

Mustafa İ. Gökler
Doçent

Cüneyt Özbal
Araştırma Görevlisi

Makina Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
06531 ANKARA

Yüzey Modellemede Kesişen Yüzeylerin Kesişme Eğrisi Boyunca Kenar Geçiş Yüzeylerinin Oluşturulması

Bu çalışmada, bilgisayar destekli tasarım ve imalat uygulamalarında kullanılmak üzere, yüzeylerin kesişme eğrisi boyunca geçiş yüzeylerinin oluşturulması için, sabit çaplı küreyle yuvarlatma metodunu kullanan bir kaynaştırma tekniği kullanılmıştır. Bu tekniği kullanarak silindir, koni, torus, küre ve blok gibi iki temel cismin yüzeyleri arasında geçiş yüzeyleri oluşturulabilir. Çalışmada kullanılan modül algoritmaları daha önce iş istasyonu üzerinde geliştirilmiş olan katı modelleme programına eklenmiştir.

GİRİŞ

Bilgisayar destekli geometrik tasarımda, temel yüzeyler arasında düzgün geçiş yüzeyleri oluşturma işi yüzey kaynaştırması olarak tanımlanmaktadır. Yüzey kaynaştırmasındaki esas amaç, temel yüzeylerin kesişmesiyle oluşan keskin kenarları (köşeleri) yuvarlatmaktır. Yüzey kaynaştırma estetik ya da bazı tasarım nedenleriyle bir zorunluluk olabilir. Bir parçadaki keskin kenarların düzgünleştirilmesi, o parçanın mukavemetini, güvenilirliğini, görünüşünü ya da işlenilebilirliğini geliştirme yönünde kullanılabilir. Bir şarap şişesinde alt gövdeyle üst gövde arasındaki düzgün geçiş bir estetik gereksinim olarak görülebilir. Bir başka tarafta ise, uçağın gövde ve kanatları arasındaki düzgün geçiş ise gerilme yığılması düşürme açısından tasarım gerekliliğidir.

Literatürde birçok kaynaştırma tekniği bulunmaktadır. Bu teknikler, kaynaştırılacak temel yüzeylerin açık ve kapalı olarak tanımlı [1, 2, 3] ya da parametrik olarak tanımlı [4, 5] olmasına göre değişmektedir. Bu çalışmada ise diğer tekniklere göre bazı avantajları gözönünde bulundurarak sabit çaplı kaynaştırma [6] tekniği kullanılmıştır. Sabit çaplı kaynaştırmayla oluşturulan geçiş yüzeyleri, gözönünde canlandırma ve anlama açısından diğer tekniklerdekine göre daha basit durumdadırlar. ODTÜ BİLTİR Merkezi'nde daha önce geliştirilmiş katı modelleme programına [7-10] bu teknik için yazılan modül algoritmaları eklenmiştir [11].

SABİT ÇAPLI KÜREYLE KAYNAŞTIRMA TEKNIĞİ

Bu teknikte, geçiş yüzeyleri Şekil 1'de görüldüğü gibi prensipte iki temel yüzey arasında sabit çaplı bir küre yuvarlayarak oluşturulmaktadır.

Sabit çaplı küreyle kaynaştırma tekniğinde izlenen yol aşağıdaki gibi özetlenebilir:

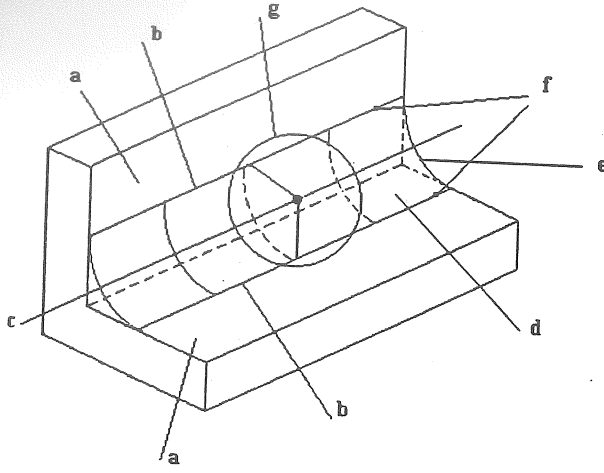
1. Kaynaştırılacak temel yüzeyler (silindir, koni vb.) parametrik olarak tanımlanır.
2. Tanımlanan temel yüzeylerin öteleme yüzeyleri parametrik olarak tanımlanır.
3. Bulunan öteleme yüzeylerin kesişme eğrileri uygun bir kesişme algoritması kullanılarak bulunur. Bulunan kesişme eğrisi yuvarlanacak kürenin merkezinin izleyeceği yolu temsil eder.
4. Son olarak geçiş yüzeyleri oluşturulur.

