



M/M/c queueing model with heterogeneous servers and ordered entry

Hanifi Okan İşgüder*^{ID}

Department of Statistics, Faculty of Science, Doku Eylul University, 35390, Izmir, Türkiye

Highlights:

- M/M/c queueing model with ordered entry is analyzed using matrix geometric method
- The distribution function of the waiting time is obtained
- A simulation study is conducted to compare the exact solutions with the approximate solutions

Keywords:

- Heterogeneous servers
- Steady-state probabilities
- Ordered entry
- Matrix geometric solution
- Markov process

Article Info:

Research Article

Received: 10.07.2025

Accepted: 21.02.2026

DOI:

10.17341/gazimmfd.1717727

Correspondence:

Author: Hanifi Okan İşgüder
e-mail: okan.isguder@deu.edu.tr
phone: +90 536 672 3866

Graphical/Tabular Abstract

In this study, infinite capacity $M/M/c$ queue model with heterogeneous servers and ordered entry is investigated. An arrival is served by the server with the lowest index number among the idle servers with probability 1. When all the servers are busy, the arrivals wait in the queue. The mathematical model of the considered queueing system is obtained and the model is analyzed using the matrix geometric method. The steady – state probabilities and the performance measures are calculated. The distribution function of the waiting times in the queue is obtained. It is proved that under the fastest service rule the mean waiting time is minimum for the $M/M/2$ queueing model with heterogeneous servers and orderd entry. Finally, a simulation study was conducted to compare the exact results with the approximate results (Table A).

Table A. Exact and approximate calculations for the M/M/c queue with ordered entry

Number of Servers c	ρ	λ	Exact Solution W_q	Approximate Solution W_q	Error %
2	0,775701	83	0,0301525	0,0301804	0,0925
3	0,364162	63	0,0013260	0,0013252	0,0603
4	0,183594	47	0,0000541	0,0000543	0,3697
5	0,105431	33	5,680E-07	5,699E-07	0,3346
6	0,747525	302	0,0044409	0,0045334	2,0829
7	0,974160	377	0,0928157	0,0917995	1,0949
8	0,434368	182	0,0001663	0,0001654	0,5412
9	0,822430	352	0,0067922	0,0067899	0,0339
10	0,299595	148	5,861E-06	5,649E-06	3,6171
11	0,647416	426	0,0006314	0,0006322	0,1267
12	0,727642	358	0,0019239	0,0019088	0,7849
13	0,752860	658	0,0013251	0,0013309	0,4377
14	0,597260	436	0,0002343	0,0002309	1,4511

Purpose: The $M/M/c$ queueing model with infinite capacity, heterogeneous servers, and ordered entry is examined in detail. The ordered entry service discipline provides a more realistic representation of customer behavior that may occur in real systems, thereby ensuring an accurate depiction of system dynamics and offering an innovative perspective in analytical solution procedures.

Theory and Methods: The Markov process characterizing the queueing system and its associated transition rate matrix are defined. General forms of the transition rate matrix are derived, and the steady-state probabilities are computed using the matrix-geometric method.

Results: The distribution function of the waiting time in the queue is derived, and an analytical expression for the mean waiting time is presented. For the $M/M/2$ queueing model with heterogeneous servers and ordered entry, it is mathematically proven that the mean waiting time in the queue is minimized under the fastest service rule. This proof provides a significant contribution to the determination of optimal service discipline in heterogeneous systems. Finally, a discrete-event simulation model developed in the MATLAB environment is used to compute the fundamental performance measures of the system, and these results are compared with the exact solutions obtained via the matrix-geometric method.

Conclusion: The results of this study underscore the critical influence of service discipline on the performance of heterogeneous queueing systems. Furthermore, incorporating behavioral factors—such as fatigue, learning effects, and motivation-into heterogeneous queueing models for human-centered service systems is expected to facilitate more realistic and robust performance assessments in application domains including healthcare, retail, and call center operations.



Heterojen kanallı ve sıralı girişli M/M/c kuyruk modeli

Hanifi Okan İşgüder*^{ID}

Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 35390, İzmir, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Sıralı girişli M/M/c kuyruk modeli matris geometrik yöntem kullanılarak analiz edilmiştir
- Bekleme süresinin dağılım fonksiyonu elde edilmiştir
- Benzetim çalışması yapılarak tam çözümlerle yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 10.07.2025

Kabul: 21.02.2026

DOI:

10.17341/gazimmfd.1717727

Anahtar Kelimeler:

Heterojen kanallar,
durağan durum olasılıkları,
sıralı giriş,
matris geometrik çözüm,
Markov süreci

ÖZ

Bu çalışmada heterojen kanallı sınırsız kapasiteli M/M/c kuyruk modeli incelenmiştir. Sisteme gelen müşteri boş olan kanallardan sıra numarası en küçük olan kanalda 1'e eşit olasılıkla hizmete başlar. Eğer bütün kanallar dolu ise gelen müşteri kuyrukta bekler. Ele alınan kuyruk sisteminin matematiksel modeli elde edilmiş ve model matris geometrik yöntem kullanılarak çözümlenmiştir. Durağan durum olasılıkları ve sistemin performans ölçüleri hesaplanmıştır. Kuyrukta bekleme süresinin dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. Heterojen kanallı ve sıralı girişli M/M/2 kuyruk modeli için en hızlı hizmet kuralı altında, kuyrukta ortalama bekleme süresinin minimum olduğu ispatlanmıştır. Son olarak bir benzetim çalışması yapılarak tam sonuçlarla yaklaşık sonuçlar karşılaştırılmıştır.

M/M/c queueing model with heterogeneous servers and ordered entry

H I G H L I G H T S

- M/M/c queueing model with ordered entry is analyzed using matrix geometric method
- The distribution function of the waiting time is obtained
- A simulation study is conducted to compare the exact solutions with the approximate solutions

Article Info

Research Article

Received: 10.07.2025

Accepted: 21.02.2026

DOI:

10.17341/gazimmfd.1717727

Keywords:

Heterogeneous servers,
steady-state probabilities,
ordered entry,
matrix geometric solution,
Markov process

ABSTRACT

In this study, infinite capacity M/M/c queue model with heterogeneous servers and ordered entry is investigated. An arrival is served by the server with the lowest index number among the idle servers with probability 1. When all the servers are busy, the arrivals wait in the queue. The mathematical model of the considered queueing system is obtained and the model is analyzed using the matrix geometric method. The steady – state probabilities and the performance measures are calculated. The distribution function of the waiting times in the queue is obtained. It is proved that under the fastest service rule the mean waiting time is minimum for the M/M/2 queueing model with heterogeneous servers and ordered entry. Finally, a simulation study was conducted to compare the exact results with the approximate results.

1. Giriş (Introduction)

Kuyruk teorisi, sistemlerdeki bekleme ve hizmet süreçlerini matematiksel olarak modelleyen bir disiplin olarak, sınırlı kaynakların bulunduğu ortamlarda taleplerin (müşteriler, görevler, veri paketleri vb.) kuyruk oluşturmaları, hizmet alması ve sistemden ayrılmasını incelemektedir. Bu teori, sistem performansını optimize etmek, kaynak kullanımını verimli hale getirmek ve bekleme sürelerini en aza indirmek amacıyla geliştirilmiş olup, modern toplumun karmaşık sistemlerini tasarlamak ve yönetmek için temel bir araç niteliğindedir. Telekomünikasyondan ulaşım, sağlık hizmetlerinden endüstriyel süreçlere kadar geniş bir yelpazede uygulama bulan kuyruk teorisi, operasyonel etkinlik ve kullanıcı memnuniyetini artırmada kritik bir rol oynamaktadır. Telekomünikasyon ve bilgisayar ağları, kuyruk teorisinin en yoğun kullanıldığı alanlardan biridir. İnternet, telefon ve kablosuz ağlar ile veri merkezlerinde paket işleme, tıkanıklık önleme ve bant genişliği optimizasyonu kuyruk teorisine analiz edilmektedir. Örneğin, yönlendiricilerde paket sıralama, çağrı merkezlerinde çağrı yönlendirme ve bulut bilişimde sunucu kaynaklarının dinamik tahsisi kuyruk teorisine dayanmaktadır. Bu uygulamalar, iletişim sistemlerinin hızını ve güvenilirliğini artırarak kullanıcı deneyimini iyileştirmektedir. Ulaşım ve lojistik sistemleri de kuyruk teorisinin etkin bir şekilde uygulandığı bir diğer alandır. Trafik ışıklarının zamanlaması, otoyol gişelerindeki araç kuyruklarının yönetimi, toplu taşıma sistemlerinde yolcu akışının düzenlenmesi, havalimanlarında uçakların iniş – kalkış sıralarının planlanması ve limanlarda gemilerin yükleme – boşaltma süreçlerinin optimizasyonu, kuyruk teorisine ilişkilidir. Bu analizler, gecikmelerin azaltılmasını ve ulaşım sistemlerinin verimliliğini artırmayı sağlamaktadır. Sağlık sektörü, kuyruk teorisinin kaynakların etkin kullanımı ve hasta memnuniyetinin artırılması için vazgeçilmez olduğu bir alandır. Hastanelerde acil servis birimlerinin düzenlenmesi, randevu sistemlerinin tasarımı, ameliyathane planlaması, reçete işleme süreçleri ve laboratuvarlarda test sonuçlarının teslim sürelerinin optimizasyonu, kuyruk teorisine gerçekleştirilmektedir. Özellikle pandemi gibi kriz dönemlerinde, toplu test ve aşı merkezlerinde kuyrukların yönetimi bu teoriyle desteklenerek hızlı ve etkili hizmet sunulmaktadır. Perakende ve hizmet sektöründe, müşteri memnuniyetini artırmak ve operasyonel süreçleri optimize etmek için kuyruk teorisi kullanılmaktadır. Süpermarket kasalarında, banka gişelerinde, ATM’lerde, postanelerde veya tematik parklar gibi eğlence mekanlarında kuyrukların yönetimi, personel tahsisi ve hizmet süreçlerinin düzenlenmesi yine bu teoriyle analiz edilmektedir. Bu uygulamalar, müşteri bekleme sürelerini azaltarak hizmet kalitesini yükseltmektedir.

Üretim ve endüstriyel süreçlerde, iş parçalarının makineler arasında sıralanması, üretim hatlarının optimizasyonu, depo operasyonlarında malzeme akışının düzenlenmesi ve tedarik zincirinde sipariş işleme süreçlerinin yönetimi için de yine kuyruk teorisinin en azı temel prensipleri kullanılmaktadır. Bu sayede, üretim süreçlerinde verimlilik artışı sağlanmakta ve maliyetler düşürülmektedir. Bilgisayar ve yazılım sistemlerinde de kuyruk teorisi, görev ve süreç yönetiminin temelini oluşturur. İşletim sistemlerinde işlemleri görev kuyruklarının yönetimi, veri tabanlarında sorgu işleme süreçlerinin optimizasyonu ve çevrimiçi platformlarda (örneğin oyun sunucuları veya e-ticaret sistemleri) kullanıcı kuyruklarının düzenlenmesi, bu teorisinin uygulama alanları arasındadır. Bu analizler, sistem performansını artırarak kullanıcı deneyimini güçlendirmektedir. Acil durum ve kamu hizmetleri, kuyruk teorisinin sınırlı kaynaklarla yüksek talebi yönetmek için kullanıldığı bir başka önemli alandır. Ambulans, itfaiye ve polis gibi acil servislerin yanıt sürelerinin optimize edilmesi, sosyal güvenlik veya vergi daireleri gibi kamu hizmetlerinde kuyrukların düzenlenmesi, bu teoriyle

desteklenmektedir. Bu uygulamalar, kritik durumlarda hızlı ve etkin hizmet sunumunu mümkün kılmaktadır.

