Bir Arada Oluşan, Birbirine Dik İki Eksendeki Eğilme Titreşimleri ve Burulma Titreşimlerinin Analitik Modellenmesi

Yavuz Yaman
Doçent
Havacılık Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
06531 ANKARA

Bu çalışmada kütle merkezi ve kayma merkezi çakışmayan bir açık kesitli kirişin, zorlanmış titreşimlerinin incelenmesi için geliştirilen yeni bir analitik model tanıtılmaktadır. Kirişin birbirine dik iki eksendeki eğilme titreşimleri ve burulma titreşimleri birarada oluşmaktadır. Sunulan analitik model, dalga yayınımı teorisi kullanılarak geliştirilmiştir. Bu çalışma, modelin tanıtılması amacıyla yalnız basit mesnetli uçlar için hazırlanmış ve kesitteki buruşmanın etkisi göz önünde tutulmamıştır. Çalışmada, zorlama noktasal harmonik kuvvet olarak alınmıştır. Kiriş Euler-Bernoulli kirişi olarak varsayılmıştır.

GİRİŞ

Açık kesitli kirişler, havacılık yapılarında direngenlik arttırıcı olarak (stiffeners) yaygın bir şekilde kullanılmaktadırlar. Bu tür kirişlerin kullanıldığı uygulamaların sonucunda, genelde kiriş kesitlerin kütle ve kayma merkezleri çakışmamakta ve eğilme titreşimleri ile burulma titreşimleri birarada oluşmaktadır. Bu olgu kirişlerin ve bağlı bulundukları yüzeylerin dinamik davranışlarını etkilemekte ve özellikle belli frekans aralıklarında kiriş davranışının tüm yapıyı yönlendirdiği göz önüne alınırsa, son derece önemli olmaktadır.

Açık kesitli kirişlerin dinamik davranışlarını inceleyen ilk araştırmacılardan biri Gere [1,2] olmuş ve birarada oluşan titreşimlerin özdeğerlerini basit mesnetli uçlar için saptamıştır. Dokumacı [3], bir eksene göre simetrik durumlar için, özdeğerleri ve öz vektörleri belirleyen bir analitik model geliştirmiştir. Ancak bu çalışmalar serbest titreşim özelliklerini incelemekle sınırlı kalmışlardır.

Mead [4] tarafından önerilen ve Yaman'ın geliştirdiği [5] dalga yayınımı yaklaşımı (wave propagation approach) sabit kalınlığa sahip kiriş ve plak yapılarının zorlanmış titreşimlerinin incelenmesinde çok olumlu sonuçlar vermiştir [6]. Özellikle birden fazla noktada desteklenen yapılarda ve desteklerin kütle ve direngenlik özelliklerinin (inertia and stiffness properties of stiffeners) önem kazandığı karmaşık durumlarda önerilen kesin analitik yaklaşımın sonuçları, deneysel sonuçlarla çok uyumlu bulunmuştur [7].

Yaman, dalga yayınımı yaklaşımı kullanarak, bir eksene göre simetrik, açık kesitli kirişlerin bir arada oluşan zorlanmış eğilme ve burulma titreşimlerinin incelenmesinde kolaylık sağlayan yeni bir analitik yöntem geliştirmiş ve bunu basit mesnetli, kilitli ve serbest uçlar için uygulamıştır [8,9].

Bu çalışmada iki eksene göre de simetrik olmayan açık kesitli kirişler ele alınmıştır. Kütle merkezi ve kayma merkezinin çakışmamasından dolayı, birbirine dik iki eksende olan eğilme titreşimleri (bending vibrations), burulma titreşimleri (torsional vibrations) ile bir arada oluşmakta ve üçlü bağlaşma (triple-coupling) olarak tanımlanabilen durum oluşmaktadır. Dalga yayınımı teorisi yardımıyla birarada oluşan titreşimler birbirleri cinsinden ifade edilebilmektedir. Çalışma, yöntemin tanıtılması amacıyla, sadece basit mesnetli uçları içermekle birlikte; önerilen yöntem klasik olmayan sınır koşulları için de kullanılabilmektedir.

TEORİ

Şekil 1'de verilen kesiti göz önüne alalım. Şekilde C kütle merkezini, O kayma merkezini, c_y ve c_z kütle ve kayma merkezi arasındaki kaçıklıkları, w ve v sırasıyla, kayma merkezinden geçen, z ve y yönlerindeki dikey yer değiştirmeleri göstermektedir. υ ve ξ, C 'den geçen eksen takımıdır. Kütle merkezine uygulanan bir dikey yük (transverse load) kayma merkezine göre hem dikey yük, hem de tork etkisi yaratır ve bu da titreşimlerin bağlaşmasına neden olur. Buna göre kirişin hareket denklemi, birarada oluşan üç denklem cinsinden bulunur [1, 2].

$$EI_\xi \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_{\upsilon\xi} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_y \rho A \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$EI_\upsilon \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI_{\upsilon\xi} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c_z \rho A \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$- GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho I_o \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + c_y \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_z \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Burada EI_ξ , z yönündeki ve EI_υ , y yönündeki dikey direngenlikleri, $EI_{\upsilon\xi}$ yz yönlerindeki dikey bağlaşma direngenliğini,GJ burulma sabitini, I_o kayma merkezine göre polar eylemsizlik momentini, ρ kiriş malzeme yoğunluğunu, E Young modülünü, A kiriş sabit kesit alanını, ϕ burulmayı, t zamanı simgelemektedir.

Bu denklem takımı üçlü bağlaşmayı tanımlamaktadır. y ve z yönlerindeki titreşimler arasında direngenlik bağlaşması (stiffness coupling), w ile ϕ ve v ile ϕ titreşimleri arasında ise kütlesel bağlaşma (mass coupling) bulunmaktadır.