Temel Yüzeylerin Parametrik Olarak Tanımlanması

Parametrik yüzeyler bilindiği gibi x, y, z kartezyen koordinat sistemindeki noktaların tu-düzlemindeki t ve u parametrelerinin belirlenmesiyle bulunur:

$$r(t, u) = x(t, u) i + y(t, u) j + z(t, u) k \quad (1)$$

Silindir kenar yüzeylerindeki herhangi bir nokta aşağıdaki eşitlikle tanımlanabilir:



Şekil 1. Sabit Çaplı Kaynaştırma. a) Temel Yüzey, b) Temas Eğrisi, c) Patika Eğrisi, d) Geçiş Yüzeyi, e) Geçiş Eğrisi, f) Temas Noktası, g) Yuvarlatılan Küre.

$$P(t, u) = [xc + R \cos t] i + [yc + R \sin t] j + [zc + u] k \quad (2)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{ve} \quad z_{alt} \leq u \leq z_{üst}$$

R silindir çapını, xc, yc ve zc alt taban yüzeyinin koordinatlarını temsil eder. Diğer temel yüzeyler de benzer bir şekilde tanımlanabilir [11].

Öteleme Yüzeylerinin Oluşturulması

Öteleme yüzeyleri, temel yüzeylerin genişlemiş ya da daralmış uyarlamasıdır. d mesafesi kadar genişleyen bir öteleme yüzeyini oluşturmak için temel yüzeydeki her noktaya d uzaklığı eklenir. Daralmış bir öteleme yüzeyi elde etmek için benzer bir şekilde d uzaklığı çıkarılır [12].

Öteleme yüzeyi parametrik olarak aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$O(t, u) = P(t, u) + d n(t, u) \quad (3)$$

Bu eşitlikte d öteleme mesafesi, n(t, u) ise birim yüzey normalidir ve aşağıdaki eşitlikle tanımlanır.

$$n(t, u) = \frac{P_t \times P_u}{|P_t \times P_u|} \quad (4)$$

bu formülde

$$P_t = \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{ve} \quad P_u = \frac{\partial P}{\partial u}$$

t ve u parametrelerine göre temel yüzeye teğet yönleri göstermektedir.

Ötelenmiş Yüzeylerinin Kesişimi

Ötelenmiş yüzeylerin kesişim problemini çözmek için Barnhill [13] tarafından önerilmiş bir algoritma kullanılmıştır. Bu kesişim algoritması aşağıdaki gibi özetlenebilir;

Adım 1: Kaynaştırılacak temel yüzeylerin ötelenmiş yüzeyleri dikdörtgenel parametrik parçalara ayrılır. Böylece her dikdörtgenel parçanın köşe koordinatları yanında köşe parametrik değerleri de bellekte tutulur.

Adım 2: Birinci yüzeyin dikdörtgenel parçaları diğer yüzeyin dikdörtgenel parçalarıyla kesiştirilir. Böylece 'başlangıç kesişme noktaları' (B.K.N.) bulunur.

Adım 3: Bu adımda, bir önceki adımda bulunan B.K.N.'ları esas alınarak gerçek eğri-yüzey kesişme noktaları, G.E.K.N., bulunmaya çalışılır. Bunun için Newton Raphson Tekrarlama tekniği [6] kullanılmıştır. Kesişen bir kenar iso-parametrik bir eğri sayılabilir ve iki yüzeyin G.E.K.N.'sı bulunması için aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır:

$$F^0(r^*, s) - G^0(t, u) = 0 \quad (5)$$

Bu eşitlikte $F^0(r^*, s)$, $r = r^*$ sabit değeriyle iso-parametrik kenara sahip olan birinci ötelenmiş yüzeyi, $G^0(t, u)$ ise G.E.K.N.'sının dikdörtgenel parametrik parça üzerinde olan ikinci ötelenmiş yüzeyi temsil etmektedir.

