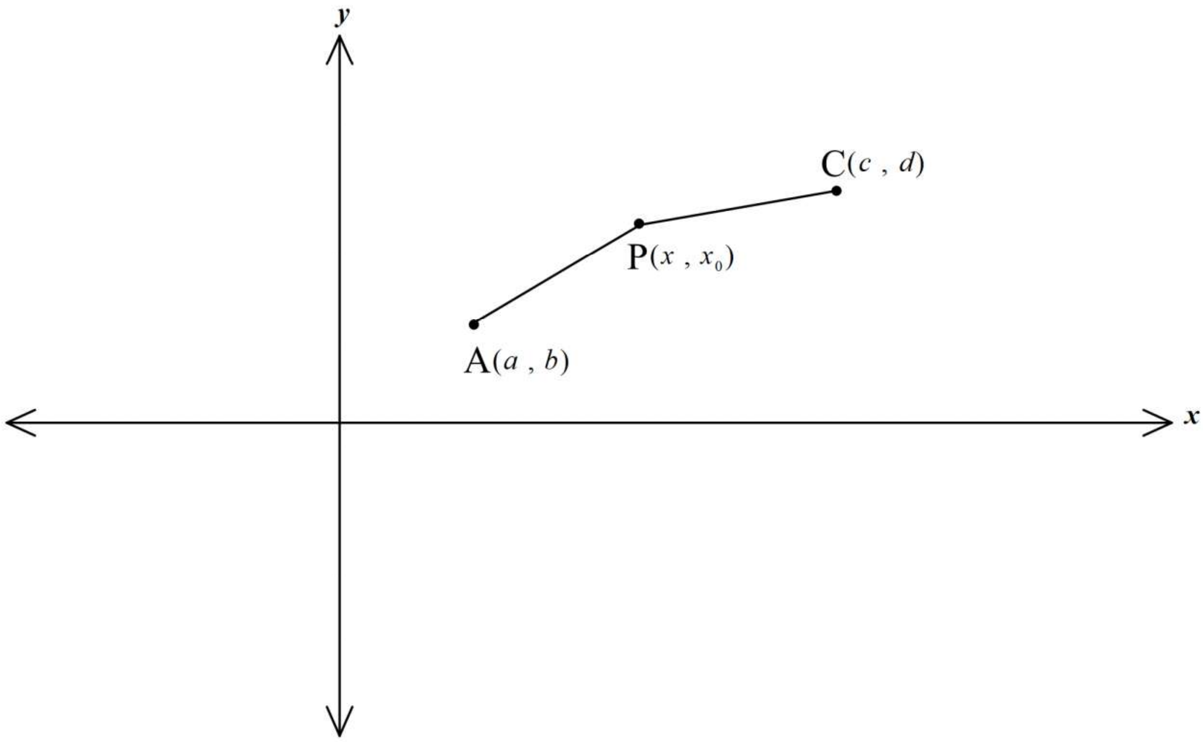
$$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy + zx + yz) = \frac{1}{4}\sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$$

$$xy + zx + yz = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$$

elde edilir.