Dikey yer değiştirmeler ve burulma,

$$w(x, t) = w_n e^{k_n x} e^{i\omega t}$$

$$v(x, t) = v_n e^{k_n x} e^{i\omega t}$$

$$\phi(x, t) = \phi_n e^{k_n x} e^{i\omega t} \qquad (2)$$

olarak ifade edilebilir [4]. Burada w_n, v_n ve ϕ_n n'inci büyüklükleri, k_n n'inci dalga sayısını, ω açısal frekansı belirtmektedir. Eğer bağıntılar (1) ve (2) birlikte kullanılırsa, aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} EI_\xi k_n^4 - m\omega^2 & EI_{\upsilon\xi} k_n^4 & -c_y m\omega^2 \\ EI_{\upsilon\xi} k_n^4 & EI_\upsilon k_n^4 - m\omega^2 & -c_z m\omega^2 \\ -c_y m\omega^2 & -c_z m\omega^2 & -GJ k_n^2 - \rho I_o \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_n \\ v_n \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Bu denklemde m birim uzunluk boyunca kütleyi simgelemektedir (m=ρA).

Matrisin açılımı aşağıdaki onuncu dereceden dalga sayısı, k_n, denklemini verir.

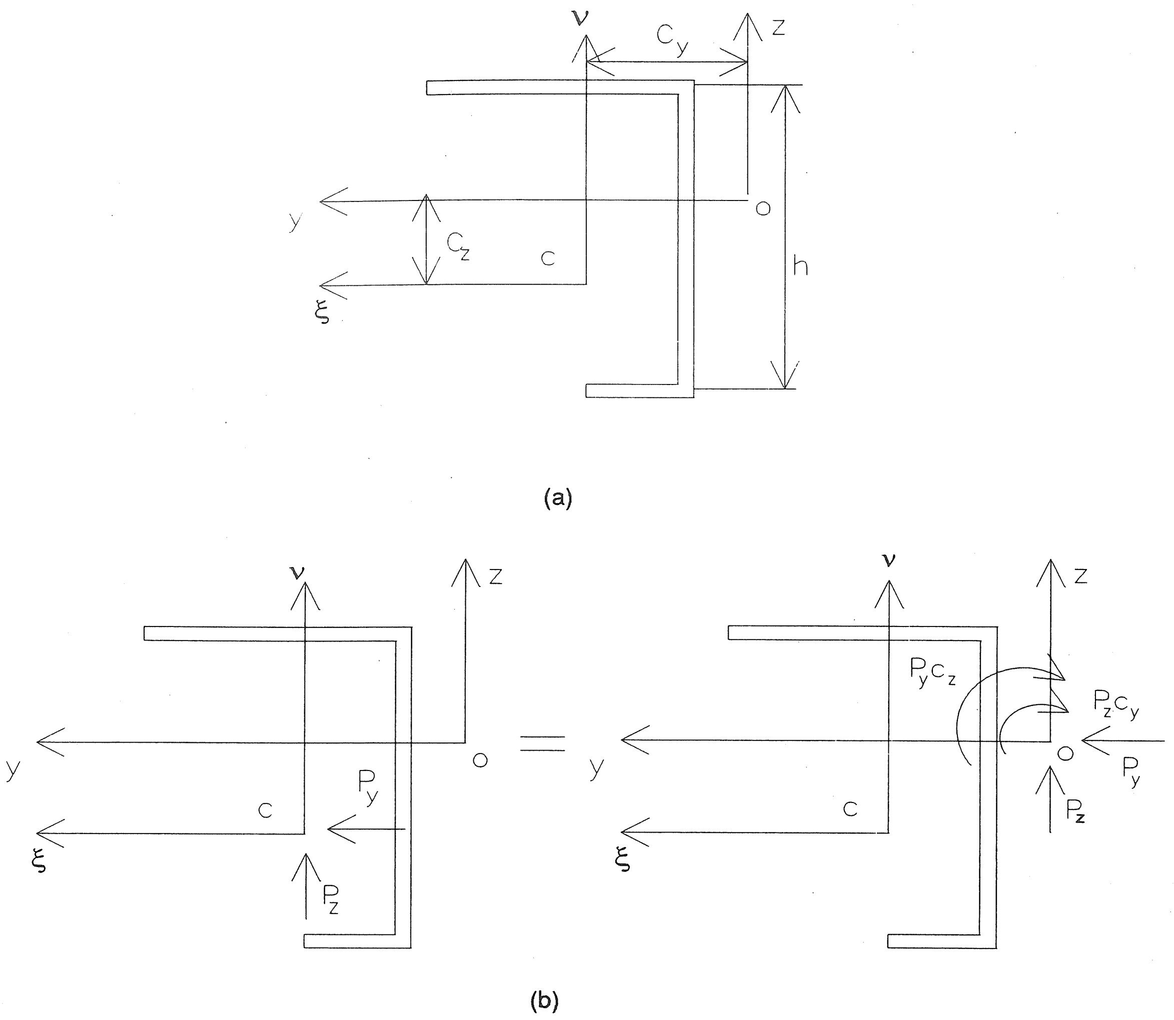
$$\left\{(GJ)\left((EI_\xi)(EI_\upsilon) - (EI_{\upsilon\xi})^2\right)\right\} k_n^{10}$$
$$+ \left\{\left(\rho I_o \omega^2\right)\left((EI_\xi)(EI_\upsilon) - (EI_{\upsilon\xi})^2\right)\right\} k_n^8$$
$$- \left\{(GJ)\left(m\omega^2\right)\left(EI_\xi + EI_\upsilon\right)\right\} k_n^6$$
$$- \left\{ \left(\rho I_o \omega^2\right)\left(m\omega^2\right)\left(EI_\xi + EI_\upsilon\right)\right.$$
$$\left. - \left((EI_\xi)\left(c_z^2\right) + (EI_\upsilon)\left(c_y^2\right) - 2(EI_{\upsilon\xi})(c_z c_y)\right)\left(m\omega^2\right)^2 \right\} k_n^4$$
$$+ \left\{(GJ)\left(m\omega^2\right)^2\right\} k_n^2$$
$$- \left\{\left(m\omega^2\right)^3\left(c_z^2 + c_y^2\right) - \left(\rho I_o \omega^2\right)\left(m\omega^2\right)^2\right\} = 0 \qquad (4)$$