Kullanılan tekrarlamaya tekniğiyle iki yüzeyin üzerindeki bütün G.E.K.N.'ları bulunur ve bilgisayar belleğinde tekli-sıralı-liste olarak oluşturulur [11].

Adım 4: Bir önceki adımda iki ötelenmiş yüzeyi de sağlayan G.E.K.N.'ları bulunmuştu. Ancak bu noktalar bellekte dağınık durumda bulunmaktadırlar ve kürenin kaynak yüzeyi oluşturmak için üzerinde yuvarlanması gereken patika eğrisini oluşturabilecek sırada değildirler. Bu dağınık noktaları sıralamak bir çözüm gibi gözükse de daha güçlü bir yöntem uygulanmıştır. Bu yöntemdeki esas amaç, bellekteki herhangi bir G.E.K.N.'sından başlayarak kesişim eğrisi boyunca belli adım mesafesiyle ilerlemek ve yeni gerçek yüzey-yüzey kesişim noktaları, G.Y.K.N., bulmaktır. Bir G.Y.K.N.'sı aşağıdaki eşitlikle tanımlanabilir:

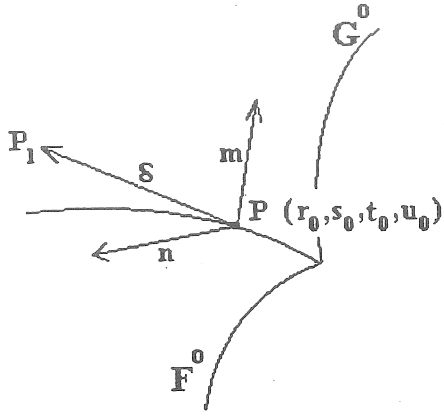
$$F^0(r, s) - G^0(t, u) = 0 \quad (6)$$

Bu G.Y.K.N.'sı bir P_1 tahmin noktası bulunarak elde edilebilir. Bu tahmin noktası iki öteleme yüzeyinin normallerinin vektörel çarpımlarıyla bulunabilir;

$$P_1 = F^0(r_0, s_0) \pm \frac{\delta (m \times n)}{|m \times n|} \quad \text{veya}$$

$$P_1 = G^0(t_0, u_0) \pm \frac{\delta (m \times n)}{|m \times n|} \quad (7)$$

Şekil 2'de gösterildiği gibi (7) eşitliğinde, δ adım mesafesi olup program tarafından otomatik olarak belirlenmektedir. \pm değeri ise patika izleme yönünü (ileri veya geri) temsil eder.



Şekil 2. Birim Normallerin Vektörel Çarpımıyla Bulunan P₁ Tahmin Noktası.

Daha sonra P₁ tahmin noktasına denk gelen her iki öteleme yüzeyinin \bar{r} , \bar{s} , \bar{t} ve \bar{u} parametrik değerleri bulunur. Bu parametrik değerlere denk gelen $B = F^0(\bar{r}, \bar{s})$ ve $D = G^0(\bar{t}, \bar{u})$ yüzey noktaları aynı noktalar değildir ve ortalama değer teoremi kullanılarak bu noktalar birbirlerine yaklaştırılarak G.Y.K.N'ları hesaplanır [11]. (7) eşitliğiyle yeni tahmin noktaları hesaplanır ve yeni G.Y.K.N'sı bulunur. Bu ilerlemeler sırasında geometrik olarak iki G.Y.K.N'sı arasında bulunan G.E.K.N'ları bilgisayar belleğinden silinir. Bellekte hiçbir G.E.K.N'sı kalmayana dek yukarıdaki işlemler tekrarlanır ve bütün kesişme eğrileri bulunur. Bu sırada kesişme eğrilerini oluşturan bütün G.Y.K.N'ları tekli-sıralı liste olarak belleğe yazılır.