Kıscacası kuyruk teorisi, modern sistemlerin karmaşık dinamiklerini anlamak ve optimize etmek için olasılık teorisi, istatistiksel analiz ve matematiksel modelleme tekniklerini birleştirerek disiplinler arası bir çerçeve sunar. Bu bağlamda, özellikle heterojen kanallı kuyruk modelleri, servis birimlerinin farklı hizmet hızlarına, kapasitelerine veya teknik özelliklere sahip olduğu sistemlerin daha gerçekçi bir şekilde modellenmesinde kritik bir öneme sahiptir. Gerçek dünya uygulamalarında, servis birimlerinin homojen olduğu varsayımı genellikle basitleştirici bir yaklaşımdır ve birçok senaryoda gerçekliği tam olarak yansıtmaz. Örneğin, insan tabanlı hizmet sistemlerinde çalışanların deneyim düzeyleri, yetkinlikleri veya çalışma hızları farklılık gösterebilir; benzer şekilde, mekanik sistemlerde makinelerin teknik kapasiteleri, bakım durumları veya performans özellikleri değişkenlik arz edebilir. Bu tür heterojen yapılar, sistem dinamiklerini doğrudan etkileyerek kuyruk uzunlukları, bekleme süreleri ve hizmet verimliliği gibi performans ölçülerini belirgin bir şekilde etkiler. Heterojen kanallı kuyruk modelleri, bu farklılıkları dikkate alarak sistemlerin daha doğru bir matematiksel temsilini sağlar ve gerçek hayat problemlerine daha uygun çözümler sunar. Özellikle, rastgele kanal seçimi yerine sıralı giriş veya en hızlı kanal seçimi gibi hizmet disiplinlerinin kullanılması, müşteri davranışlarını (örneğin, daha hızlı bir kanalı tercih etme eğilimi) ve sistemin işleyişini daha iyi yansıtır. Ancak, bu modellerin matematiksel karmaşıklığı, analitik çözümlerin elde edilmesini zorlaştırarak özellikle teorik düzeyde yeni yaklaşımlar gerektirir. Heterojen kanallı kuyruk modellerinin önemi, yalnızca gerçekçi modelleme kapasitesinden değil, aynı zamanda sistem optimizasyonu ve hizmet kalitesinin artırılmasına olan katkılarından da kaynaklanmaktadır. Örneğin, bir çağrı merkezinde farklı becerilere sahip operatörlerin görev dağılımı, bir üretim hattında farklı hızlarda çalışan makinelerin iş akışı, heterojen kanallı modellerle analiz edilerek daha etkin bir şekilde yönetilebilir. Bu modeller, sistem tasarımcılarına kaynak tahsisini optimize etme, maliyetleri düşürme ve müşteri memnuniyetini artırma gibi stratejik avantajlar sağlar. Ayrıca (dolayısıyla), heterojen kanallı sistemlerde hizmet disiplininin seçimi (örneğin, rastgele seçim, sıralı giriş veya en hızlı kanal seçimi), sistem performansını doğrudan etkileyen bir faktör olarak öne çıkar. Bu tür disiplinler, matematiksel modellemenin karmaşıklığını artırsa da, gerçek dünya senaryolarına daha uygun çözümler sunarak kuyruk teorisinin pratik değerini güçlendirir.

Bu çalışmada heterojen kanallı kuyruk modellerinin önemini vurgulayarak, özellikle sıralı giriş hizmet disiplini altında bu modellerin analitik çözüm zorlukları ortaya konulacaktır. Matris geometrik yöntem kullanılarak heterojen kanallı $M/M/c$ kuyruk sisteminin çözümü yapılacak, sistemin durağan durum olasılıkları, performans ölçüleri ve bekleme süresinin dağılım fonksiyonu türetilerek sistem optimizasyonuna yönelik yeni bir çerçeve sunulacaktır. Bu bağlamda bu çalışma, kuyruk teorisinin sınırlarını genişletmeyi ve heterojen kanallı sistemlerin modellenmesi için yenilikçi bir perspektif sağlamayı hedeflemektedir.

İzleyen bölümde literatür taraması yapılmıştır. Üçüncü bölümde heterojen kanallı ve sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk modeli tanımlanmış ve modeli temsil eden denge denklemleri türetilmiştir. Dördüncü bölümde, ele alınan modelin analizi matris geometrik yöntem kullanılarak yapılmıştır. Beşinci bölümde sistemin durağan durum olasılıkları ile performans ölçüleri ve kuyrukta ortalama bekleme süresinin dağılım fonksiyonu elde edilmiştir. Yine bu bölümde heterojen kanallı ve sıralı girişli $M/M/2$ kuyruk sistemi için kuyrukta ortalama bekleme süresinin en hızlı servis kuralı altında minimum olduğu ispatlanmıştır. Altıncı ve yedinci bölümlerde sırasıyla tam çözümler ve benzetim algoritmasıyla elde edilen çözümler yer

almaktadır. Ayrıca yedinci bölümde benzetim algoritmasıyla elde edilen sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırmalı olarak sunulmaktadır. Sonuçlar bölümünde ise genel değerlendirmelere yer verilmektedir.

2. Literatür Taraması (Literature Review)

Kuyruk teorisinin temeli, Danimarkalı bilim insanı A. K. Erlang'ın [1] 1909 yılında yazmış olduğu "Olasılık ve Telefon Konuşmaları" isimli makalesine dayanmaktadır. Teori zaman içinde Palm [2], Kendall [3], Takacs [4], Gumbel [5], Neuts [6], Kovalenko vd. [7] gibi bilim insanının çalışmaları ile zenginleşmiş ve günümüzde oldukça geniş bir uygulama alanı ortaya çıkmıştır. Bugün kuyruk teorisi, klasik kuyruk modellerinde örtüşme sayısının dağılımı gibi yeni performans ölçülerinin elde edilmesinin [8] yanı sıra, montaj hattı dengeleme modelleri [9], kuyruk – envanter modelleri [10-12], iletişim sistemleri [13, 14], kablosuz sensör ağları [15, 16], ve acil servis sistemlerinin konuşlandırılması [17, 18] gibi çok çeşitli bir yelpazede kullanılmaktadır.

İlk yıllarda stokastik servis sistemlerindeki esas problemler kuyruk modellerinin temel karakteristiklerinin belirlenmesi, kesintisiz çalışma zamanının belirlenmesi, performans ölçülerinin hesaplanması şeklinde gelişme göstermiştir Kendall [3], Lindley [19], Smith [20], Boxma [21]. Kendall [3] kuyruk modellerinin temel karakteristiklerini mükemmel bir şekilde açıklamış ve $M/G/1$ kuyruk sisteminde kesintisiz çalışma süresinin dağılım fonksiyonunu elde etmiştir. Lindley [19] bekleme süresinin dağılımını karakteristik fonksiyonları kullanarak elde etmiş ve $M/G/1$, $E_k/G/1$ ve $D/E_k/1$ kuyruk modellerini incelemiştir. Smith [20] ise bekleme süresinin dağılımını Wiener-Hopf tipi integral denkleminin çözümünü yaparak elde etmiştir. Kendall [22] kuyruk modellerinin temel karakteristikleri açısından standart bir gösterime kavuşturmuştur. Kendall [22] bu çalışmasında çok kanallı $GI/M/s$ kuyruk modelini incelemiş, $M/M/s$ ve $D/M/s$ kuyruk modelleri için sisteme gelen müşterinin hiç beklemeden hizmet alması olasılığını ve ortalama bekleme süresinin ortalama servis süresine oranını sayısal bir örnek üzerinden açıklamıştır.

Daha sonraki yıllarda kuyruk kuramında yapılan çalışmalar, zaman ve iş kaybının minimuma indirilmesi Shantikumar vd. [23], Atkinson vd. [24], maliyet optimizasyonu Stidham [25], Kocaer vd. [26], Wu vd. [27], müşterinin kaybolma olasılığının minimize edilmesi Yao [28], Alpaslan vd. [29], maksimum örtüşme süresinin belirlenmesi Boxma vd. [30], gibi hizmet kalitesinin artırılmasını hedefleyen göstergelerin elde edilmesi şeklinde gelişme göstermiştir.

Kuyruk sistemlerinin modellenmesinde geliş akımının ve hizmet süresinin dağılımı, sistemin Markov özelliğine sahip olup olmadığını ve dolayısıyla analitik çözüm için uygulanacak yöntemi belirlemesi açısından oldukça önemlidir. Sistemde birden fazla kanal olması durumunda kanalların özdeş olup olmadığı, matematiksel modeli etkileyen bir diğer önemli faktördür. Çok kanallı kuyruk sistemlerinde kanalların homojen olması yaygın bir varsayımdır. Bu durum, servis birimlerinin mekanik olması durumunda karşılığı bulan bir varsayımdır. Oysaki günlük hayatımızda insanların servis birimi olarak hizmet verdiği birçok kuyruk sistemiyle karşılaşırız. Bu sistemlerde her servis biriminin özdeş çalışması gerçek durumu tam olarak yansıtmayabilir. Ayrıca sistem mekanik dahi olsa cihazların teknik özelliklerinden ya da cihazların periyodik bakımlarından kaynaklı olarak bu cihazların her an aynı performansı göstermesi beklenen bir durum değildir. Sonuç olarak cihazların ortalama hizmet süreleri birbirlerinden farklı olabilir. Bu gibi durumlarda hizmet birimlerinin heterojen varsayılması ve kuyruk sistemlerinin buna göre modellenmesi daha gerçekçi olacaktır.

Heterojen kanallı kuyruk modelleri ilk defa Gumbel [5] tarafından incelenmiştir. Gumbel [5] $M/M/s$ kuyruk modelinde ortalama hizmet

sürelerinin birbirlerinden farklı olduğunu varsaymış ve sistemin analizini bu varsayım altında yapmıştır. Bu modelde sisteme gelen müşteri boş olan kanallardan herhangi birisine eşit olasılıkla girer (rastgele seçim). Fakinos [31] bekleme yerinin olmadığı $M/G/k$ kuyruk modelini rastgele seçim disiplini varsayımı altında analiz etmiştir.

Servis birimlerini heterojen varsaymak, gerçek hayat problemlerini daha iyi karşılamakla birlikte, kanalları heterojen düşünüp hizmet disiplini rastgele varsaymak gerçeği yansıtan bir durum değildir. Çünkü müşteriler servis birimleri arasındaki farklılıkları bilirlerse boş kanallar arasında rastgele seçim yapmaktansa hızlı olanı tercih edeceklerdir Krishnamoorthi [32]. Ayrıca heterojen kanallı kuyruk sistemlerini, rastgele seçim disiplini yerine boş olan kanallardan en hızlı olanını seçme varsayımıyla analiz etmek daha gerçekçi olacaktır. Ancak kuyruk disiplini yapılacak olan bu değişiklik sistemin matematiksel olarak modellenmesini zorlaştırmakta ve analiz yöntemi aynı kalsa bile bu yöntemin uygulanmasını güçleştirmektedir. Neuts vd. [33] heterojen kanallı $GI/PH/c$ kuyruk modelini asimtotik olarak analiz etmişlerdir. c kanal sayısını, E de sistemde bulunan müşteri sayısının $(c-1)$ 'den daha az olduğu durumları göstermek üzere yazarlar şunu belirtmişlerdir: "Sütunlardaki E ve $c-1$ olarak etiketlenen unsurlar tartışmamız açısından önemsizdir. Genel olarak, bunlar son derece karmaşıktır ve gelen müşterilerin boş sunuculara atanma kuralına bağlıdır." Yani Neuts vd. [33], bu durumları hizmet disiplinine doğrudan bağlı olduğundan incelememişlerdir. Hizmet disiplini kuyruk sistemlerinin modellenmesini en az geliş akımının ve hizmet süresinin dağılımı kadar etkiler. Özellikle hizmet disiplinin sıralı giriş olarak varsayılması, sistemi temsil eden matematiksel modelin kapalı formunun elde edilmesini güçleştirir.