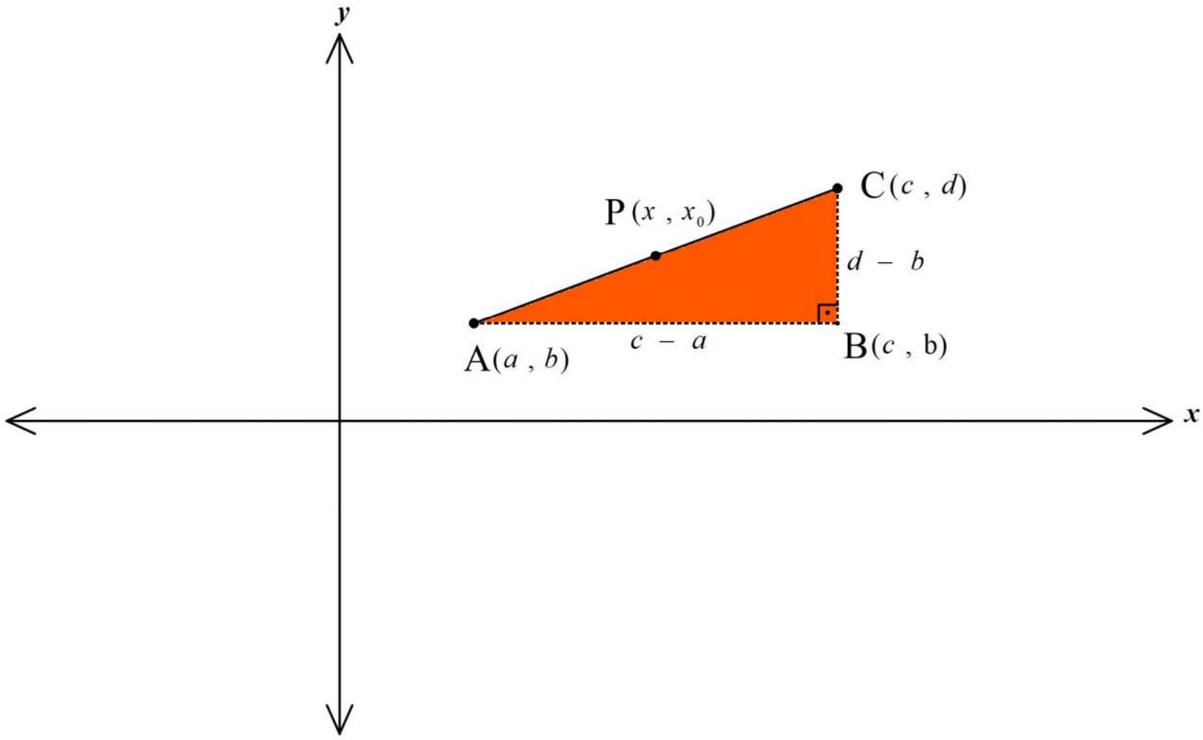
İddia 3.5 x bir gerçel sayı ve $b \leq x_0 \leq d$ olmak üzere $\sqrt{(x-a)^2+(x_0-b)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(x_0-d)^2}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$'dir.

İspat: $\sqrt{(x-a)^2+(x_0-b)^2}$ ifadesi analitik düzlemde $P(x,x_0)$ noktası ile $A(a,b)$ noktası arasındaki uzaklığı temsil etmektedir. $\sqrt{(x-c)^2+(x_0-d)^2}$ ifadesi ise analitik düzlemde $P(x,x_0)$ noktası ile $C(c,d)$ noktası arasındaki uzaklığı temsil etmektedir. İlgili durum Şekil-14'te gösterilmiştir.



Şekil-14

Şekil-14'te $\sqrt{(x-a)^2+(x_0-b)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(x_0-d)^2}=|AP|+|PC|$ olup bu uzaklığın en küçük olması için $[AP]$ ve $[PC]$'nin doğrusal olması gerekmektedir. $[AP]$ ve $[PC]$ doğrusal olacak şekilde uygun şartlar uygulanması durumunda Şekil-15 oluşacaktır.



Şekil-15

Şekil-15'te belirtilmiş olan ABC üçgeninde $|AB| = |c - a|$ ve $|BC| = |d - b|$ olup Pisagor Teoremi uygulanacak olursa $|AC| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ elde edilir. Böylece $\sqrt{(x-a)^2 + (x_0 - b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (x_0 - d)^2}$ ifadesinin alabileceği en küçük değerin $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ olduğu gösterilmiş olur.

Örnek-2: (2013 TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyatı)

x bir gerçel sayı olmak üzere, $\sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

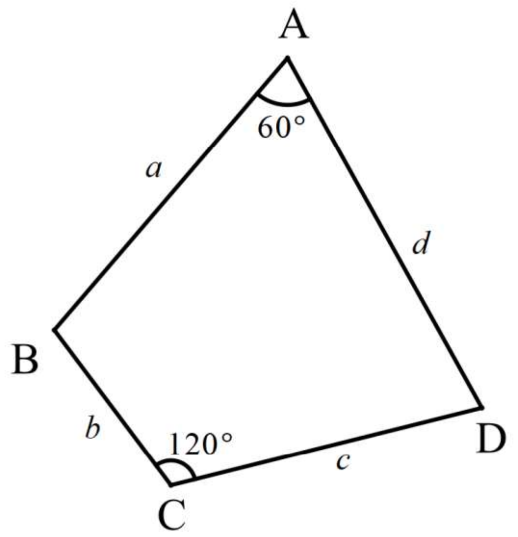
a) 2 b) $3\sqrt{2}$ c) $1 + \sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) Hiçbiri

Çözüm: $\sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{2}-3)^2}$'dir. Böylece, $a = 2$, $b = 1$, $c = 4$ ve $d = 3$ olup belirtilen yöntem ile ifadenin en küçük değeri $\sqrt{(2-4)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$ olarak kolay bir şekilde bulunmuş olacaktır.