şimdi Şekil 2'yi göz önünde tutalım. Dalga yayınımı teorisine göre sabit kalınlıkta, sonsuz uzunluktaki, sönümsüz bir kirişin x=0 noktasında harmonik bir noktasal kuvvetle (F_o) zorlanması sonucu her iki yöne ilerleyen ikişer dalga oluşur. Dalgaların toplamı hareket denkleminin derecesine eşit olmaktadır. Bir yönde ilerleyen dalgalardan biri çabuk sönen (near-field), diğeri ise taşınan (propagating) tipte dalgadır. Buna göre kirişin herhangi bir x noktasındaki dikey yer değiştirme (transverse displacement), aşağıdaki şekilde bulunur [4].

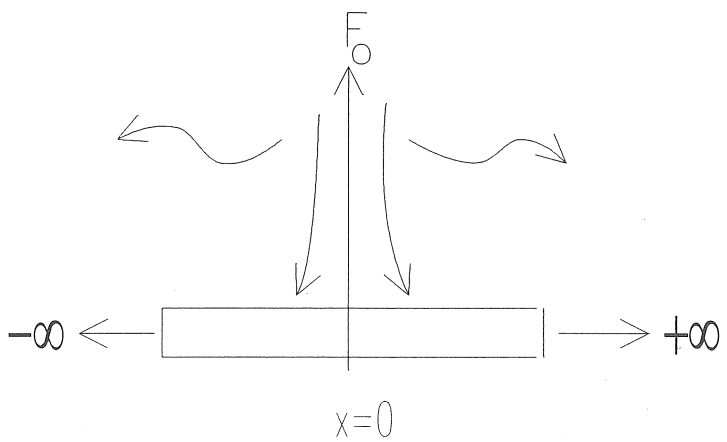
$$w(x, t) = F_o \sum_{n=1}^{2} a_n' e^{-k_n' x} e^{i\omega t} \qquad (5)$$

Burada k_n' n'inci kiriş dalga sayısını, a_n' ise kuvvetin uygulandığı noktadaki uyumluluk ve süreklilik koşullarının sağlanmasıyla bulunan ve sistem parametreleri ile frekans cinsinden elde edilen n'inci katsayıyı göstermektedir [4].

Aynı yaklaşım üçlü bağlaşmaya uğramış kirişe uygulanırsa, herhangi bir noktasal zorlama sonucu her iki yönde beşer dalganın yol alması gerektiği bulunur. Bağıntı (4), yapıda on adet dalga olduğunu, bunlardan beşinin pozitif x, diğer beşinin de negatif x yönünde yayındığını göstermektedir. Bir yönde ilerleyen beş dalganın dördü eğilme dalgalarını, beşincisi ise burulma dalgasını simgelemektedir. Eğilme ve burulma



Şekil 1. Kütle Merkezi ve Kayma Merkezi Çakışmayan Kiriş Kesiti (a) Koordinat Sistemi, (b) Gerçek ve Etkin Zorlamalar



Şekil 2. Sabit Kalınlıkta, Sonsuz Uzunlukta, Sönümsüz Euler-Bernouilli Kirişe Uygulanan Noktasal Dikey Zorlamanın Yarattığı Dalgalar

titreşimlerinin bir arada oluşmadığı varsayılırsa, z yönündeki titreşimler için dört, y yönündeki titreşimler için dört ve burulma için iki dalga oluşacağı ve üç grubunda bağımsız olarak değerlendirilmesi gerektiği belirgindir. Ancak bağlaşmanın varlığı bu on dalganın birbirlerini etkileyip bir arada oluşmalarına neden olmaktadır.

Buna göre, kütle merkezinden geçen, z yönündeki P_z dikey kuvveti sonsuz ve sabit kalınlığa sahip bir kirişte, herhangi bir x noktasında aşağıda verilen tepkeleri (response) oluşturur.

$$w(x) = P_z \sum_{n=1}^{5} a_n e^{-k_n x}$$

$$v(x) = P_z \sum_{n=1}^{5} b_n e^{-k_n x}$$

$$\phi(x) = P_z \sum_{n=1}^{5} c_n e^{-k_n x} \quad (6)$$

a_n değerleri, direngenlik bağlaşması olmayan durumlarda, aşağıda belirtilen uyumluluk ve süreklilik koşullarının sağlanmasıyla oluşturulacak matris denkleminin sayısal çözümü ile elde edilir.

$$EI_\xi \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{x=0} = \frac{P_z}{2}$$

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$EI_\upsilon \left. \frac{d^3 v}{dx^3} \right|_{x=0} = 0$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$GJ \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = \frac{P_z c_y}{2} \quad (7)$$

Gerekli olan b_n ve c_n değerleri, tüm bağlaşmalar gözönünde tutulduğunda, bağıntılar (2) ve (3) kullanılarak a_n cinsinden bulunur.