Sıralı giriş hizmet disiplini gelen müşterilerin boş olan kanallardan indeks numarası en küçük olan kanalda 1'e eşit olasılıkla hizmete başlaması şeklinde ilk defa Palm [2] tarafından tanımlanmıştır. Bugüne kadar birçok kuyruk sistemi sıralı giriş hizmet disiplini altında incelenmiş olmasına rağmen kanal sayısı 2 ya da 3 ile sınırlanmıştır Krishnamoorthi [32], Singh [34]. Bazı çalışmalarda ise bilgisayar programı yardımıyla sayısal olarak çözümleri verilmiş Lin vd. [35] ya da bazı performans ölçüleri için yaklaşık çözümler önerilmiştir Pourbabei vd. [36]. Lin vd. [35] sınırlı kapasiteli ve sıralı girişli $M/M/n$ kuyruk modelinde kanal kullanım yoğunluğunu geliştirdikleri bilgisayar programı yardımıyla hesaplamıştır. Lin vd. [35] "bu sistemin kapalı form çözümü imkansız olmasa bile aşılması zor görünüyor; bu nedenle, biz bu probleme sayısal olarak yaklaştık" diye belirterek, aslında sıralı giriş disiplini altında sistemin analitik çözümünün zor olduğunu açık bir şekilde ifade etmiştir. Diğer taraftan bekleme yerinin olmadığı $M/M/n/n$, $GI/M/n/n$ kuyruk sistemleri ve sınırsız kapasiteli $GI/M/s$ kuyruk sistemi sıralı giriş hizmet disiplini altında sırasıyla Nath vd. [37], Yao [38] ve Cooper [39] tarafından incelenmiştir. Bu üç çalışmanın ortak noktası sıralı giriş hizmet disiplinin ilgili kuyruk modellerine tam olarak yansıtılmamış olmasıdır (bkz., İşgüder and Uzunoglu-Kocer [40]). Ayrıca çok kanallı ve Erlang tipi kuyruk sistemlerinde çok yüksek trafik yoğunlukları için elde edilen limit dağılımları ve difüzyon yaklaşımları Halfin vd. [41], Puhalskii [42] ve Whitt [43] tarafından ayrıntılı biçimde incelenmiştir.

Bu çalışmada Gumbel [5] tarafından ortaya konulan $M/M/s$ kuyruk sistemi, rastgele hizmet seçimi yerine sıralı giriş hizmet seçimi varsayımı altında analiz edilmiştir. Böylece diğer bütün varsayımlar aynı kalırken sadece hizmet disiplini yapılan bir değişikliğin sistemin modellenmesinde ne kadar büyük bir öneme sahip olduğu ortaya konulmuştur. Ayrıca bu modelin analizi Gumbel'den [5] farklı olarak lineer denklem sistemini çözmek yerine matris geometrik çözüm yöntemiyle yapılmıştır. Son olarak MATLAB ortamında tasarlanan kesikli olay benzetim algoritması kullanılarak sistemin

performans ölçüleri yaklaşık olarak hesaplanmış ve bu değerler matris geometrik yöntemle elde edilen tam çözümlerle karşılaştırılmıştır.

3. Model ve Varsayımları (The Model and its Assumptions)

Müşterilerin sisteme geliş anları $t_0, t_1, \dots$ olmak üzere gelişler λt parametrelili Poisson sürecidir; öyle ki geliş akımı kuyruk uzunluğundan bağımsızdır. Sistemde birbirinden bağımsız c tane kanal vardır. j - ncı kanalın hizmet süresi μ_j ($j = 1, 2, \dots, c$) parametrelili üstel dağılıma sahiptir. Sisteme gelen müşteri boş olan kanallardan indeks numarası en düşük olan kanala 1'e eşit olasılıkla girer. Eğer bütün kanallar dolu ise sisteme gelen müşteri kuyruğa girer. Sistemde sınırsız bekleme yeri vardır ve ilk gelen ilk hizmet alır. Herhangi bir kanalın hizmet süresi geliş akımından ve kuyruk uzunluğundan bağımsızdır.

Hem gelişlerarası süreler hem de hizmet süresi üstel dağıldığı için ele alınan model Markov özelliğine sahiptir. Bu durum sistemin modellenmesinde kolaylık sağlıyor olsa da, kanalların heterojen olması ve hizmet disiplinin sıralı giriş olması nedeniyle sistemin modellenmesi oldukça karmaşıktır. Çünkü hem sisteme gelen müşterinin hangi indeks numaralı kanala girdiğinin hem de sistemden ayrılan müşterinin hangi indeks numaralı kanaldan ayrıldığına belirlenmesi gerekir.

$N(t)$, t - anında sistemde bulunan müşteri sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$, durum uzayı $E = \{0, r_1, r_2, \dots, r_c, c+1, c+2, \dots\}$ olan sürekli parametrelili Markov süreci olsun. Burada $r_1, r_2, \dots, r_c$ durumlarının her birisi alt durumlardan oluşur. Herhangi bir r_k , $k = 1, 2, \dots, c$ durumunda yer alan alt durum sayısı $\binom{c}{k}$ kombinasyonu kadardır. Örneğin $c = 3$ için durum uzayı $E = \{0, r_1, r_2, r_3, 4, 5, \dots\}$ biçiminde olup; burada $r_1 = \{1, 2, 3\}$, $r_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, $r_3 = \{(1, 2, 3)\}$ durumlarından oluşur. Yani sistemde t - anında 1 müşteri bulunuyorsa, bu müşteri bu üç kanaldan ancak ve ancak birisinde olabilir. Sistemde bulunan müşterinin birinci, ikinci ve üçüncü kanalda bulunma olasılıkları sırasıyla $P(1)$, $P(2)$ ve $P(3)$ olsun. Böylece sistemin r_1 durumunda bulunma olasılığı $P(r_1) = P(1) + P(2) + P(3)$ olur. Benzer şekilde sistemin r_2 ve r_3 durumunda bulunma olasılığı sırasıyla $P(r_2) = P(1, 2) + P(1, 3) + P(2, 3)$ ve $P(r_3) = P(1, 2, 3)$ olur. Genel olarak $1 \leq k \leq c$ için $P(r_k) = \sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq c} P(a_1, a_2, \dots, a_k)$ yazılabilir. Kısaca $P(r_k) = P_k$, $1 \leq k \leq c$ olsun. Böylece P_k , $k = 0, 1, \dots$, durağan durumda sistemde k müşteri bulunması olasılığıdır.

Ele alınan sistemin Markov özelliğine sahip olduğu dikkate alınarak yukarıda açıklanan varsayımlar altında sistemi temsil eden matematiksel model Eş. 1, Eş. 2, Eş. 3, Eş. 4 ve Eş. 5 ile elde edilir:

$$k = 0 \text{ için,} \\ -\lambda P_0 + \sum_{j=1}^c \mu_j P(j) = 0, \quad (1)$$

$$k = 1 \text{ için,} \\ \lambda P_0 - \lambda \sum_{j=1}^c P(j) - \sum_{j=1}^c \mu_j P(j) \\ + \sum_{1 \leq j < r \leq c} (\mu_j + \mu_r) P(j, r) = 0, \quad (2)$$

$$2 \leq k \leq c - 1 \text{ için,} \\ \lambda \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_{k-1} \leq c} P(a_1, \dots, a_{k-1}) - \\ \lambda \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq c} P(a_1, \dots, a_k) - \\ \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq c} (\mu_{a_1} + \dots + \mu_{a_k}) P(a_1, \dots, a_k) + \\ \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_{k+1} \leq c} (\mu_{a_1} + \dots + \mu_{a_{k+1}}) P(a_1, \dots, a_{k+1}) = 0, \quad (3)$$

$$k = c \text{ için,}$$

$$\lambda \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_{k-1} \leq c} P(a_1, \dots, a_{k-1}) - \lambda P_k - \\ \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq c} (\mu_{a_1} + \dots + \mu_{a_k}) P_k + \\ \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq c} (\mu_{a_1} + \dots + \mu_{a_k}) P_{k+1} = 0, \quad (4)$$

$$k \geq c + 1 \text{ için,}$$

$$\lambda P_{k-1} - \lambda P_k - \sum_{j=1}^c \mu_j P_k + \sum_{j=1}^c \mu_j P_{k+1} = 0. \quad (5)$$

Yukarıda verilen denklem sistemi $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ koşulu altında çözülerek durağan durum olasılıkları elde edilebilir. Burada $k < c$ için P_k olasılıkları alt durumlardan oluştuğu için, yani vektör yapılı olduğu için (1) – (5) eşitlikleriyle ile verilen matematiksel model kolaylık açısından matris gösterimi ile yeniden ifade edilebilir. Daha sonrasında ilgili model genellikle faz tipi dağılımları içeren kuyruk modellerine uygulanan ve Neuts [44] tarafından geliştirilen matris geometrik yöntem kullanılarak çözülebilir.

Bir sonraki bölümde heterojen kanallı ve sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk modeli matris geometrik yöntem ile analiz edilecektir. Literatürde kullanılan gösterimlere sadık kalmak amacıyla ilgili model matris geometrik çözümleme çerçevesinde yeniden tanımlanmıştır. Aynı gerekçeyle durağan durum olasılıkları için P_k yerine π_k gösterimi tercih edilmiştir.

4. Analiz – Matris Geometrik Çözümleme (Analysis-Matrix Geometric Solution)

Tanımlanan kuyruk sistemi, $\{N(t), L(t), t \geq 0\}$ iki boyutlu sürekli zamanlı Markov süreci olarak gösterilmiştir. $N(t)$, t - anında sistemde bulunan müşteri sayısını göstermektedir. $N(t)$ aynı zamanda sürecin düzeylerine karşılık gelir ve negatif olmayan değerler alır. $L(t)$, t - anında meşgul olan kanalın numarasını gösteren vektör değerli durum değişkenidir ve boyutları sürecin düzeylerine göre değişim gösterir. Örneğin 5 heterojen kanalın bulunduğu bir kuyruk sisteminde, 1., 3. ve 4. kanallar tarafından hizmet alan 3 müşteri varsa, durum değişkeni $[3, (1, 3, 4)]$ olarak gösterilir.

$\{N(t), L(t)\}$ Markov sürecine ait durum uzayı, $k \leq c$ olmak üzere, $E = \{(k, i): k = 0, 1, \dots; i \in L_k\}$ olarak tanımlanmıştır. Sistemde bulunan müşteri sayısı için bir üst sınır bulunmadığından $N(t)$ durum değişkeni, sıfırdan sonsuza negatif olmayan tamsayı değerler alır. Sistemde bulunan k müşteri için bu müşterilerin hangi kanallardan servis aldığı, i vektörü ile gösterilir. Bu vektör, k boyutlu bir satır vektördür. i vektörü için olası vektör değerler kümesi L_k meşgul kanalların k boyutlu alternatiflerini içerir. Örneğin 5 heterojen kanalın bulunduğu kuyruk sisteminde, sistemde 3 müşteri olduğu durumda, i vektörü için olası değerler kümesi L_k Eş. 6'da gösterilmiştir.

$$L_k = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), \\ (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}. \quad (6)$$

Burada sistemin boş olması, yani $k = 0$ durumunda $L_0 = \{0\}$ olur. Sistemde bulunan müşteri sayısının kanal sayısından fazla olması ($k > 0$), tüm kanalların meşgul olduğu anlamına gelir. Bu durumda sistemin durumu $[k, (1, 2, \dots, c)]$ olarak gösterilir. Böylece durum uzayı, $L_c = \{(1, 2, \dots, c)\}$ olmak üzere, $E = \{(k, i): k = 0, 1, \dots; i \in L_c\}$ olarak tanımlanabilir. Örneğin, heterojen kanallı ve sıralı girişli $M/M/3$ kuyruk sistemi için durum uzayı Eş. 7'deki gibi olur.

$$E = \{[0, 0], [1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, (1, 2)], [2, (1, 3)], \\ [2, (2, 3)], [3, (1, 2, 3)], [4, (1, 2, 3)], \dots\}. \quad (7)$$

$c = 3$ ve $N(t) = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ için durum uzayının bir deseni Tablo 1'de verilmiştir. Tablo 2'de bu çalışmada kullanılan semboller açıklamaları ile birlikte verilmiştir.

Tablo 1. Kanal sayısı $c = 3$ için durum uzayı deseni (The state space structure for $c = 3$ servers)

Müşteri Sayısı	Durum Uzayı $E = \{(k, i): k = 0, 1, \dots; i \in L_k\}$
0	[0,0]
1	[1,1], [1,2], [1,3]
2	[2, (1,2)], [2, (1,3)], [2, (2,3)]
3	[3, (1,2,3)]
4	[4, (1,2,3)]
...	...

