ISSN 2757-5543 **GÜFFD 6. Cilt (2): 256-264 (2025)** DOI: 10.63716/guffd.1719360

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi
https://dergipark.org.tr/tr/pub/guffd

$(2, J)$-İdeallerin Genelleştirilmesi Üzerine Bazı Notlar

Eda Yıldız

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 34220, İstanbul, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Bu çalışmada $(2, J)$-idealleri genelleştirilerek yeni bir ideal sınıfı tanımlanmıştır.
- Bu yeni ideal sınıfının bilinen diğer ideal türleriyle olan hiyerarşik ilişkileri verilmiştir.
- Bu yeni ideal sınıfının temel halka işlemleri altındaki davranışları analiz edilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 13/06/2025
Kabul: 07/11/2025

Anahtar Kelimeler

φ -$(2, J)$-ideal,
$(2, J)$-ideal,
φ -ideal,
Jacobson Radikali,
Değişmeli Halka

Öz

Değişmeli halka teorisindeki asal idealler ve genellemeleri, önemli araştırma konularındandır. Bu çalışma, mevcut $(2, J)$-idealler ve φ-asal idealler kavramlarını birleştirerek yeni bir sınıf olan φ-$(2, J)$-idealleri tanımlamakta ve temel cebirsel yapılarını incelemektedir. R değişmeli bir halka, I öz ideali ve $\varphi: I(R) \rightarrow I(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon olmak üzere, $abc \in I \setminus \varphi(I)$ iken $ab \in I$ veya $ac \in Jac(R)$ veya $bc \in Jac(R)$ koşulunu sağlayan I idealine φ-$(2, J)$-ideal denir. Bu tanım, $(2, J)$-idealleri ve φ-J-idealleri genelleştirmektedir. Makalede, φ - $(2, J)$-ideallerin karakterizasyonları, literatürdeki diğer ideal türleriyle ilişkileri ve kesişim, homomorfik görüntü, bölüm halkası, yerelleştirme ve idealizasyon gibi temel halka işlemleri altındaki davranışları analiz edilmektedir. Elde edilen sonuçlar, değişmeli halka teorisindeki ideal sınıflandırmalarına katkı sunmayı ve bu yeni yapının ileri araştırmalar için zemin oluşturmasını amaçlamaktadır.

Some Notes on the Generalization of $(2, J)$-Ideals

Highlights

- In this study, a new class of ideals is defined by generalizing $(2, J)$-ideals.
- The hierarchical relationships of this new ideal class with other known ideal types are established.
- The behavior of this new ideal class under fundamental ring-theoretic operations is analyzed.

Article Info

Received: 13/06/2025
Accepted: 07/11/2025

Keywords

φ -$(2, J)$-ideal,
$(2, J)$-ideal,
φ -ideal,
Jacobson Radical,
Commutative Ring

Abstract

Prime ideals and their generalizations are a significant research area in commutative ring theory. This work introduces and investigates the fundamental algebraic structure of a new class of ideals, called φ-$(2, J)$-ideals, by generalizing the concepts of $(2, J)$-ideals and φ-prime ideals. Let R be a commutative ring, I a proper ideal of R, and $\varphi: I(R) \rightarrow I(R) \cup \{\emptyset\}$ a function. Then I is called a φ-$(2, J)$-ideal if for any $a, b, c \in R$ with $abc \in I \setminus \varphi(I)$, the condition $ab \in I$ or $ac \in Jac(R)$ or $bc \in Jac(R)$ holds. This definition generalizes both $(2, J)$-ideals and φ-J-ideals. The paper provides characterizations of φ-$(2, J)$-ideals, explores their relationships with other ideal classes in the literature, and analyzes their behavior under fundamental ring-theoretic operations such as intersections, homomorphic images, quotient rings, localization and idealization. The results obtained aim to contribute to the classification of ideals in commutative ring theory and to provide a foundation for further research on this new structure.

GÜFFD
GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Eda Yıldız, edyildiz@yildiz.edu.tr

1. GİRİŞ

Makale boyunca R sıfırdan farklı birimli değişmeli halka ve M sıfırdan farklı birimli R-modüldür. R halkasının kendisinden farklı bir ideali R'nin öz ideali olarak adlandırılır. R halkasının tüm idealleri kümesi $I(R)$ ile gösterilir. R halkasının tüm maksimal ideallerinin kesişimi olan R'nin Jacobson radikali $Jac(R)$, tüm asal ideallerin kesişimi olan nil radikal $N(R)$ ile gösterilir.