$b_n = \Pi_n a_n$

$c_n = \zeta_n a_n$

$$\Pi_n = -\frac{\left(EI_\xi k_n^4 - m\omega^2\right)\left(GJk_n^2 + \rho I_o \omega^2\right) + \left(-c_y m\omega^2\right)^2}{\left(-c_y m\omega^2\right)\left(-c_z m\omega^2\right) + \left(EI_{\upsilon\xi} k_n^4\right)\left(GJk_n^2 + \rho I_o \omega^2\right)}$$

$$\zeta_n = \frac{\left(EI_\xi k_n^4 - m\omega^2\right)\left(EI_\upsilon k_n^4 - m\omega^2\right) - \left(EI_{\upsilon\xi} k_n^4\right)^2}{\left(EI_{\upsilon\xi} k_n^4\right)\left(-c_z m\omega^2\right) - \left(-c_y m\omega^2\right)\left(EI_\upsilon k_n^4 - m\omega^2\right)} \quad (8)$$

Eğer dikey yükleme sadece y yönünde olursa, ya da aynı zamanda hem y hem de z yönlerinde gerçekleşirse, bağıntı (7)'de kullanılan sınır koşulları yeniden düzenlenmelidir.

Zorlama sonucu yayılan dalgalar, uçlardan yansırlar. Serbest dalgalar olarak adlandırılan bu dalgaların kirişin herhangi bir x noktasında yarattığı, z yönündeki, dikey yer değiştirme

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{10} A_n e^{k_n x} e^{i\omega t} \quad (9)$$

bağıntısından bulunur.

Kirişteki toplam dikey yer değiştirme, zorlanmış ve serbest dalgaların etkileri bir arada tutularak belirlenir. Buna göre, sadece P_z kuvveti etkidiğinde, dikey yer değiştirmeler ve burulma aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{10} A_n e^{k_n x} e^{i\omega t} + P_z \sum_{n=1}^{5} a_n e^{-k_n |x_f - x|}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{10} \Pi_n A_n e^{k_n x} e^{i\omega t} + P_z \sum_{n=1}^{5} b_n e^{-k_n |x_f - x|}$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{10} \zeta_n A_n e^{k_n x} e^{i\omega t} + P_z \sum_{n=1}^{5} c_n e^{-k_n |x_f - x|} \quad (10)$$

Burada x_f kuvvetin uygulandığı noktayı simgelemektedir.

A_n değerleri kirişin uçlarındaki sınır koşullarının sağlanmasıyla elde edilecek olan serbest dalga genlikleridir. Basit mesnetli uçlar için gerekli sınır koşulları şunlardır [1, 2].

$$\begin{aligned} w(0) &= w(L) = 0 \\ w''(0) &= w''(L) = 0 \\ v(0) &= v(L) = 0 \\ v''(0) &= v''(L) = 0 \\ \phi(0) &= \phi(L) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Bağıntı (10)'da verilen w, v ve ϕ ifadeleri bağıntı (11)'de verilen koşulları sağlarsa, sonuç onuncu dereceden bir matris denklemi haline dönüşür. Bu denklemin sayısal olarak çözümü ile elde edilecek A_n değerleri bağıntı (10)'da kullanılırsa P_z zorlamasına karşılık kirişin herhangi bir x noktasındaki, gerek duyulan, tepke belirlenir.

UYGULAMALAR VE TARTIŞMA

Çalışmada kullanılan model aşağıdaki değerlere sahiptir.
$L = 1$ (m), $A = 9.68*10^{-5}$ (m^2), $h = 38.10*10^{-3}$ (m),
$I_\upsilon = 5.08*10^{-9}$ (m^4), $I_\xi = 2.24*10^{-8}$ (m^4),
$I_{\upsilon\xi} = 4.25*10^{-9}$ (m^4), $c_y = 10.43*10^{-3}$ (m),
$c_z = 9.09*10^{-3}$ (m), $J = 5.20*10^{-11}$ (m^3),
$I_o = 4.60*10^{-8}$ (m^4), $\rho = 2700$ (kg/m^3),
$E = 7*10^{10}$ (N/m^2), $G = 2.6*10^{10}$ (N/m^2)

Olası sönüm (η) sadece eğilme titreşimleri için ele alınmış ve $EI_\xi = EI_\xi (1+i\eta)$ ve $EI_\upsilon = EI_\upsilon (1+i\eta)$ olarak işlemlere katılmıştır.

Çalışmada öncelikle bağlaşık dalga sayıları (coupled wave numbers) incelenmiş ve grafikler sunulmuştur. Kullanılan boyutsuz değerler şu şekildedir.

Boyutsuz dalga sayısı : [h] k_n

Boyutsuz frekans : $[2\pi h^2 (\rho A/EI_\xi)^{1/2}]$ f

Dalga yayınımı teorisine göre, sönümsüz bir yapıda oluşan, tamamen reel bir dalga sayısı çabuk sönen bir dalgayı, tamamen sanal bir dalga sayısı ise yayınan bir dalgayı tanımlamaktadır. Eğer dalga hem reel, hem de sanal kısımlara sahip ise yayınan bu dalga belli bir uzaklık sonucunda sönecektir. Sistem sönümlü olduğu takdirde her dalga hem reel, hem de sanal kısımlara sahip olmaktadır