Tablo 2. Semboller ve açıklamaları (Notation and definitions)

Sembol	Açıklama
t	Zaman indeksi
$N(t)$	t anında sistemde bulunan müşteri sayısını gösteren değişken
$L(t)$	t anında meşgul olan kanal sayısını gösteren vektör değerli değişken
E	Durum uzayı
c	Kanal sayısı
Q	Geçiş hızları matrisi
λ	Birim zamanda sisteme gelen ortalama müşteri sayısı
μ_j	j - nci kanalın birim zamanda verdiği ortalama hizmet sayısı
I_k	k boyutlu birim matris
e_k	k boyutlu yalnızca 1'lerden oluşan sütun vektörü
π_k	Durağan durumda sistemde k müşteri bulunması olasılığı
W_q	Müşterinin kuyrukta ortalama bekleme süresi
W	Müşterinin sistemde ortalama kalma süresi
L_q	Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı
L	Sistemde bulunan ortalama müşteri sayısı

Tanımlanan Markov sürecine ait geçiş hızı matrisi Q , elemanları matris olan üç köşegen matris formunda olup Eş. 8 ile verilmiştir. $k \leq c$ olduğunda alt matris boyutları k 'ya bağlı olarak değişmekte, $k > c$ durumları için, tüm kanallar meşgul olacağından, alt matrisler klasik $M/M/1$ kuyruk sistemindeki gibi yazılmaktadır yani skaler değerlerdir.

$$Q = \begin{bmatrix} B_0 & C_0 & & & & & & & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & & & & & \\ & A_2 & B_2 & C_2 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & A_{c-1} & B_{c-1} & C_{c-1} & & & & \\ & & & & A_c & B & C & & & \\ & & & & & A & B & C & & \\ & & & & & & A & B & C & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (8)$$

Geçiş hızı matrisinin ana köşegeni B_0, B_k , matrisleri ve B skaleri ile ifade edilirken; üst köşegeni C_0, C_k , ve C ile, $1 \leq k \leq c-1$ durumları için yazılır. Alt köşegende ise $1 \leq k \leq c$ durumları için A_k matrisleri ve A yer alır. Eş. 8 ile verilen Q matrisinin alt köşegeninde yer alan A_k matrislerinin boyutları $\binom{c}{k} \times \binom{c}{k-1}$ olur. I_k, k boyutlu birim olmak üzere A_k 'nın genel formunu elde etmek için aşağıdaki matrisler Eş. 9, Eş. Eş. 10 tanımlansın:

$$M_k = \begin{bmatrix} \mu_k \\ \mu_{k+1} \\ \vdots \\ \mu_c \end{bmatrix}_{(c-k+1) \times 1}, \quad (9)$$

$$X_k = \begin{bmatrix} M_k & \mu_{k-1} I_{(c-k+1)} & & & \\ & M_{k+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu_{c-2} I_2 & \\ & & & M_c & \mu_{c-1} I_1 \end{bmatrix}_{\binom{c-k+2}{2} \times \binom{c-k+2}{1}}, \quad (10)$$

Ayrıca $Y_{kj} = \mu_j I_{\binom{c-j}{c-k-j+1}}$ ve $Z_k = [\mu_c \ \mu_{c-1} \ \dots \ \mu_{c-k+1}]_{1 \times k}$ olarak tanımlansın. Bu durumda Eş. 11., Eş. 12, Eş. 13, ve Eş. 14 aşağıdaki gibi verilebilir.

$$A_1 = M_1, \quad (11)$$

$$A_2 = X_2, \quad (12)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} X_3 & Y_{31} & & & \\ & X_4 & Y_{32} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & X_{c-1} & Y_{3,c-3} \\ & & & & Z_3 \end{bmatrix}_{\binom{c}{3} \times \binom{c}{2}}, \quad (13)$$

$$W_k = \begin{bmatrix} X_k & Y_{3,k-1} & & & \\ & X_{k+1} & Y_{3,k-1} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & X_{c-1} & Y_{3,c-3} \\ & & & & Z_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

A_k 'nın genel formu Eş. 15'deki gibi yazılabilir.

$$A_k = \begin{bmatrix} A_k(1,1) & A_k(1,2) \\ A_k(2,1) & A_k(2,2) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Eş. 15'de yer alan $A_k(2,2)$ 'nin boyutları, $m = \binom{c}{k} - \binom{c-1}{c-k}$, ve $n = \binom{c-1}{c-k}$ olmak üzere (m, n) boyutlu olarak yazılabilir ve $A_k(2,2)$ için genel form Tablo 3'de olduğu gibi elde edilir. Eş. 15 ile verilen A_k matrisi yinelemeli bir yapıya sahiptir; örneğin $A_k(1,1)$ bir önceki düzeyden Eş. 16'da olduğu gibi elde edilir:

$$A_k(1,1) = A_{k-1}(2,2). \quad (16)$$

Tablo 3. $A_k(2,2)$ için genel form (The general form for $A_k(2,2)$)

[illegible]

$A_k(1,2)$ boyutları $\binom{c-1}{c-k}$ olan kare matristir, ve $A_k(1,2) = Y_{k1}$. Son olarak, $m \times \binom{c-1}{c-k-1}$ boyutlu $A_k(2,1)$ sıfırlardan oluşan bir matristir; yani $A_k(2,1) = 0$. A_{c-1} matrisi diğer A_k ($k = 1, 2, \dots, c-2$) matrislerinden farklı bir yapıda olup, matris formda Eş. 17'de verilmiştir.

$$A_{c-1} = \begin{bmatrix} M_{c-1} & \mu_{c-2}I_2 & \mu_{c-3}I_3 & \cdots & \mu_1I_{c-1} \\ & Z_2 & & & \\ & & Z_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & Z_{c-1} \end{bmatrix}_{\binom{c}{c-1} \times \binom{c}{c-2}}. \quad (17)$$

A_c , Eş. 18’de verilmiş olup c boyutlu bir satır vektörüdür.

$$A_c = [\mu_c \quad \mu_{c-1} \quad \cdots \quad \mu_1]_{1 \times c}. \quad (18)$$

Eş. 8 ile verilen Q matrisinin üst köşegenini oluşturan matrisler Eş. 19’de verilmiştir.

$$C_0 = [\lambda \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1 \times c}. \quad (19)$$

Eş. 8 ile verilen Q matrisinin üst köşegeninde yer alan C_k matrisinin, ($k = 1, 2, \dots, c - 2$) boyutları da tıpkı alt – köşegen matrisler gibi hem düzeye hem de kanal sayısına bağlı olarak değişmekte olup boyutları $\binom{c}{k} \times \binom{c}{k+1}$ ile belirlenir ve genel formu Eş. 20’de verilmiştir.

$$C_k = \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ \lambda I_{c-k} & 0 \\ \lambda I_{\binom{c-k+2}{2} - \binom{c-k+1}{1}} & 0 \\ \lambda I_{\binom{c-k+1}{3} - \binom{c-k+2}{2}} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda I_{\binom{c}{k} - \binom{c-1}{k-1}} & 0 \end{bmatrix}_{\binom{c}{k} \times \binom{c}{k+1}}. \quad (20)$$

C_{c-1} diğerlerinden farklı olarak Eş. 21'deki gibidir.

$$C_{c-1} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}_{\binom{c}{c-1} \times \binom{c}{c}}. \quad (21)$$

Esş. 8 ile verilen Q matrisinin ana köşegenini oluşturan B_k matrisleri $E_k = 0, 1, 2, \dots, c-1$ için $\binom{c}{k} \times \binom{c}{k}$ boyutludur, ve bu matrisler tekil olmayan matrislerdir. $B_0 = [-\lambda]$ olmak üzere B_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) matrisi Tablo 4 ile verilir.

$k > c$ olduğunda Eş. 8 ile verilen Q matrisinde yer alan A , B ve C sabitleri yerinde tekrar etmeye başlar ve sırasıyla Eş. 22, Eş. 23 ve Eş. 24 ile verilir.

$$A = \sum_{j=1}^c \mu_j, \quad (22)$$

$$B = -(\lambda + \sum_{j=1}^c \mu_j), \quad (23)$$

$$C = \lambda. \quad (24)$$

5. Durağan durum olasılıklarının hesaplanması (Computation of the Steady-State Probabilities)

π_A , $A + B + C$ 'nin durağan durum olasılık dağılımı olmak üzere, hız matrisi Q , ancak ve ancak aşağıdaki koşul altında pozitif tekrarlı bir matristir (Neuts [45]).

$$\pi_A Ae > \pi_A Ce. \quad (25)$$

İncelenen kuyruk sistemine ait Q matrisinde A , B ve C skaler değerler olduğundan, Eş. 25 ile verilen durağanlık koşulu, çok kanallı heterojen kuyruk sistemleri için Eş. 26'daki gibi verilmiştir.

$$\lambda < \sum_{j=1}^c \mu_j. \quad (26)$$

Eş. 26 ile verilen durağanlık koşulu altında, kuyruk sistemine ait Markov süreci indirgenemezdir ve durağan durum olasılıkları elde edilebilir. Önceki bölümde tanımlanan Markov süreci için durağan durum olasılıkları vektörü Eş. 27’deki gibi tanımlansın.

$$[\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_{c-1} \quad \pi_c \quad \pi_{c+1} \quad \dots]. \quad (27)$$

Burada bir alt – vektör olan $\pi_k, 0 \leq k \leq c - 1$ için $1 \times \binom{c}{k}$ boyutlu olup $k \geq c$ için skaler bir değerdir. $0 \leq k \leq c - 1$ olduğunda π_k alt – vektörünün normu, durağan durumda sistemde k müsteri bulunması olasılığını verir. $\pi \cdot Q = 0$ eşitliğinden denge denklemleri matris formunda Eş. 28, Eş. 29, Eş. 30, ve Eş. 31’deki gibi elde edilir.

$$\pi_0 B_0 + \pi_1 A_1 = 0, \quad (28)$$

$$\pi_{k-1}C_{k-1} + \pi_k B_k + \pi_{k+1}A_{k+1} = 0, \quad 1 \leq k \leq c-1, \quad (29)$$

$$\pi_{c-1}C_{c-1} + \pi_c B + \pi_{c+1}A = 0, \quad (30)$$

$$\pi_{k-1}C + \pi_k B + \pi_{k+1}A = 0, \quad k \geq c+1, \quad (31)$$

Yukarı elde edilen Eş. 28 – Eş. 31 eşitlikleri Eş. 1 – Eş. 5 ile verilen matematiksel modele denktir. Durağan durum olasılıklarını elde etmek için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 1. Çok kanallı heterojen sınırsız kuyruk sistemi için servis disiplini sıralı giriş olduğunda durağan durum olasılıkları $\pi_k = \pi_c R_k^*$, $0 \leq k \leq c-1$ ve $\pi_k = \pi_c \rho^{k-c}$, $k \geq c+1$ matris geometrik forma sahiptir. Burada $R_k^* = R_{c-1} R_{c-2} \cdots R_k$ ve R_k , başlangıç değeri $R_0 = -A_1 B_0^{-1}$ olmak üzere yinelemeli olarak hesaplanır.

İspat. $0 \leq k \leq c-1$ durumları için, boyutları sistemdeki müşteri sayısı k 'ya bağlı olan R matrisleri hesaplanmalıdır. Eş. 28'den, $\pi_0 = -\pi_1 A_1 B_0^{-1}$ ve $R_0 = -A_1 B_0^{-1}$ olmak üzere Eş. 32 olur.

$$\pi_0 = \pi_1 R_0. \quad (32)$$

Eş. 29'den ve $k=1$ için $\pi_1 = -\pi_2 A_2 (R_0 C_0 + B_1)^{-1}$, $R_1 = -A_2 (R_0 C_0 + B_1)^{-1}$ olmak üzere $\pi_1 = \pi_2 R_1$ olur. $k=2$ için; $\pi_2 = -\pi_3 A_3 (R_1 C_1 + B_2)^{-1}$, $R_2 = -A_3 (R_1 C_1 + B_2)^{-1}$ olmak üzere, $\pi_2 = \pi_3 R_2$ olur. Bu sonuç $0 \leq k \leq c-1$ için $R_0 = -A_1 B_0^{-1}$ ve $R_k = -A_{k+1} (R_{k-1} C_{k-1} + B_k)^{-1}$ olmak üzere $\pi_k = \pi_{k+1} R_k$ şeklinde genelleştirilebilir.