İddia 3.6 $a, b, c, d > 0$ olmak üzere, $a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + cb$ ve $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ için $\frac{ab + cd}{\text{ad + cb}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$'dir.

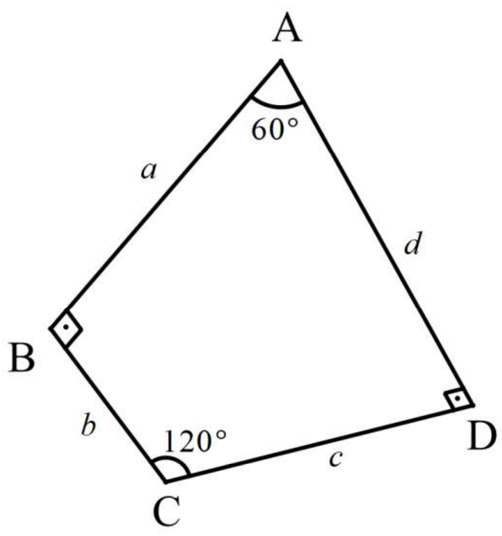
İspat: İspatı algoritmik adımlarla yapalım.

1. adım: $a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + cb$ denklemi, geometrik olarak $|AB| = a$, $|CD| = c$ ve $|DA| = d$ olup $m(BAD) = 60°$ ve $m(BCD) = 120°$ olan bir dörtgen belirtir.
denklemini geometrik olarak temsil eden $ABCD$ dörtgeni Şekil-16'da gösterilmiştir.



Şekil-16

2. adım: Şekil-16'da elde edilen dörtgen $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ denklemini de sağlayacağı için, $m(ABC) = m(ADC) = 90°$ olur. İlgili durum Şekil-17'de gösterilmiştir.



Şekil-17

3. adım: Şekil-17'de gösterilen dörtgenin alanını düşünecek olursak

$$A(ABCD) = A(ABC) + A(ADC) = \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} = \frac{ab + cd}{2}$$

ve

$$A(ABCD) = A(ABD) + A(BCD) = \frac{1}{2}ad \sin 60° + \frac{1}{2}cb \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}(ad + cb)$$

olup bu iki değer eşitlenirse

$$\frac{ab+cd}{2} = \frac{(ad+cb)\sqrt{3}}{4} = \frac{ab+cd}{ad+cb} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

elde edilir.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Yaptığımız çalışmalar sonucunda elde ettiğimiz sonuçları kısaca özetleyelim.

- $a, b, c, k, l, m, x, y, z$ pozitif gerçel sayılar olsun. $a^2 + b^2 = c^2$ olmak üzere, $x + y + z = a$ ve $k + l + m = b$ ise $\sqrt{x^2 + k^2} + \sqrt{y^2 + l^2} + \sqrt{z^2 + m^2}$ ifadesinin en küçük değeri c'dir.
- $a, b, c, x, y, z > 0$ olmak üzere $x^2 + xy + y^2 = a^2$, $z^2 + zx + x^2 = b^2$, $y^2 + yz + z^2 = a^2 + b^2$ ise $x + y + z$ toplamı $\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$'tür.
- x, y, z, k, l, m için $x^2 + y^2 = k^2$, $y^2 + yz\sqrt{3} + z^2 = l^2$ ve $x^2 + xz + z^2 = m^2$ ise $2xy + yz + xz\sqrt{3} = \sqrt{(k + l + m)(-k + l + m)(k - l + m)(k + l - m)}$'dir.

- $x, y, z, k, l, m > 0$ için $x^2 + xy + y^2 = k^2$, $z^2 + zx + x^2 = l^2$ ve $y^2 + yz + z^2 = m^2$ olmak üzere $xy + zx + yz = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(k+l+m)(-k+l+m)(k-l+m)(k+l-m)}$'dir.
- x bir gerçel sayı ve $b \leq x_0 \leq d$ olmak üzere $\sqrt{(x-a)^2 + (x_0 - b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (x_0 - d)^2}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$'dir.
- $a, b, c, d > 0$ olmak üzere, $a^2 + d^2 - ad = b^2 + c^2 + cb$ ve $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ için $\frac{ab+cd}{ad+cb} = \frac{\sqrt{3}}{2}$'dir.