Şekiller 3 ve 4, kütlesel bağlaşmanın ele alındığı sönümsüz bir kiriş için, aynı yönde ilerleyen beş dalganın sırasıyla reel ve sanal kısımlarını göstermektedir. Görüleceği gibi dalgalardan ikisi reel, üçü sanaldır. (Çizim güçlükleri nedeni ile sıfır olan değerler 10^{-8} 'e dönüştürülmüştür). Şekil 4'te çizilen sanal dalga sayılarından en büyük değere sahip olanı burulma ağırlıklı (torsion dominated) bağlaşık dalgayı, diğerleri eğilme ağırlıklı (bending dominated) bağlaşık dalgaları belirtmektedir. Bağlaşma olmadığı varsayılırsa z yönündeki eğilme titreşimlerinin bir reel, bir de sanal; y yönündeki eğilme titreşimlerinin bir reel, bir de sanal ve burulma titreşimlerinin de bir sanal dalga sayısı vereceği bilinmektedir. Dolayısıyla umulan ve bulunan dalga sayıları arasında nitelik olarak bir fark yoktur. Değişiklikler bağlaşmadan dolayı nicelik açısından gerçekleşmiş ve dalga sayılarının log-log çizimlerde gösterdiği, bilinen, doğrusal davranış artık bulunamamıştır. Eğer sistem sönümlü olarak varsayılırsa sıfır olan dalga sayıları belli değerlere ulaşmakta, sıfır olmayanlar ise aynı değerlerini korumaktadır. Bu durum reel kısımlar ve $\eta=0.3$ için Şekil 5'te sunulmuştur. Hem kütlesel hem de direngenlik bağlaşmalarının göz önünde tutulduğu durum incelendiğinde, eğilme ağırlıklı sanal dalga sayılarından daha büyük değere sahip olanında bir artış gözlemlenmiş, bunun yanında gerek nitelik gerekse nicelik olarak belirgin bir fark görülmemiştir.

Kirişin $\eta=10^{-6}$ için bulunan üçlü bağlaşık rezonans değerleri Tablo 1' de verilmiştir. Tablo 2 ise kirişin her üç hareket için bağlaşık olmayan (uncoupled) rezonans değerlerini göstermektedir.

Tablo 1: İncelenen kirişin bağlaşık rezonans değerleri (Hz)
(1.B: Birinci Burulma Rezonansı, 1.E-v: y yönünde birinci eğilme rezonansı,1.E-w: z yönünde birinci eğilme rezonansı).

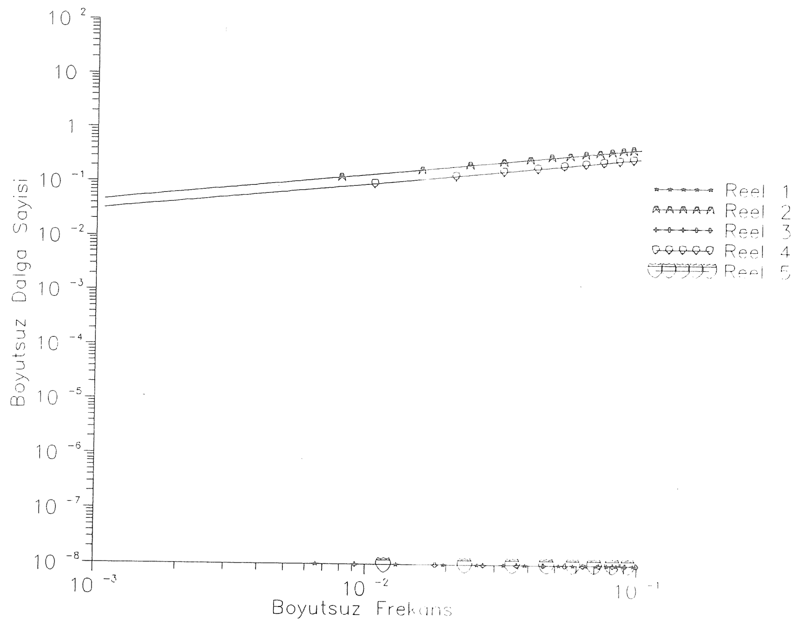
Yalnız Kütlesel Bağlaşma
45.49 (1.B)
69.91 (1.E -v)
101.73 (2.B)
149.82 (1.E-w)
154.85 (3.B)
207.45 (4.B)
257.29 (2.E-v)
259.86 (5.B)
312.19 (6.B)
364.47 (7.B)
416.73 (8.B)
468.96 (9.B)

Tablo 2: İncelenen kirişin bağlaşık olmayan rezonans değerleri (Hz)
(B: Burulma rezonansları, E-v: y yönünde eğilme rezonansları, E-w: z yönünde eğilme rezonansları)

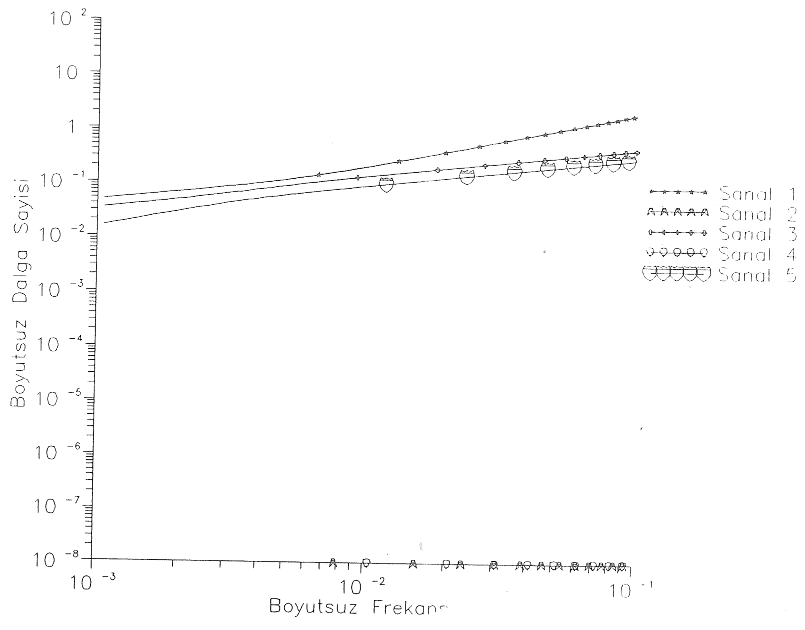
B	E-v	E-w
52.17	57.97	121.85
104.33	231.88	487.38
156.49		
208.66		
260.83		
312.99		
365.16		
417.32		
469.49		