Geçiş Yüzeyinin Yaratılması

Kaynaşma yüzeyi, bulunan kesişme eğrileri boyunca yaratılır. Bulunan her G.Y.K.N'sının birinci temel yüzeydeki r, s ve ikinci temel yüzeydeki t, u parametrik değerleri bilinmektedir. Böylece birinci ve ikinci temel yüzeyindeki $C_0 = F(r, s)$ ve $C_2 = G(t, u)$ noktaları bulunmaktadır. Bu noktalarda temel yüzeylere teğet olan iki düzlemin kesişim orta noktası olan C₁ noktası aşağıdaki eşitlikle hesaplanabilir [6].

$$C_1 = \frac{1}{2} [C_0 + C_2] + \frac{1}{2} \frac{1}{(m.n)^2 - 1} [(\nabla C.n)((m.n)m-n) - (\nabla C.m)((m.n)n-m)] \quad (8)$$

Burada $\nabla C = C_2 - C_0$ ve m ile n ise de C₀ ve C₂ noktalarındaki birim normalleridir.

Hesaplanan bu üç C₀, C₁ ve C₂ noktasından B-Spline eğrisi ile bir dairesel ark oluşturmak mümkündür ve bulunan bu kaynaştırma eğrisi aşağıda şöyle gösterilmiştir:

$$P(t) = \frac{(1-t)^2 C_0 + 2h_2 t(1-t) C_1 + t^2 C_2}{(1-t)^2 + 2h_2 t(1-t) + t^2} \quad 0 < t < 1 \quad (9)$$

$h_2 = \cos \theta$ olarak tanımlıdır.

Bu eşitlikler her G.Y.K.N'sı için yazılır ve herbiri için bir kaynaştırma eğrisi tanımlanır. Her kaynaştırma eğrisi istenilen sayıdaki köşe noktalarıyla temsil edilir ve komşu kaynaştırma köşe noktalarıyla bir geçiş yüzeyi oluşturacak biçimde birleştirilir.

Şekil 3-8'de, çalışmada gerçekleştirilen bazı geçiş (kaynaşma) yüzeylerine örnekler verilmiştir.

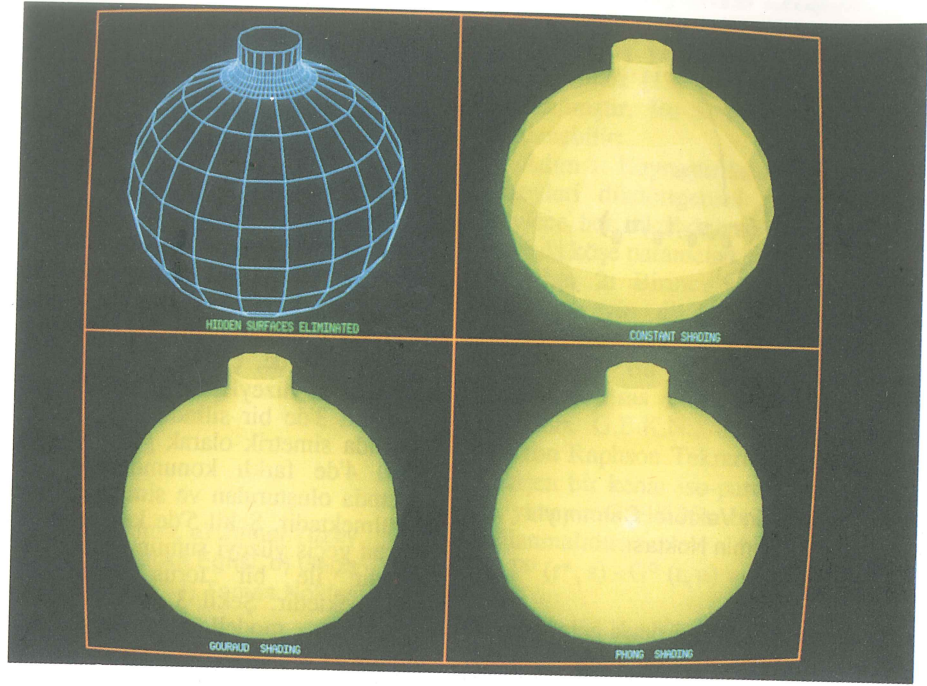
Şekil 3'de bir silindir ile bir küre temel elemanın arasında simetrik olarak geçiş yüzeyi oluşturulmuştur. Şekil 4'de farklı konumlardaki iki silindir eleman arasında oluşturulan ve simetrik olmayan geçiş yüzeyi görülmektedir. Şekil 5'de kesişmeyen iki küre arasında oluşan geçiş yüzeyi sunulmuştur. Şekil 6'da kesişen bir silindir ile bir torus arasındaki geçiş yüzeyi görülmektedir. Şekil 3 - 6'da daha önce geliştirilmiş olan katı modelleme programının [7-10], ilgili modülleri kullanılarak görünmeyen yüzeylerin elimine edilmesi ve üç değişik yöntemle (Sabit, Gourand ve Phong) [9] tonlanmış ve gölgelendirilmiş görüntüler sağlanmıştır. Şekil 7'de kesişen bir silindir ile koni arasında oluşan iki geçiş yüzeyi görülürken, Şekil 8'de de bir silindir ile koni arasında geçiş yüzeyi sunulmuştur. Şekil 7 ve 8'de görünmeyen yüzeyler elimine edilmeden tel kafes görüntüler verilmiştir. Şekil 1-7'de geçiş yüzeyi kapalıyken Şekil 8'de ise açık geçiş yüzeyi görülmektedir.