$0 \leq k \leq c-1$ için $R_k^* = R_{c-1} R_{c-2} \cdots R_k$ tanımlansın. Böylece $\pi_k = \pi_c R_k^*$ ile ifade edilen durağan durum olasılıkları vektörü matris geometrik formdadır. Burada $0 \leq k \leq c-1$ için $(R_{k-1} C_{k-1} + B_k)^{-1}$, tekil olmayan matristir ve R_k matrislerinin boyutları $\binom{c}{k+1} \times \binom{c}{k}$ ile verilir. Tüm kanalların meşgul olduğu durumlar için, yani $k \geq c+1$ olduğunda durağan durum olasılıkları vektörü sınırsız çok kanallı kuyruk sistemi için matris geometrik formda Neuts [45] tarafından Eş. 33'deki gibi verilmiştir.

$$\pi_k = \pi_c R^{k-c}, \quad k \geq c+1. \quad (33)$$

Burada R matrisi Eş. 34'in çözülmesiyle elde edilir.

$$AR^2 + BR + C = 0. \quad (34)$$

İncelenen sistemde A , B ve C skaler olduğundan, Eş. 34 eşitliğinin

$$\text{kökleri } R_{1,2} = \frac{\lambda + \sum_j \mu_j \mp \sqrt{(\lambda + \sum_j \mu_j)^2 - 4\lambda \sum_j \mu_j}}{2 \sum_j \mu_j} \text{ şeklinde elde edilir.}$$

R_1 kökü 1, R_2 kökü ise $\lambda / \sum_j \mu_j$ olarak ifade edilen trafik yoğunluğu ρ olarak elde edilir. Tüm kanallar dolduktan sonra sistem için bulunan R , trafik yoğunluğu ρ 'ya eşit olacaktır. Bu durumda Eş. 33 ile verilen eşitlik Eş. 35'deki gibi yeniden yazılabilir.

$$\pi_k = \pi_c \rho^{k-c}, \quad k \geq c+1. \quad (35)$$

İspat tamamlanmıştır.

Teorem 1 ile tüm durağan durum olasılıkları π_c cinsinden ifade edilmiştir, ancak durağan durum olasılıklarının hesaplanması için π_c 'nin belirlenmesi gerekir. Durağan durum olasılıkları toplamının 1'e eşit olması koşulundan yararlanılarak π_c bulunabilir:

$$\sum_{k=0}^{c-1} \pi_k + \sum_{k=c}^{\infty} \pi_k = 1. \quad (36)$$

$0 \leq k \leq c-1$ için π_k bir satır vektördür; Eş. 36 eşitliğinin sağ tarafında yer alan ilk terim Eş. 37'deki gibi yazılabilir.

$$\sum_{k=0}^{c-1} \pi_k = \pi_0 e_{(0)}^{(c)} + \pi_1 e_{(1)}^{(c)} + \pi_2 e_{(2)}^{(c)} + \cdots + \pi_{c-1} e_{(c-1)}^{(c)}. \quad (37)$$

Burada $e_k, \binom{c}{k}$ boyutunda ve yalnızca 1'lerden oluşan bir sütun vektördür. Teorem 1 kullanılarak, π_k, π_c cinsinden Eş. 38'deki gibi yazılabilir ve Eş. 36 eşitliğinin ilk kısmı Eş. 39'deki eşitliğindeki gibi elde edilir:

$$\sum_{k=0}^{c-1} \pi_k = \pi_c R_0^* e_{(0)}^{(c)} + \pi_c R_1^* e_{(1)}^{(c)} + \pi_c R_2^* e_{(2)}^{(c)} + \cdots + \pi_c R_{c-1}^* e_{(c-1)}^{(c)}, \quad (38)$$

$$\sum_{k=0}^{c-1} \pi_k = \pi_c \sum_{k=0}^{c-1} R_k^* e_{(k)}^{(c)}. \quad (39)$$

Eş. 36'nin ikinci terimi π_c cinsinden Eş. 40'deki gibi elde edilir.

$$\sum_{k=c}^{\infty} \pi_k = \pi_c \frac{1}{1-\rho}. \quad (40)$$

Eş. 39 ve Eş. 40, Eş. 36'de yerine konularak π_c , Eş. 41'deki gibi elde edilir.

$$\pi_c = \left[\sum_{k=0}^{c-1} R_k^* e_{(k)}^{(c)} + 1/(1-\rho) \right]^{-1}. \quad (41)$$

Burada $R_k^* = R_{c-1} R_{c-2} \cdots R_k$ eşitliği ile ve $\rho = \lambda / \sum_{j=1}^c \mu_j$ eşitliği ile kolaylıkla elde edilir.

5.1. Ortalama kuyruk uzunluğu (Average queue length)

N_q rastgele değişkeni durağan durumda kuyrukta bulunan müşteri sayısını gösterebilir. N_q 'nin beklenen değeri EN_q , ortalama kuyruk uzunluğunu verir ve L_q ile de gösterilebilir. Durağan durum olasılıkları kullanılarak L_q Eş. 42'deki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} L_q &= EN_q = \sum_{k=c+1}^{\infty} (k-c) \pi_k \\ L_q &= \sum_{k=c+1}^{\infty} (k-c) \pi_c \rho^{k-c} \\ L_q &= \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \pi_c. \end{aligned} \quad (42)$$

Tablo 4. B_k için genel form (The general form for B_k)

$B_k =$	$ \begin{aligned} & - \left(\lambda + \sum_{j=1, j \neq c}^c \mu_j \right) \\ & \quad - \left(\lambda + \sum_{j=1, j \neq k-1}^c \mu_j \right) \\ & \quad - \left(\lambda + \sum_{j=1, j \neq k-2}^c \mu_j \right) \\ & \quad \vdots \\ & \quad - \left(\lambda + \sum_{j=1}^c \mu_j \right) \end{aligned} $
---------	--

5.2. Sistemde bulunan ortalama müşteri sayısı (Average number of customers in the system)

N rastgele değişkeni, durağan durumda sistemde bulunan müşteri sayısını gösterebilir. Sistemdeki müşteri sayısı, kuyrukta bulunan müşteri sayısı ile hizmet alan müşteri sayısı toplamıdır. N rastgele değişkeninin beklenen değeri L ile gösterilir ve sistemdeki ortalama müşteri sayısını verir. Durağan durum olasılıkları kullanılarak L Eş. 43'deki gibi hesaplanır.

$$L = EN = \sum_{k=0}^{c-1} k \pi_c R_k^* e_{(c)}^{(k)} + \sum_{k=c}^{\infty} k \pi_c \rho^{k-c} \quad (43)$$

$$L = \left(\sum_{k=0}^{c-1} k R_k^* e_{(c)}^{(k)} + \frac{c}{1-\rho} \right) \pi_c + \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \pi_c.$$

Dikkat edilirse Eş. 43'in son terimi L_q 'dur. Sistemdeki ortalama müşteri sayısı; servis alan ortalama müşteri sayısı ile kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısının toplamı olarak elde edilmiştir.

5.3. Kuyrukta bekleme süresinin dağılımı (Distribution of the waiting time in the queue)

T_q rastgele değişkeni, durağan durumda kuyrukta harcanan süreyi gösterebilir ve $W_q(t)$ bu süreye ait dağılım fonksiyonu olsun. Gelen bir müşterinin beklemeden hizmet alabileceği düşüncesiyle dağılım fonksiyonu için genel gösterim Eş. 44'deki gibidir (Gross vd. [46]):

$$W_q(t) = Pr\{T_q \leq t\} = W_q(0) + \sum_{k=c}^{\infty} Pr\{k - c + 1 \text{ tamamlanma} \leq t \mid \text{sisteme } k \text{ gelen olması}\} \pi_k. \quad (44)$$

Gelen bir müşterinin beklemeden hizmet alması olasılığı Eş. 45'deki gibi elde edilir.

$$W_q(0) = Pr\{T_q = 0\} = Pr\{N \leq c - 1\} = \sum_{k=0}^{c-1} \pi_k \quad (45)$$

$$W_q(0) = \pi_c \sum_{k=0}^{c-1} R_k^* e_{(c)}^{(k)}.$$

$k \geq c$ olduğunda, sistemden ayrılışlar $\sum_{j=1}^c \mu_j$ hızıyla Poisson olur. Bu durumda ardışık ayrılımlar arası geçen süre $1/\sum_{j=1}^c \mu_j$ ortalama ile üstel dağılıma uyar ve $(k - c + 1)$ tamamlanma için gereken sürenin dağılımı $(k - c + 1)$ tipi Erlang olur. Böylece kuyrukta bekleme süresinin dağılım fonksiyonu Eş. 46'deki gibi verilir.

$$W_q(t) = W_q(0) + \sum_{k=c}^{\infty} \pi_k \int_0^t \frac{\sum_{j=1}^c \mu_j (x \sum_{j=1}^c \mu_j)^{k-c}}{(k-c)!} e^{-(\sum_{j=1}^c \mu_j)x} dx. \quad (46)$$

π_k olasılıkları yerine π_c cinsinden eşitliği yazılıp Eş. 46 yeniden düzenlenirse, $W_q(t)$ Eş. 47'deki gibi yazılabilir.

$$W_q(t) = W_q(0) + \pi_c \sum_{j=1}^c \mu_j \int_0^t e^{\rho(\sum_{j=1}^c \mu_j)x} e^{-(\sum_{j=1}^c \mu_j)x} dx. \quad (47)$$

Buradan dağılım fonksiyonu $W_q(t)$ Eş. 48'deki gibi elde edilir.

$$W_q(t) = \pi_c \sum_{k=0}^{c-1} R_k^* e_{(c)}^{(k)} - \pi_c \frac{1}{1-\rho} \left(e^{-(\sum_{j=1}^c \mu_j)(1-\rho)t} - 1 \right). \quad (48)$$

Kuyrukta bekleme süresinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, Eş. 48 eşitliğinin t 'ye göre türevinden Eş. 49'deki gibi elde edilir.

$$W_q(t) = \pi_c \sum_{j=1}^c \mu_j e^{-(1-\rho)(\sum_{j=1}^c \mu_j)t}. \quad (49)$$

Kuyrukta ortalama bekleme süresi (W_q), T_q 'nin beklene değeridir ve Eş. 49 kullanılarak Eş. 50'deki gibi elde edilir.

$$W_q = \frac{1}{(1-\rho)^2 \sum_{j=1}^c \mu_j} \pi_c. \quad (50)$$

Not. Ortalama kuyruk uzunluğu Little eşitliği ile Eş. 50 kullanılarak bulunabilir. Sistemde ortalama harcanan zaman (W) yine Little eşitliği ile elde edilebilir. Ayrıca W sıralı giriş hizmet disiplini altında heterojen kanallı kuyruk modeli için Eş. 51'deki gibi bulunabilir:

$$W = W_q + \frac{c}{\sum_{j=1}^c \mu_j}. \quad (51)$$

Sıralı giriş hizmet disiplinine sahip $M/M/2$ kuyruk sistemini ele alalım. $\mu_1 \geq \mu_2$ için bütün kanalların dolu olması olasılığı ve ortalama kuyrukta bekleme süresi sırasıyla $\tilde{\pi}_2$ ve $\tilde{W}_q$ olsun.

Teorem 2. Sıralı girişli $M/M/2$ modelinde $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ koşulu altında $\mu_1 \geq \mu_2$ için $\tilde{W}_q \leq W_q$ olur.