Yaptığımız literatür taraması sonucunda çeşitli kaynaklarda cebir ve geometrinin bağımsız konular olarak ele alındığını fark ettik. Cebir problemleri genellikle analitik yöntemler ve sayısal hesaplamalar kullanılarak çözülüyordu. Bazı özellikleri sağlayan cebirsel problemlerin yaptığımız genellemelerle beraber geometri temelli olarak çözülmesi ve ele alınması literatürde sık karşılaşılan bir durum değildir. Bu bağlamda çalışmamızın özgün bir çalışma olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, mühendislik, mimari ve fizik gibi alanlarda yapılan analizlerde bu tür geometrik çözüm yollarına başvurulmamış olması ile çalışmamızın literatürde önemli bir yer tuttuğunu söyleyebiliriz.

Yaptığımız çalışma sonucunda bazı cebir problemleri için geometrik çözüm önerileri sunduk ve genellemeler yaptık. Bu yaklaşım, eğitim materyalleri hazırlayan öğretmenler için oldukça faydalı olabilir. Cebirsel problemler geometrik bir çerçevede çözüme kavuşturularak öğrencilerin daha hızlı ve etkili bir şekilde çözüme ulaşmaları ve konuyu kavramaları sağlanabilir. Çalışmamızda yer verdiğimiz şartların dışında olan cebir problemleri için de geometrik çözümler araştırılabilir, farklı çözüm yolları bulunup genellemeler yapılabilir. Bu genellemeler mühendislik, mimari gibi çeşitli alanlarda da kullanılabilir. Ayrıca bulduğumuz genellemeler bilgisayar diline aktarılarak daha kolay bir şekilde işlem yapılması sağlanabilir. Bu sayede matematik ile yazılım arasında da bir bağ kurulmuş olunacaktır.

KAYNAKLAR

Amerom, V. A. B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. Educational Studies in Mathematics, 54, 63-75.

Baki, A. & Bütüner S. Ö. (2011). Cebirin tarihsel gelişimi. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2(3), 198-231.

Baykul, Y. (1999a). "İlköğretimde Matematik Öğretimi", İlköğretimde Etkili Öğretme ve Öğrenme Öğretmen El Kitabı. Ankara: MEB Yayınları.

Baykul, Y. (2002). İlköğretimde Matematik Öğretimi (1-5.Sınıflar İçin) (6.Baskı). Ankara: Pegem A Yayınları

Brezina, C. (2006). Great muslim philosophers and scientists of the middle Ages: Al-Khwarizmi, the inventor of algebra, The Rosen Publishing Group: New York.

Carraher, W. D., Schliemann D. A., Brizuela M. B. & Earnest D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education. 37(2), 87-115.

Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the 15th PME International Conference, 1, 17-32.

Katz, J. V. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching, Educational Studies in Mathematics, 66, 185-201.

Konyalıoğlu, A. C. (2003). Üniversite düzeyindeki vektör uzayları konusundaki kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin incelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Mazur, J. (2014). "Enlightening Symbols A Short History of Mathematical Notation and its Hidden Powers". Gönülşen B. (çev.) Matematik Sembollerinin Kısa Tarihi (2016): Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, İstanbul-Türkiye.

Olkun, S. & Aydoğdu T. (2003). Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Araştırması (TIMSS) nedir? Neyi sorgular? Örnek geometri soruları ve etkinlikler. İlköğretim Online, 2(1), 28-35.

Şahin, M. (2013). Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Geometri-1. Ankara. Palme Yayıncılık.

Özdemir, M.E., Duru A. & Akgün L. (2005). İki ve Üç Boyutlu Düşünme: İki ve Üç Boyutlu Geometriksel Şekillerle Bazı Özdeşliklerin Görselleştirilmesi. Kastamonu Eğitim Dergisi, 13(2), 527-540.

Özdemir, M. (2019). Dahimatik. Matematik Yarışmalarına İlk Adım. İzmir. Altın Nokta Yayınları.