SONUÇ

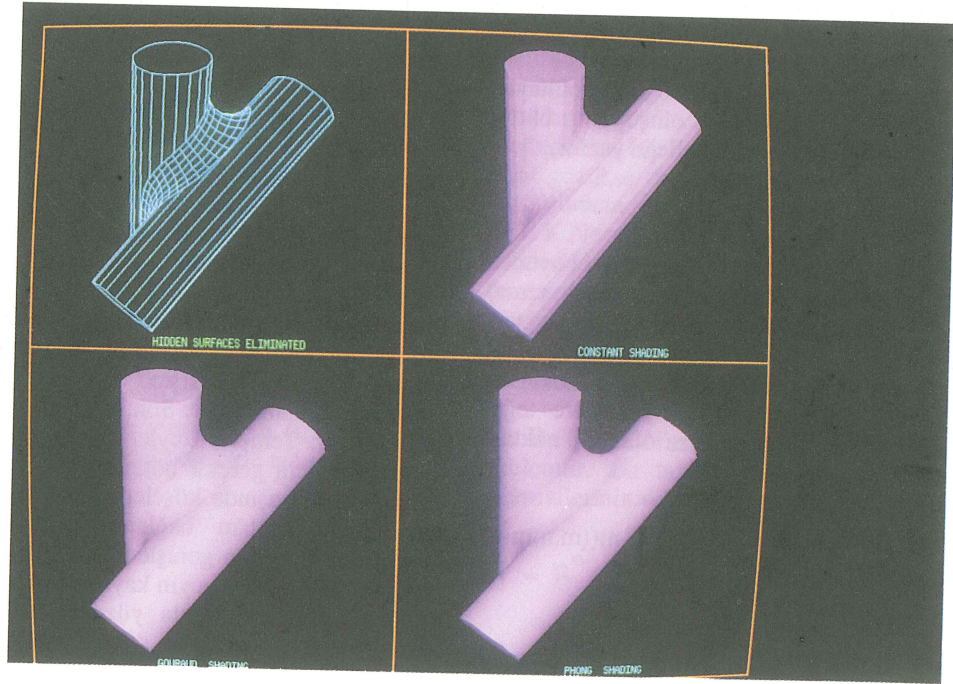
Bu çalışmada iki temel mühendislik yüzeyinin kenar kaynaşmasını sağlamak için sabit çaplı küreyle kenar kaynaştırma tekniği kullanılmıştır. Çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel yüzeylerin parametrik olarak tanımlanması sağlanmıştır. İkinci bölüm bu temel yüzeylerin parametrik ötelenmiş yüzeylerini bulmaya yöneliktir. Üçüncü bölümde iki parametrik yüzeyin kesişme eğrilerini bulmak için bir algoritma kullanılmıştır. Son bölümde ise geçiş yüzeyi yaratılmıştır. Temel yüzeyler ve geçiş yüzeyleri yüzey modelleme için gerekli bütün bilgileri taşımaktadırlar. Bu bilgilerin başında köşelerin, kenarların ve yüzlerin birbirleriyle sağlam bağlantı bilgileri gelmektedir. Geliştirilen program genişletilebilir bir yapıya sahiptir. Program iki temel yüzeyin kaynaşmasını sağlayabilecek niteliktedir. Birden fazla yüzeyin kaynaştırılabilmesi ilerde kullanılacak daha karışık yöntemlerle sağlanabilir.