İspat. Sıralı girişli $M/M/2$ kuyruk modeli için geçiş hızları matrisi Q Eş. 52'deki gibidir.

$$Q = \begin{bmatrix} B_0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & B & C & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A & B & C & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A & B & C & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Burada $B_0 = -\lambda$, $C_0 = [\lambda \ 0]$, $C_1 = [\lambda \ \lambda]'$, $A_1 = [\mu_1 \ \mu_2]'$, $A_2 = [\mu_2 \ \mu_1]'$, $A = \mu_1 + \mu_2$, $B = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)$, $C = \lambda$ ve $B_1 = [-(\lambda + \mu_1) \ 0]$. Q matrisinden ve Teorem 1'den π_2 olasılığı Eş. 53'deki gibi elde edilir.

$$\pi_2 = \left[\frac{\mu_1 \mu_2 (2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\lambda^2 (\lambda + \mu_2)} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda} + \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}. \quad (53)$$

Burada $\rho = \lambda/(\mu_1 + \mu_2)$ 'dir. Eş. 53 eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimin paydasında yer alan $\lambda^2(\lambda + \mu_2)$ 'den dolayı $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ koşulu altında $\mu_1 \geq \mu_2$ için 1'e eşit olasılıkla $\tilde{\pi}_2 \leq \pi_2$ elde edilir. W_q için verilen Eş. 50 formülü dikkate alınırsa $\tilde{W}_q \leq W_q$ olduğu açıktır. İspat tamamlanmıştır.

6. Sayısal analiz (Numerical analysis)

Bu bölümde amaç önceki bölümlerde elde edilen teorik sonuçları (π_c, W_q) belirli parametreler için hesaplamak ve en hızlı servis kuralı altında kuyrukta ortalama bekleme süresinin (W_q) en küçük olduğunu sayısal olarak göstermektir. Bunun için bulut tabanlı mikroservis mimarisinde API (Application Programming Interface – Uygulama Programlama Arayüzü) isteklerinin işlenmesi sıralı girişli ve heterojen kanallı bir kuyruk sistemi olarak ele alınabilir.

Bulut bilişim altyapıları üzerinde çalışan mikroservis tabanlı uygulamalar, yüksek sayıda ve rastgele anlarda gelen kullanıcı taleplerini karşılamak zorundadır. Bu tür sistemlerde, istemcilerden gelen API istekleri genellikle bir API geçidi (API Gateway) üzerinden toplanmakta ve arka planda çalışan birden fazla hizmet kanalı tarafından işlenmektedir. Ele alınan sistemde, dünya genelinde çok sayıda bağımsız istemcinin (mobil uygulamalar, web istemcileri veya üçüncü parti servisler) API istekleri gönderdiği varsayılmaktadır.

İstemciler birbirlerinden bağımsız ve sisteme gelen istekler λ parametrelili (hızı) Poisson süreci olsun. API Gateway tarafından kabul edilen tüm istekler, herhangi bir kayıp yaşanmaksızın merkezi bir tampon bellek veya mesaj kuyruğuna yönlendirilmektedir. Bu kuyruk, sistemin pratikte çok büyük bir kapasiteye sahip olması nedeniyle

sınırsız olarak kabul edilmektedir. Kuyruk disiplininin, gerçek sistemlerde yaygın olarak kullanılan ilk gelen ilk hizmet alır kuralına göre çalıştığı varsayılmaktadır. Arka planda, API isteklerini işleyen beş adet mikroservis (container, sanal makine veya pod) bulunmaktadır. Bu mikroservisler, kuyruk kuramı bağlamında hizmet kanalları olarak modellenmektedir. Her bir mikroservis aynı yazılımı çalıştırmakla birlikte, farklı donanım kaynaklarına sahip olmaları, farklı düğümler üzerinde çalışmaları veya anlık sistem yüklerinin değişken olması nedeniyle, bunların ortalama hizmet hızları birbirinden farklıdır. Varsayalım her bir mikroservis hizmet süresi μ_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) parametresi ile üstel dağılıma sahip olsun. Sisteme gelen istekler boş olan kanallardan indeks numarası en düşük olan kanalda 1'e eşit olasılıkla hizmete başlasın. Bütün kanallar dolu ise kuyruğa girsin. Bu çerçevede ele alınan sistem sıralı girişli ve heterojen kanallı $M/M/5$ kuyruk sistemi olarak modellenebilir.

Yukarıda tanımlanan varsayımlar altında, farklı trafik yoğunluğu değerleri ($\rho < 1$) için tüm hizmet kanallarının aynı anda meşgul olma olasılığı (π_5) ile sistemin temel performans ölçülerine ilişkin tam çözümler iki farklı hizmet disiplini için Tablo 5'de kıyaslamalı olarak sunulmaktadır. Analizlerde, hizmet kanallarının ortalama servis

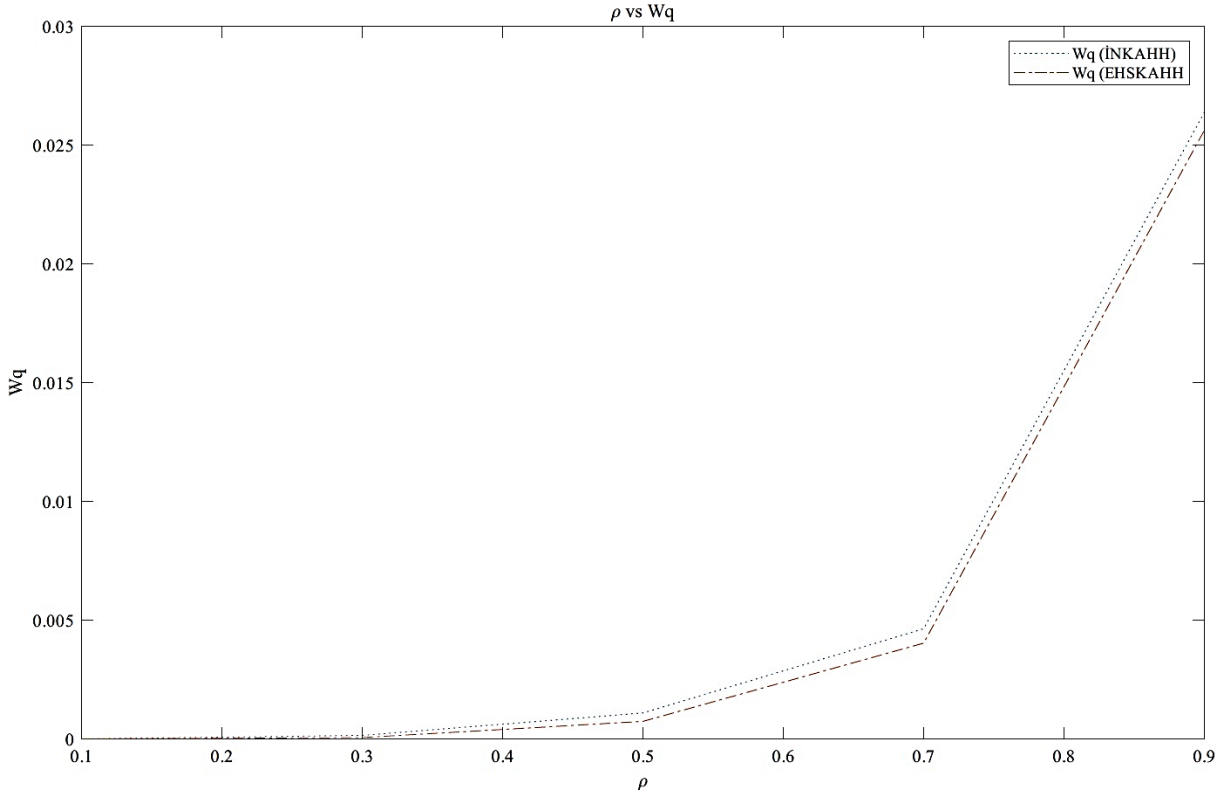
hızları sırasıyla $\mu_1 = 18$, $\mu_2 = 84$, $\mu_3 = 73$, $\mu_4 = 38$, $\mu_5 = 96$ olarak alınmıştır. Matematiksel modelin sayısal sonuçları (tam çözümler) MATLAB programı ile elde edilmiştir.

Tablo 5'de, farklı trafik yoğunlukları için geliş hızı λ , tüm kanalların meşgul olma olasılığı π_5 , kuyrukta ortalama bekleme süresi W_q ve ortalama kuyruk uzunluğu L_q değerleri verilmiştir. Tablodaki sonuçlar incelendiğinde, düşük trafik yoğunluklarında tüm kanalların meşgul olma olasılığının oldukça küçük olduğu, buna bağlı olarak kuyrukta ortalama bekleme süresi ve kuyruk uzunluğunun ihmal edilebilir düzeylerde kaldığı görülmektedir. Trafik yoğunluğunun artmasıyla birlikte W_q ve L_q değerlerinde belirgin bir artış gözlenmektedir. Bununla birlikte, en hızlı servis kuralının uygulanması durumunda, özellikle orta ve yüksek trafik yoğunluklarında, kuyrukta ortalama bekleme süresi ve ortalama kuyruk uzunluğu değerlerinin anlamlı biçimde azaldığı dikkat çekmektedir. Bu bulgular, heterojen hizmet kanallarına sahip sistemlerde servis hızlarının uygun biçimde düzenlenmesinin, sistem performansı üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Elde edilen bulgular sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2 ile görselleştirilmiştir.

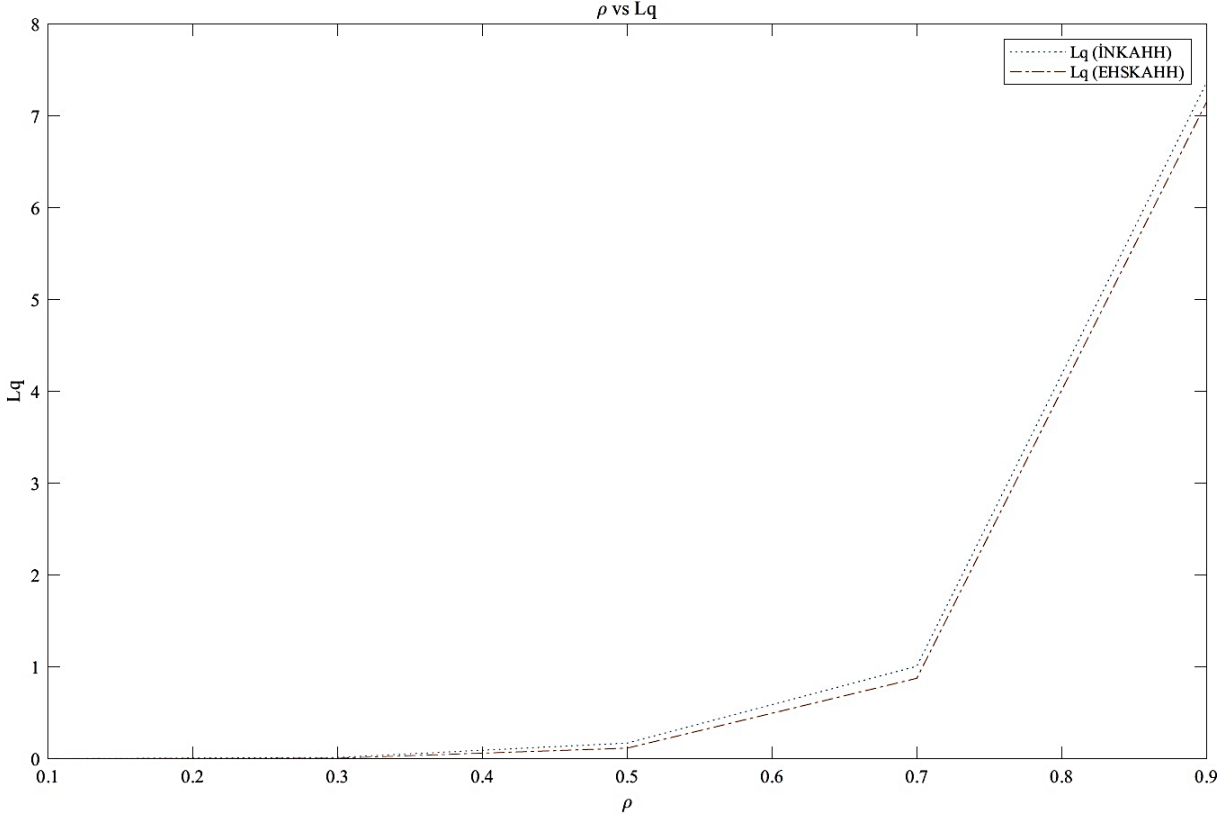
Tablo 5. Tam çözümler (Exact solution)