Kirişin, sadece kütlesel bağlaşmanın ele alındığı durum için elde edilen, z yönünde uygulanan bir birim kuvvete olan w tepkesi Şekil 6'da verilmiştir. Burulma ağırlıklı ve y yönündeki eğilme ağırlıklı rezonans değerlerinde, w tepkesinde ani çıkışlar (spikes) oluşmakta ancak bunlar eğrinin eğilme ağırlıklı genel karakterini bozmamaktadır. 149 Hz civarındaki eğilme rezonansı belirgindir. Burulma rezonansları, bağımsız incelendikleri durumda olduğu gibi, yaklaşık eşdeğer aralıklarla oluşmaktadırlar.

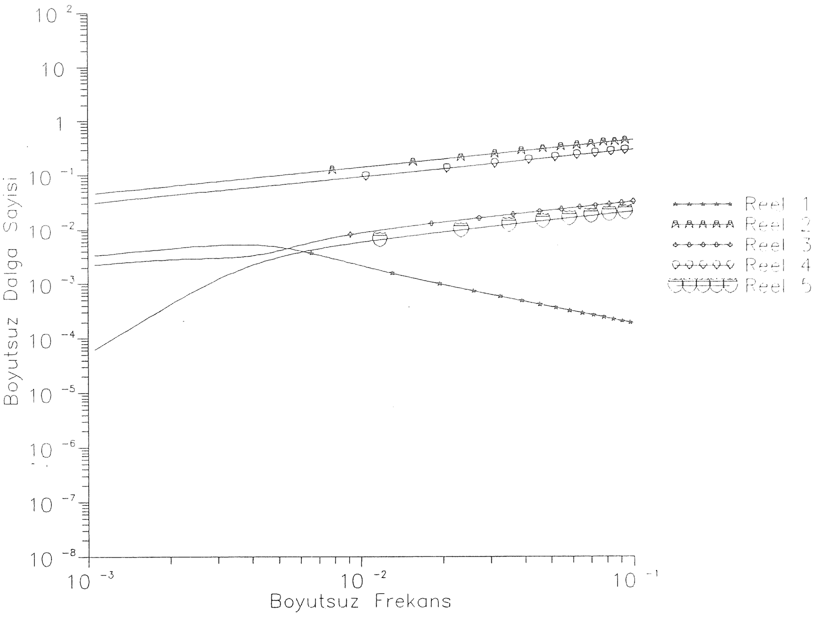
Şekil 7 kirişin kütlesel bağlaşmalı durum için elde edilen, ve sadece y yönünde uygulanan bir birim kuvvete olan, v tepkesini göstermektedir. Şekil 6 ile



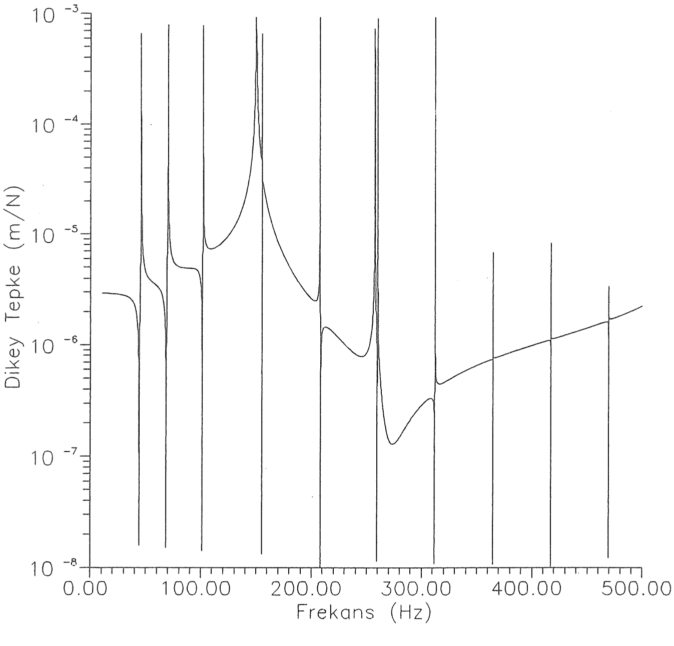
Şekil 3. Reel Dalga Sayıları (η = 0, Yalnız Kütlesel Bağlaşma)



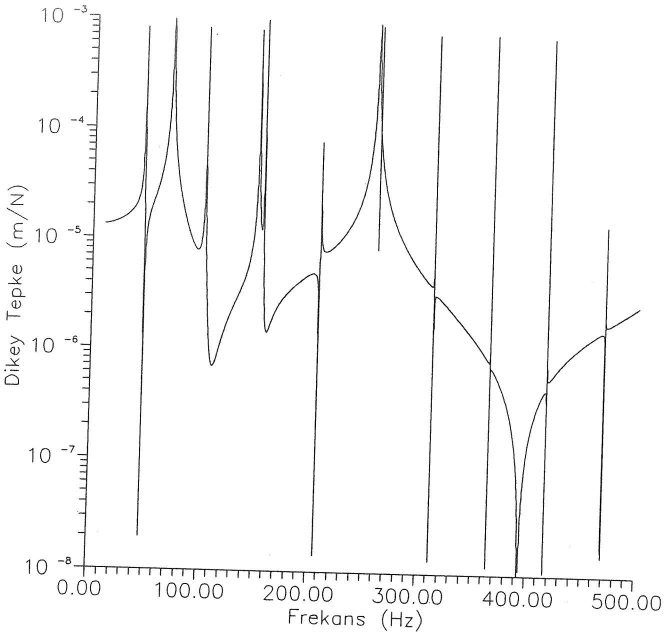
Şekil 4. Sanal Dalga Sayıları (η = 0, Yalnız Kütlesel Bağlaşma)