TEŞEKKÜR

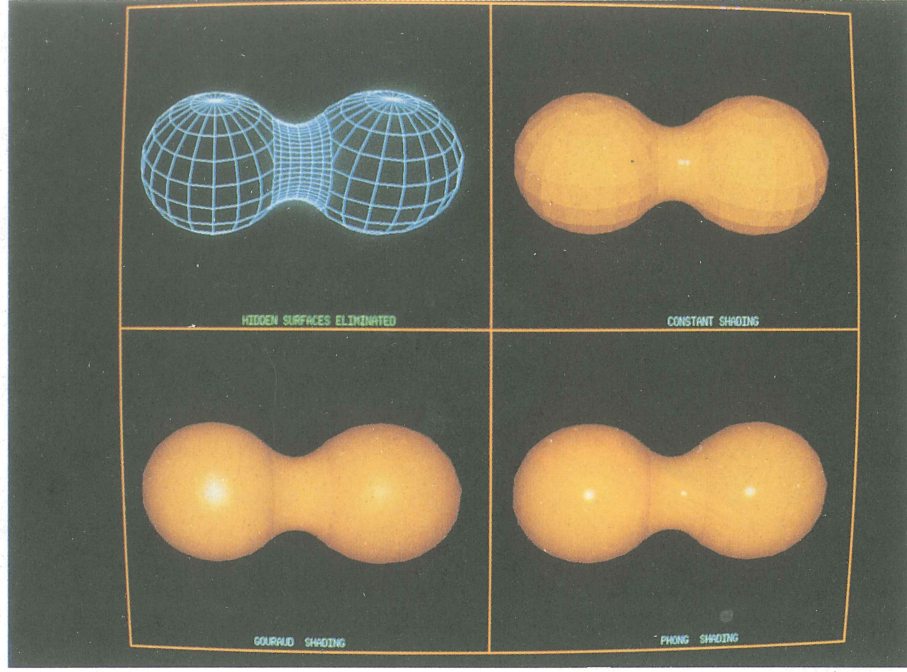
Yazarlar, çalışma sırasında yazılım ve donanım desteğini veren ODTÜ-BİLTİR Merkezine teşekkür eder.



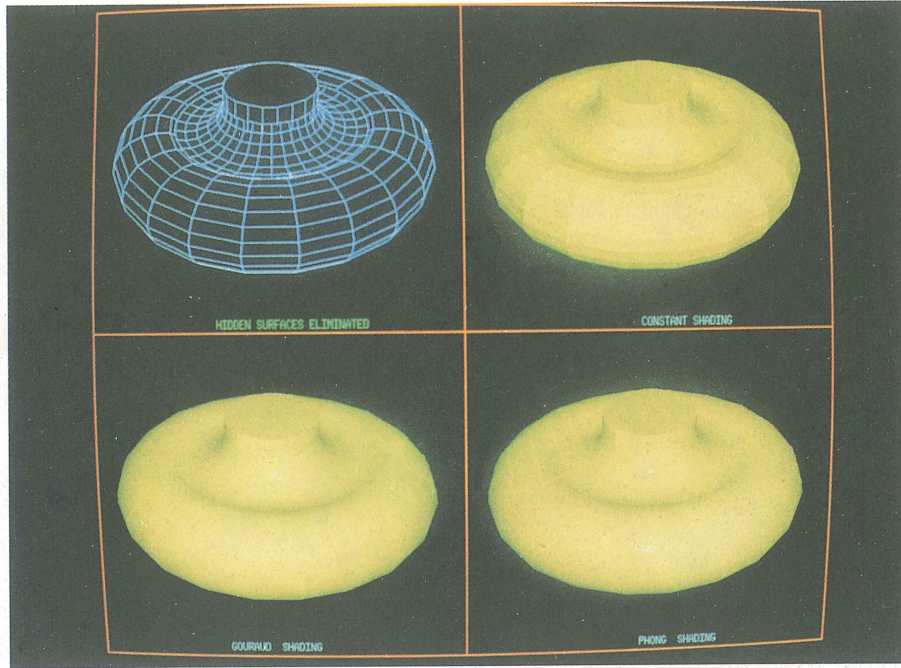
Şekil 3. Bir Silindir ve Bir Küre Arasında Geçiş Yüzeyi Oluşturma.