İNKAHH					EHKAHH			
$\mu_1 = 18, \mu_2 = 84, \mu_3 = 73, \mu_4 = 38, \mu_5 = 96$					$\mu_1 = 18, \mu_2 = 84, \mu_3 = 73, \mu_4 = 38, \mu_5 = 96$			
ρ	λ	π_5	W_q	L_q	π_5	W_q	L_q	
0,10	31	0,0003977	1,59017E-06	4,92954E-05	5,80111E-05	2,31942E-07	7,19021E-06	
0,30	93	0,0227601	0,000150739	0,01401870	0,00891136	5,90194E-05	0,005488810	
0,50	155	0,0840641	0,001095290	0,16976900	0,05687340	0,000741013	0,114857000	
0,70	217	0,1271370	0,004641460	1,00720000	0,11051800	0,004034740	0,875539000	
0,90	279	0,0768670	0,026391000	7,36309000	0,07464400	0,025627800	7,150150000	

İNKAHH: İndeks Numarası Kuralı Altında Hizmet Hızları; EHKAHH: En Hızlı Servis Kuralı Altında Hizmet Hızları



Şekil 1. Kuyrukta ortalama bekleme süresinin ρ 'ya bağlı değişimi (Variation of the mean waiting time in queue as a function of ρ)



Şekil 2. Ortalama kuyruk uzunluğunun ρ 'ya bağlı değişimi (Variation of the mean queue length as a function of ρ)

Bu tür bir modelleme, bulut tabanlı mikroservis mimarilerinde kapasite planlaması, hizmet kalitesi değerlendirmesi ve servis düzeyi anlaşmalarının sağlanması gibi pratik problemlerin incelenmesinde doğrudan uygulanabilir niteliktedir. Ayrıca, sistem boyutunun artmasıyla birlikte tam çözümlerin hesaplanması zorlaşmakta hatta neredeyse imkânsız hale gelmektedir. Bu tür uygulama senaryoları ilgili sistemlerin analizinde sezgisel ve yaklaşık yöntemlerin geliştirilmesini daha da önemli kılmaktadır. Bu doğrultuda bir sonraki bölümde sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk sistemi için bir benzetim algoritması önerilecek ve elde edilen benzetim çözümleri tam çözümler ile kıyaslanarak analiz edilecektir. Bu analiz sayesinde sonuçların doğruluğunun ve uygulanabilirliğinin tespit edilmesi öngörülmektedir.

7. Benzetim algoritması ve performans analizi (Simulation algorithm and performance analysis)

Bu bölümde, heterojen hizmet kanallarına sahip kuyruk sistemi için elde edilen tam (analitik) sonuçlar ile benzetim (simülasyon) yoluyla elde edilen sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Hem tam çözümler hem de benzetim sonuçları MATLAB ortamında geliştirilen programlar aracılığıyla hesaplanmıştır. MATLAB yazılımının matris tabanlı hesaplama kapasitesi dikkate alındığında, tam çözümler en fazla $c = 14$ kanal için hesaplanabilmektedir. On beş ve daha fazla kanal içeren sistemlerde, durum uzayının üstel olarak büyümesi nedeniyle oluşan matris boyutları, MATLAB'ın pratik hesaplama sınırlarını aşmaktadır. Bu nedenle, bu bölümde öncelikle 14 hizmet kanalına kadar olan sistemler için tam çözümler ile benzetim sonuçları karşılaştırılmakta ve elde edilen farklar yüzde cinsinden hata ölçüleri kullanılarak değerlendirilmektedir. Bu karşılaştırma, hem benzetim yaklaşımının doğruluğunu ortaya koymak hem de yüksek boyutlu sistemlerde analitik çözümlere alternatif olarak kullanılabilirliğini değerlendirmek açısından önem taşımaktadır.

Sıralı girişli, heterojen kanallı $M/M/c$ kuyruk sisteminin performans ölçüleri için tam çözümlerin hesaplanması kanal sayısı arttığında ($c \geq 15$) imkânsız hale geldiğinden, doğrudan kesikli olay benzetiminin (bkz. Banks vd. [47]) kullanılması performans ölçülerinin hesaplanması için iyi bir alternatiftir. Bu çalışmada tanımlanan kuyruk sisteminin davranışı için tasarlanan kesikli olay benzetim algoritması aşağıdaki gibi verilebilir:

Adım 1: Toplam müşteri sayısını, c , λ , $\mu_j, j = 1, 2, \dots, c$ parametrelerini tanımla ve $\rho = \lambda / \sum_j \mu_j$ hesapla.

Adım 2: Her benzetim tekrarı için geliş ve ayrılış sürelerini sırasıyla Üstel(λ) ve Üstel(μ_j) olacak şekilde üret.

Adım 3: Olay zamanını, kanalların durumlarını, kuyruk disiplini ve müşteri sonucu eşleşmesini başlangıç anında boş olarak tanımla.

Adım 4: Bir sonraki geliş ve ayrılış zamanlarını karşılaştırarak olay türünü (geliş/ayrılış) belirle.

Adım 5: Tüm kanallar doluyorsa gelen müşteriye kuyruğa al, aksi halde gelen müşteriye, indeks numarası en küçük olan boş kanala ata ve ayrılış zamanını planla.

Adım 6: Eğer kuyruk doluyorsa sıradaki müşteriye boşalan kanala ata, eğer kuyruk boşsa ilgili kanalı boş duruma getir.

Adım 7: Tüm müşteriler sistemden ayrılana kadar Adım 4–6'yı tekrarla.

Adım 8: Tamamlanan tekrarlar için performans ölçülerini hesapla.

Adım 9: Tüm tekrarlar üzerinden ortalama performans ölçülerini elde et.

Tam çözümler ile benzetim yaklaşımı kullanılarak elde edilen sonuçların doğruluğunu değerlendirmek amacıyla, her iki yöntem ile hesaplanan kuyrukta ortalama bekleme süresi (W_q) Tablo 6'da karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Bu karşılaştırma elde edilen benzetim sonuçlarının tam çözümlere oranla hata değerlerini

kullanmaktadır ve $\%hata = \frac{|W_q^{tam} - W_q^{yakşalık}|}{W_q^{tam}} * 100$ şeklinde hesaplanmaktadır. Tablo 6'de kullanılan sistem konfigürasyonları rastgele oluşturulmuş ve her bir sistem için hizmet kanallarına ait parametreler Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 6'de, sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk sistemi için tam çözümler ile benzetim yaklaşımı kullanılarak elde edilen kuyrukta ortalama bekleme süresi W_q değerleri karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, yaklaşık çözümlerin tam çözümlerle yüksek düzeyde uyumlu olduğunu göstermektedir. İncelenen tüm kanal sayıları için yüzde hata değerleri genel olarak oldukça düşük olup, çoğu durumda %1'in

altında kalmaktadır. Bu bulgular, benzetim yaklaşımının söz konusu sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk sistemi için kuyrukta ortalama bekleme süresinin hesaplanmasında güvenilir ve etkin bir alternatif sunduğunu ortaya koymaktadır.

15 ve daha fazla kanala sahip sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk sistemi için MATLAB programında elde edilen benzetim sonuçları Tablo 8'de sunulmuştur. Tablo 'da kullanılan hizmet kanallarına ait parametreler Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 8'de sistem yoğunluğu ρ ile performans ölçüleri arasındaki ilişki açık bir biçimde gözlemlenmektedir. Trafik yoğunluğunun

Tablo 6. Sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk sistemi için tam ve yaklaşık hesaplamalar (Exact and approximate calculations for the $M/M/c$ queue with ordered entry)

Kanal sayısı c	ρ	λ	W_q Tam Çözümler	W_q Yaklaşık Çözümler	% Hata
2	0,775701	83	0,0301525	0,0301804	0,0925
3	0,364162	63	0,0013260	0,0013252	0,0603
4	0,183594	47	0,0000541	0,0000543	0,3697
5	0,105431	33	5,680E-07	5,699E-07	0,3346
6	0,747525	302	0,0044409	0,0045334	2,0829
7	0,974160	377	0,0928157	0,0917995	1,0949
8	0,434368	182	0,0001663	0,0001654	0,5412
9	0,822430	352	0,0067922	0,0067899	0,0339
10	0,299595	148	5,861E-06	5,649E-06	3,6171
11	0,647416	426	0,0006314	0,0006322	0,1267
12	0,727642	358	0,0019239	0,0019088	0,7849
13	0,752860	658	0,0013251	0,0013309	0,4377
14	0,597260	436	0,0002343	0,0002309	1,4511

Tablo 7. Tablo 6'de verilen hesaplamalar için parametreler (The parameters used for the calculations presented in Table 6)

$M/M/c$	$[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_c]$
$M/M/2$	[97 10]
$M/M/3$	[28 62 83]
$M/M/4$	[33 82 49 92]
$M/M/5$	[100 42 96 10 65]
$M/M/6$	[59 38 56 60 99 91]
$M/M/7$	[68 44 54 77 97 13 34]
$M/M/8$	[29 97 22 26 69 98 10]
$M/M/9$	[46 18 22 95 97 62 15 31 42]
$M/M/10$	[32 58 20 73 47 29 57 49 94 35]
$M/M/11$	[25 81 35 29 99 68 70 71 86 46 48]
$M/M/12$	[56 30 26 68 35 88 26 17 29 11 57 49]
$M/M/13$	[72 90 22 86 82 39 35 71 92 72 26 97 90]
$M/M/14$	[81 84 57 42 14 68 33 38 31 40 63 33 46 100]

Tablo 8. Sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk sistemi için yaklaşık hesaplamalar (Approximate calculations for the $M/M/c$ queue with ordered entry)

Kanal sayısı (c)	ρ	λ	İNKAAH			EHKAAH		
			π_c	W_q	L_q	π_c	W_q	L_q
15	0,80	692	0,0721653	0,00209842	1,4539	0,05612040	0,00160847	1,11400
16	0,60	570	0,0210867	0,00013721	0,0790	0,00793013	0,00005271	0,03030
17	0,90	621	0,0619723	0,00908066	5,6447	0,05732240	0,00828829	5,15054
18	0,50	473	0,0054654	0,00002285	0,0101	0,00055454	0,00000175	0,00105
19	0,70	861	0,1126190	0,00029789	0,2581	0,02087860	0,00018244	0,15799
20	0,95	969	0,7840060	0,01485220	14,392	0,742638	0,0146661	14,2205

Tablo 9. Tablo 8'da verilen hesaplamalar için parametreler (The parameters used for the calculations presented in Table 8)

$M/M/c$	$[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_c]$
$M/M/15$	[94 61 57 25 51 67 28 46 72 15 70 84 83 20 92]
$M/M/16$	[60 65 49 71 76 12 84 20 95 75 99 10 92 92 20 30]
$M/M/17$	[28 69 25 83 96 97 15 49 53 12 5 16 15 83 26 10 8]
$M/M/18$	[51 40 91 44 57 4 57 66 66 78 2 87 48 47 10 100 15 83]
$M/M/19$	[68 84 41 97 50 64 11 60 60 93 92 72 64 78 10 73 81 85 55]
$M/M/20$	[93 65 44 21 76 64 22 35 15 12 28 75 95 92 10 54 17 24 98 80]

düşük ve orta düzeyde olduğu durumlarda ($0,50 \leq \rho \leq 0,60$) kuyrukta ortalama bekleme süresi W_q ve ortalama kuyruk uzunluğu L_q değerlerinin son derece küçük olduğu görülmektedir. Buna karşılık, yüksek sistem yoğunluğu altında ($0,90 \leq \rho \leq 0,95$) performans ölçülerinde belirgin bir artış gözlemlenmektedir. Ayrıca, en hızlı servis kuralı altında elde edilen W_q değerlerinin, en hızlı servis kuralı uygulanmadan önce elde edilen benzetim sonuçlarına kıyasla tüm senaryolarda daha düşük olduğu açık bir şekilde görülmektedir. Bu durum, servis disiplininin kuyruk performansı üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğunu ve uygun servis kurallarının seçilmesiyle bekleme sürelerinin daha da azaltılabileceğini göstermektedir.