Şekil 5. Reel Dalga Sayıları (η = 0.3, Yalnız Kütlesel Bağlaşma)



Şekil 6. Dikey Tepke (η =10^{-6}, Yalnız Kütlesel Bağlaşma, w/P_z)



Şekil 7. Dikey Tepke ($\eta = 10^{-6}$, Yalnız Kütlesel Bağlaşma, v/P_y)

ilgili genel gözlemler burada da geçerliliklerini korumaktadırlar.

Sadece z yönünde uygulanan bir birim kuvvet sonucunda oluşan burulma biçim şekilleri (torsional mode shapes), kütlesel bağlaşmalı durum için, Şekiller 8-10'da sunulmuştur. Biçim şekilleri rezonans değerlerinde, kiriş sönümsüz varsayılarak çizilmiştir. Belirgin olan nokta; kirişin biçim şeklinin rezonansın niteliğinden çok, kaçıncı rezonans olduğuna bağlı bulunduğudur. Bu durum z ve y yönlerindeki eğilme biçim şekillerinde de saptanmıştır.

SONUÇ

Bu çalışmada, sabit kesit alanlı ve açık kesitli kirişlerin zorlanmış, bağlaşık titreşimlerini incelemekte kullanılan yeni bir analitik yöntem sunulmuştur. Kirişlerin kütle ve kayma merkezleri çakışmadığından, birbirine dik iki eksendeki eğilme titreşimleri ve burulma titreşimleri bir arada oluşmaktadır. Dalga yayınımı yaklaşımı kullanılarak geliştirilen yeni yöntem ile bağlaşık hareketin dalga sayıları bulunmuş ve zorlanmış titreşimler bu sayıların tanımladığı dalgalar yardımıyla incelenmiştir. Çalışmada kesit buruşması göz önüne alınmamış ve modelleme basit mesnetli uçlar için yapılmıştır. Zorlama noktasal harmonik kuvvet olarak düşünülmüştür.

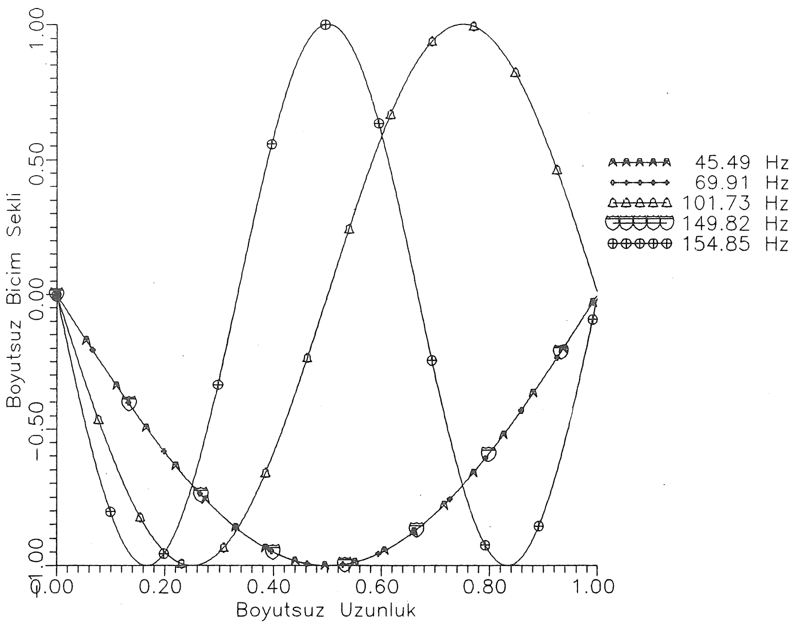
Önerilen yöntem özellikle zorlanmış titreşimlerin frekans cevaplarının bulunması açısından yararlıdır. Zorlama bir eksen boyunca olabildiği gibi, birbirine dik iki eksende de olabilir. Birden fazla noktada uygulanabilecek olan noktasal kuvvet ve moment zorlamaları yanında dağılmış yüklerin etkileri de incelenebilir. Yöntem kesit buruşmasının modellenmesinde ve elastik sınır koşullarının incelenmesinde de son derece etkindir. Önerilen yöntem yardımıyla serbest titreşim özellikleri olan doğal frekanslar ve titreşim biçim şekilleri de kolaylıkla elde edilebilir.