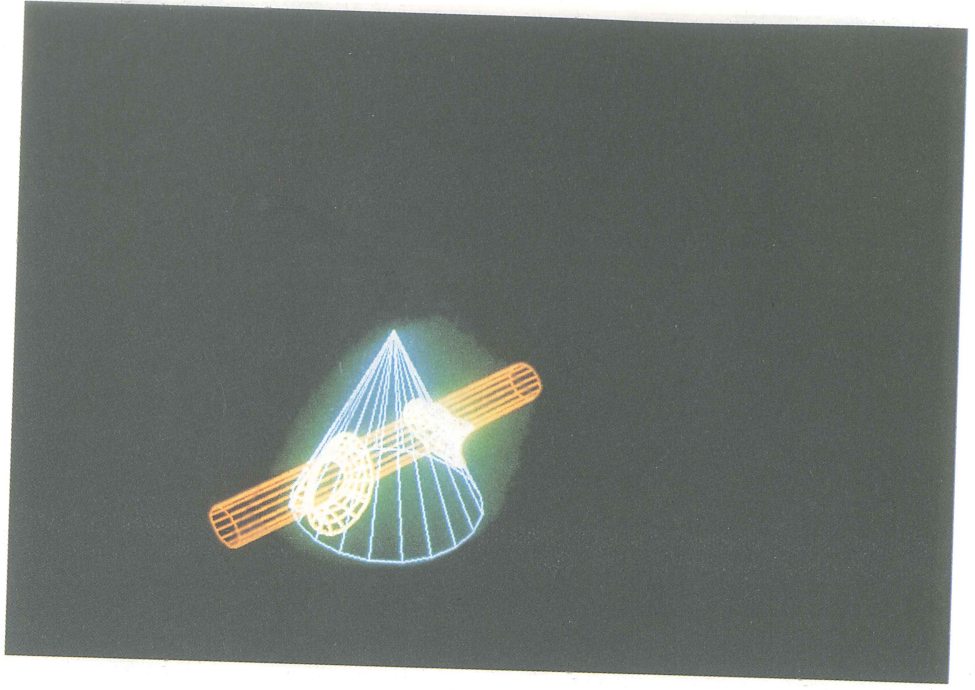
Şekil 4. İki Silindir Arasında Geçiş Yüzeyi Oluşturma.