8. Sonuçlar (Conclusions)

Bu çalışmada, sınırsız kapasiteli, heterojen kanallı ve sıralı girişli $M/M/c$ kuyruk modeli ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Gumbel'in [5] çalışmasından farklı olarak, rastgele seçim disiplini yerine sıralı giriş hizmet disiplini benimsenmiş; bu küçük değişiklik, sistemin matematiksel modellenmesini kökten değiştirmiştir. Bu bağlamda, hizmet disiplininin, özellikle heterojen çok kanallı kuyruk sistemlerinin modellenmesi ve analizinde belirleyici bir rol oynadığı açıkça ortaya konmuştur. Sıralı giriş hizmet disiplini, bir sistemde karşılaşılabilecek müşteri davranışlarını daha gerçekçi bir şekilde yansıtarak sistem dinamiklerinin doğru temsiliyi sağlamış ve analitik çözüm süreçlerinde yenilikçi bir perspektif sunmuştur.

Kuyruk sistemini karakterize eden Markov süreci ve bu süreçle ilişkin geçiş hızı matrisi tanımlanmıştır. Geçiş hızı matrisinin sınırlı durumlarını temsil eden alt matrislerin genel formları türetilmiş, matris geometrik yöntemi kullanılarak durağan durum olasılıkları hesaplanmıştır. Bu olasılıklar temel alınarak, sistemdeki ve kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayıları elde edilmiş; ayrıca, kuyrukta bekleme süresinin dağılım fonksiyonu türetilerek ortalama bekleme süresi için analitik bir formül sunulmuştur. Heterojen kanallı ve sıralı giriş disiplinine sahip $M/M/2$ kuyruk modeli özelinde, en hızlı servis kuralı altında kuyrukta ortalama bekleme süresinin minimum olduğu matematiksel olarak ispatlanmıştır. Bu ispat, heterojen sistemlerde optimal hizmet disiplininin belirlenmesine yönelik önemli bir katkı sağlamaktadır. Son olarak, MATLAB ortamında tasarlanan kesikli olay benzetim modeli kullanılarak sistemin temel performans ölçüleri hesaplanmış ve bu değerler matris geometrik yöntemle elde edilen tam sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalı analiz, benzetim yoluyla elde edilen sonuçların analitik bulgularla tutarlı olduğunu ve gözlenen sapmaların sınırlı düzeylerde kaldığını göstermektedir. Bu bulgular, önerilen modelin ve çözüm yaklaşımının geçerliliğini sayısal olarak desteklemektedir.

Bu çalışmada elde edilen bulgular, heterojen kanallı kuyruk sistemlerinde hizmet disiplininin belirleyici rolünü ortaya koymakla birlikte, aşağıdaki araştırma yönlerine de kapı aralamaktadır:

- Heterojen kanallı kuyruk sistemlerinde sıralı giriş hizmet disiplinine ek olarak, öncelik tabanlı seçim, en düşük yük disiplini ve dinamik kanal seçimi gibi alternatif hizmet disiplinlerinin analizi ele alınabilir. Bu tür çalışmalar, farklı hizmet disiplinlerinin performans ölçüleri üzerindeki etkilerinin karşılaştırılmasına olanak sağlayacaktır.
- Mevcut çalışma sınırsız kapasiteli sistemlere odaklanmıştır. Ancak pratik uygulamalarda kuyruk kapasitesinin sınırlı olduğu durumlar yaygındır. Bu nedenle, heterojen kanallı ve sıralı giriş disiplinine sahip sınırlı kapasiteli modellerin incelenmesi, kaybolan müşteri olasılığının değerlendirilmesi ve optimizasyonu açısından önemli bir araştırma konusudur.
- Heterojen hizmet hızlarının maliyet, enerji tüketimi ve kaynak kullanımı üzerindeki etkilerinin modele dahil edilmesi, özellikle

enerji verimli ve sürdürülebilir sistem tasarımlarına yönelik analizlerin geliştirilmesine katkı sağlayacaktır.

- İnsan tabanlı hizmet sistemlerinde yorgunluk, öğrenme eğrileri ve motivasyon gibi davranışsal faktörlerin heterojen kuyruk modellerine entegrasyonu, sağlık, perakende ve çağrı merkezi gibi uygulama alanlarında daha gerçekçi performans değerlendirmelerinin yapılmasına imkân tanıyacaktır.

Bu öneriler, heterojen kanallı kuyruk modellerinin teorik sınırlarını genişletmeyi ve gerçek dünya uygulamalarına entegrasyonunu güçlendirmeyi amaçlayarak, kuyruk teorisinin akademik ve endüstriyel değerini artırmaya yönelik bir yol haritası sunmaktadır.

Kaynaklar (References)

1. Erlang A.K., Sandsynlighedsregning og telefonsamtaler, Nyt tidsskrift for Matematik, 20, 33-39, 1909.
2. Palm C., Intensitatsschwankungen im fernsprechverker, *Ericsson technics*, 44, 1-189, 1943.
3. Kendall D.G., Some problems in the theory of queues, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 13 (2), 151-173, 1951.
4. Takács L., On the generalization of Erlang's formula, *Acta Mathematica Hungarica*, 7 (3), 419-433, 1956.
5. Gumbel H., Waiting lines with heterogeneous servers, *Operations Research*, 8 (4), 504-511, 1960.
6. Neuts M.F., Matrix-analytic methods in queueing theory, *European Journal of Operational Research*, 15 (1), 2-12., 1984.
7. Kovalenko I.N., Atkinson J.B., Conditions for the Light-Traffic Insensitivity to Loss Probability in a GI/G/m/0 Queueing System, *Cybernetics and Systems Analysis*, 38, 846-854, 2002.
8. Boxma O., The number of overlapping customers, *Operations Research Letters*, 57, 107203, 2024.
9. Manitz M., Queueing-model based analysis of assembly lines with finite buffers and general service times, *Computers & Operations Research*, 35 (8), 2520-2536, 2008.
10. Kocer U., Ozkar S., A production queueing-inventory system with two-customer and a server subject to breakdown, *Annals of Operations Research*, 331, 1089-1117, 2023.
11. Melikov A.Z., Shahmalyev M.O., Nair S.S., Matrix-Geometric Method for the Analysis of a Queueing System with Perishable Inventory, *Automation and Remote Control*, 82, 2169-2182, 2021.
12. Shajin D., Jacob J., Krishnamoorthy A., On a queueing inventory problem with necessary and optional inventories, *Annals of Operations Research*, 315, 2089-2114, 2022.
13. Koole G., Li S., Ding S., Call center data analysis and model validation, *Queueing System*, 109, 2025.
14. Chettouf A., Bouchentouf A.A., Boualem M., A Markovian Queueing Model for Telecommunications Support Center with Breakdowns and Vacation Periods, *Operations Research Forum*, 5, 2024.
15. Blondia C., A queueing model for a wireless sensor node using energy harvesting, *Telecommunication System*, 77, 335-349, 2021.
16. Zhang C., Yang J., Wang N., An active queue management for wireless sensor networks with priority scheduling strategy, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 187, 2024.
17. Nadar R.A., Jha J.K., Thakkar J.J., Performance Evaluation of Performance Evaluation of Emergency Medical Service Systems with Multiple Ambulance Types and Patient Types, *International Journal of Industrial Engineering*, 31 (4), 2024.
18. Majlesinasab N., Maleki M., Nikbakhsh E., Performance evaluation of an EMS system using queueing theory and location analysis: A case study, *The American Journal of Emergency Medicine*, 51, 32-45, 2022.
19. Lindley D.V., The theory of queues with a single server, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 48 (2), 277-289, 1952.
20. Smith W.L., On the distribution of queueing times, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 49 (3), 449-461, 1953.
21. Boxma O.J., Joint distribution of sojourn time and queue length in the $M/G/1$ queue with (in) finite capacity, *European Journal of Operational Research*, 16 (2), 246-256, 1984.

22. Kendall D.G., Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain, The Annals of Mathematical Statistics, 24 (3), 338-354, 1953.
23. Shanthikumar J.G., Yao D.D., Optimal Server Allocation in a System of Multi-Server Stations, Management Science, 33 (25), 1173-1180, 1987.
24. Atkinson J.B., Two new heuristics for the $GI/G/n/0$ queueing loss system with examples based on the two-phase Coxian distribution, Journal of the Operational Research Society, 60 (6), 818-830, 2009.
25. Stidham S.J., On the Optimality of Single-Server Queueing Systems, Operations Research, 18 (4), 708-732, 1970.
26. Kocaer E.R., Koruca H., Simulation software development and workforce optimization for service systems: QS-Sim software, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 39 (1), 77-89, 2024.
27. Wu R., Ayhan H., Optimal admission control in queues with multiple customer classes and abandonments, Queueing Systems, 109, 2025.
28. Yao D.D., The Arrangement of Servers in an Ordered-Entry System, Operations Research, 35 (5), 759-763, 1987.
29. Alpaslan F., Shahbazov A.A., An analysis and optimization of stochastic service system with heterogeneous channel and poisson arrival, Pure and Applied Matematika Sciences, 43, 15-20, 1996.
30. Boxma O., Pender J., Overlap times in the $G/G/1$ queue via Laplace transforms, Queueing Systems, 109, 2025.
31. Fakinos D., The $M/G/k$ Blocking System with Heterogeneous Servers, Journal of the Operational Research Society, 31 (26), 919-927, 1980.
32. Krishnamoorthi B., On Poisson Queue with Two Heterogeneous Servers, Operations Research, 11 (3), 321-330, 1963.
33. Neuts M.F., Takahashi Y., Asymptotic behavior of the stationary distributions in the $GI/PH/c$ queue with heterogeneous servers, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete, 57, 441-452, 1981.
34. Singh V.P., Markovian Queues with Three Heterogeneous Servers1, A I E Transactions, 3 (1), 45-48, 1971.
35. Lin B.W., Elsayed E.A., A general solution for multichannel queueing systems with ordered entry, Computers & Operations Research, 5 (4), 219-225, 1978.
36. Pourbabaı B., Sonderman D., Server utilization factors in queueing loss systems with ordered entry and heterogeneous servers, Journal of Applied Probability, 23 (1), 236-242, 1986.
37. Nath G.B., Enns E.G., Optimal service rates in the multiserver loss system with heterogeneous servers, Journal of Applied Probability, 18 (3), 776-781, 1981.
38. Yao D.D., Convexity properties of the overflow in an ordered-entry system with heterogeneous servers, Operations Research Letters, 5 (3), 145-147, 1986.
39. Cooper R.B., Queues with Ordered Servers that Work at Different Rates, Opsearch, 13 (2), 69-78, 1976.
40. Isgüder H.O., Kocer U., Analysis of $GI/M/n/n$ queueing system with ordered entry and no waiting line, Applied Mathematical Modelling, 38 (3), 1024-1032, 2014.
41. Halfin S., Whitt W., Heavy-traffic limits for queues with many exponential servers, Operations Research, 29 (3), 567-588, 1981.
42. Puhalskii A., Reiman M., The multiclass $GI/PH/N$ queue in the Halfin-Whitt regime, Advances in Applied Probability, 32 (2), 564-595, 2000.
43. Whitt W., Stochastic-process limits for multi-server queues, Queueing Systems, 41 (1), 5-27, 2002.
44. Neuts M.F., Markov chains with applications in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant probability vector, Advances in Applied Probability, 10 (1), 185-212, 1978.
45. Neuts M.F., Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
46. Gross D., Harris C.M., Fundamentals of Queueing Theory, A Wiley-Interscience Publication, New York, 1998.
47. Banks J., Carson J.S., Nelson B.L., Nicol D.M., Discrete – Event System Simulation, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.