ANALYTICAL MODELLING OF TRIPLY-COUPLED, FORCED VIBRATIONS

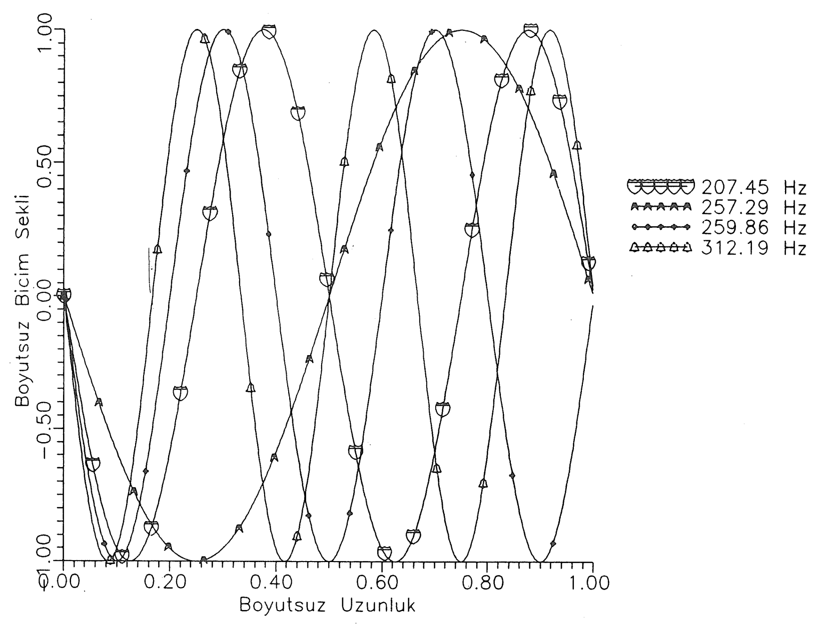
This study investigates the forced, triply-coupled vibrations of a uniform channel section. The centroid and the shear center of the cross-section do not coincide; hence the flexural vibrations in two mutually perpendicular direction and the torsional vibrations are coupled. The study uses the wave propagation approach in constructing the exact analytical model. As a pre-cursor to more elaborate analyses, the current model ignores the effects of warping and only assumes the simply-supported ends. In the analysis the excitation is taken in the form of a point harmonic force and the beam is assumed to be an Euler-Bernoulli beam.

KAYNAKÇA

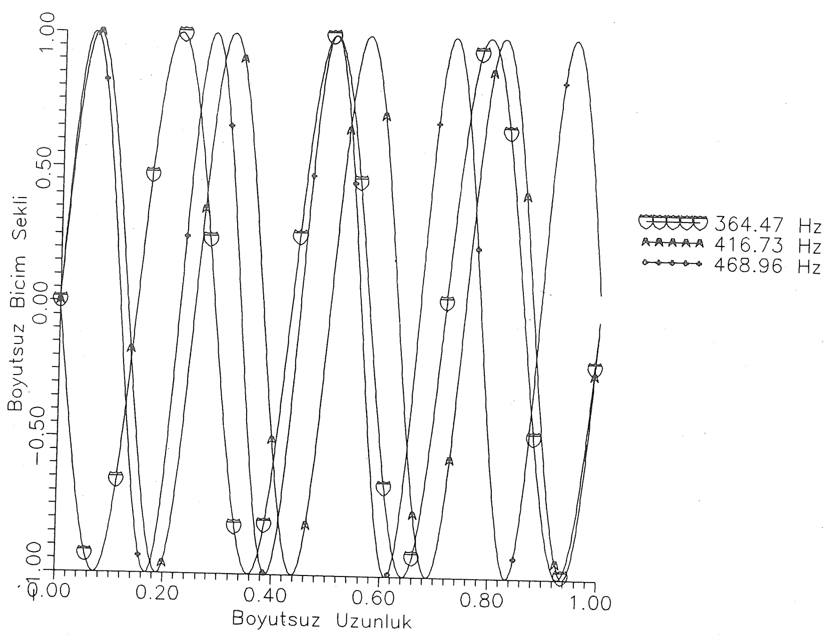
1. Gere, J.M., Torsional Vibrations of Beams of Thin-Walled Open Section, *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 76 (1954), 381-387.
2. Gere, J.M., Lin, Y.K., Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Cross-Section, *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 80 (1958), 373-378.



Şekil 8. Burulma Biçim Şekilleri (η = 0, Yalnız Kütlesel Bağlaşma, ϕ/P_z)



Şekil 9. Burulma Biçim Şekilleri (η = 0, Yalnız Kütlesel Bağlaşma, ϕ/P_z)



Şekil 10. Burulma Biçim Şekilleri ($\eta = 0$, Yalnız Kütlesel Bağlaşma, ϕ/P_z)

3. Dokumacı, E., An Exact Solution for Coupled Bending and Torsion Vibrations of Uniform Beams Having Single Cross-Sectional Symmetry, *Journal of Sound and Vibration*, 119 (1987) 3, 443-449.
4. Mead, D.J., A New Method of Analyzing Wave Propagation in Periodic Structures; Applications to Periodic Timoshenko Beams and Stiffened Plates, *Journal of Sound and Vibration*, 104 (1986) 1, 9-27.
5. Yaman, Y., Wave Receptance Analysis of Vibrating Beams and Stiffened Plates, *Doktora Tezi*, University of Southampton, 1989.
6. Mead, D.J., Yaman, Y., The Harmonic Response of Uniform Beams on Multiple Linear Supports: A Flexural Wave Analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 141 (1990) 3, 465-484.
7. Mead, D.J., Yaman, Y., The Harmonic Response of Rectangular Sandwich Plates with Multiple Stiffening: A Flexural Wave Analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 145 (1991) 3, 409-428.
8. Yaman, Y., Eksene Dik Titreşimler ile Burulma Titreşimlerinin Birarada Oluştuğu Kirişlerde Zorlanmış Titreşimlerin Analitik Modellenmesi, *8. Ulusal Mekanik Kongresi Bildiri Kitabı*, 629-638, Antalya,1993.
9. Yaman, Y., Kirişlerde Birlikte Var Olan Eğilme-Burulma Titreşimlerinin Analizi, *6. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu Bildiriler Kitabı*, 421-430, KTÜ, 1993.