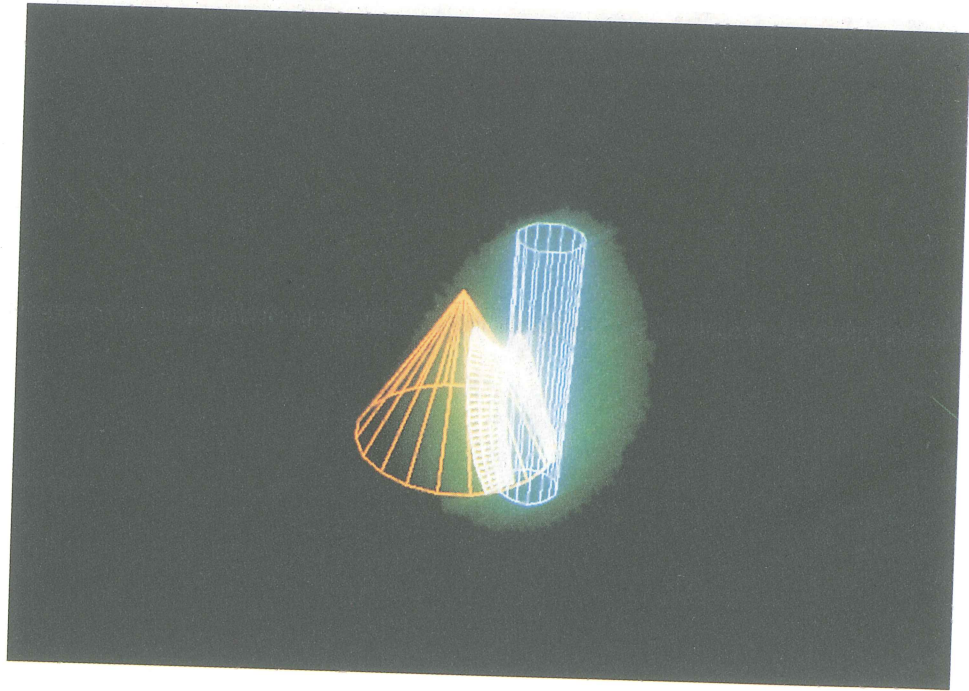
Şekil 5. Kesişmeyen İki Küre Arasında Geçiş Yüzeyi Oluşturma.



Şekil 6. Bir Silindir ve Bir Torus Arasında Geçiş Yüzeyi Oluşturma.



Şekil 7. Kesişen Bir Koni ile Silindir Arasında İki Geçiş Yüzeyi Oluşturma.



Şekil 8. Bir Silindir ile Koni Arasında Açık Geçiş Yüzeyi Oluşturma.

BLENDING IN SURFACE MODELLING

In this study, an edge blending technique using the constant radius ball blending method, is implemented to connect surfaces smoothly to be used in modelling for Computer-Aided Design and Computer-Aided Manufacturing applications. By using this technique, two parametrically defined surfaces can be blended by inspecting the intersection curves of the offsets of these surfaces.

KAYNAKÇA

1. Li, J., Hoschek, J. and Hartmann, E., Gn-1 - Functional Splines for Interpolation and Approximation of Curves, *Surfaces and Solids, Computer Aided Geometric Design*, 7 (1990), 209-220.
2. Hartmann, E., Blending of Implicit Surfaces with Functional Splines, *Computer Aided Design*, 22 (Oct. 1990) 8, 500-506.
3. Hoffmann, C. and Hopcraft, J., Quadratic Blending Surfaces, *Computer Aided Design*, 18 (July/August 1986) 6, 301-306.
4. Rossignac, J.R. and Requicha A.A.G., Constant Radius Blending in Solid Modelling, *Computers in Mechanical Engineering*, July (1987), 171-189.
5. Klass, R. and Kuhn, B., Fillet and Surface Intersections Defined by Rolling Balls, *Computer Aided Geometric Design*, 9 (1992), 185-193.
6. Choi, B.K. and Ju, S.Y., Constant Radius Blending in Surface Modelling, *Computer Aided Design*, 19 (May 1989) 4, 213-220.
7. Mumcuoğlu, A., Algorithms for Regularized Set Operations on Solid Objects, *Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Bilgisayar Mühendisliği Bölümü*, 1990.
8. Çanga, M., Union, Intersection and Difference in Solid Modelling Applications, *Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Makina Mühendisliği Bölümü*, 1990.
9. Ünal, A., Hidden-Surface Elimination and Shading Techniques in Solid Modelling, *Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Makina Mühendisliği Bölümü*, 1991.
10. Özçelik, C., Sweep-based Primitive Creation in Solid Modelling, *Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Makina Mühendisliği Bölümü*, 1991.
11. Özbal, C., Blending in Surface Modelling, *Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Makina Mühendisliği Bölümü*, 1995.
12. Rossignac, J.R. and Requicha, A.G., Offsetting Operations in Solid Modelling, *Computer Aided Geometric Design*, 3 (1986), 129-148.
13. Barnhill, R.E., Farin, G., Jordan, M. and Piper, B.R., Surface/Surface Intersections, *Computer Aided Geometric Design*, 4 (1987), 3-16.