Değişmeli cebirdeki temel yapı taşlarından biri asal ideallerdir. Cohen Teoremi gibi bazı teoremler halkanın tüm idealleri yerine sadece asal idealleri yorumlamanın halka hakkında bazı bilgiler vermesi mümkün olabileceğini gösterir. Bu nedenle de asal idealler ve onların genellemeleri seneler boyunca yazarların ilgi odağı olmuştur. Son dönemdeki gelişmeler, bu genelleme çabalarını iki ana eksende yoğunlaştırmıştır: Birincisi, nil radikal, Jacobson radikali gibi halkaya özgü temel yapılarla ideallerin etkileşimini dikkate alan n-idealler ve J-idealler gibi kavramlar; ikincisi ise, ideallerin davranışlarını bir φ fonksiyonu aracılığıyla modüle eden ve böylece daha genel tanımlamalara imkan veren φ-ideallerdir.

Badawi, 2007 yılında, asal ideallerin bir genellemesi olarak 2-yutan ideal kavramını tanımlamış ve bunları Dedekind bölgelerini karakterize etmek için kullanmıştır. R halkasının sıfırdan farklı bir I öz ideali için, eğer $a, b, c \in R$ olmak üzere $abc \in I$ olması $ab \in I$ veya $ac \in I$ veya $bc \in I$ koşulu sağlıyorsa, I idealine bir 2-yutan ideal denir [1]. 2-yutan idealler kavramı ve genellemeleri büyük bir ilgi çekmiş ve birçok makalede incelenmiştir [2-4]. Daha sonra, Badawi ve arkadaşları çalışmalarında 2-yutan asalımsı ideal kavramını şu şekilde tanıtmışlardır: R halkasının bir I öz ideali için, eğer $abc \in I$ ise, o hâlde ya $ab \in$ I ya $ac \in \sqrt{I}$ ya da $bc \in \sqrt{I}$ koşulu sağlanıyorsa, I idealine bir 2-yutan asal ideal denir [2]. 2021 yılında ise Yassine ve arkadaşları asal ideallerden daha genel, 2-yutan ideallerden ise daha özel bir sınıf olan 1-yutan asal ideal kavramını tanıttılar [5]. I, R halkasının bir öz ideali ve $a, b, c \in R$ birimsel olmayan elemanlar olmak üzere $abc \in I$ olduğunda $a \in I$ veya $bc \in I$ oluyorsa I idealine R'nin 1-yutan asal ideali adı verilir. Yazarlar bu yeni tip idealin özelliklerini inceleyip Asallardan Kaçınma Teoremi gibi Değişmeli Cebirdeki önemli bir sonucun bu idealleri kullanarak yeni bir versiyonunu vermişlerdir. Yine aynı sene Yıldız ve arkadaşları 1-yutan ideallerin genellemesi olarak ideallerin bir φ fonksiyonunu kullanarak φ-1-yutan asal ideal tanımını yapmışlardır [6]. Daha sonra da bazı yapılarda bu ideallerin davranışlarını incelemişlerdir. Sonraki senelerde ideallerin φ fonksiyonu kullanarak genellenmesi çalışılmaya devam edilmiştir [7]. Khashan ve Bani-Ata J-ideal olarak adlandırılan özel bir ideal ailesini tanıttılar [8]. I, R halkasının bir öz ideali, $a, b \in R$ iken $ab \in I$ olması $a \in I$ veya $b \in Jac(R)$ olmasını sağlıyorsa I idealine R halkasının bir J-ideali denir. Aslında bu yeni ideal sınıfı Tekir ve arkadaşları tarafından 2017'de tanımlanan n-ideallerinin bir genellemesiydi. Yazarlar J-idealleri tanıttıktan sonra birçok özelliğini verip bu ideal sınıfının daha önceden bilinen asalımsı, asal, maksimal ideal gibi ideal sınıflarıyla ilişkilerini araştırmışlardır. Ayrıca daha genel olarak J-modülleri de tanımlamışlardır. 2020 yılında ise Yıldız ve arkadaşları J-ideallerinin bir genellemesi olarak $(2, J)$-idealleri tanımladılar [9]. I, R halkasının bir öz ideali, $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ olduğunda $ab \in I$, $ac \in Jac(R)$ veya $bc \in Jac(R)$ oluyorsa I ya R halkasının bir $(2, J)$-ideali denir. Yazarlar bu yeni ideal sınıfının birçok özelliğini araştırdıktan sonra bu özellikleri yarı lokal ve Artin halkaları gibi bazı halkaları karakterize etmek için kullandılar. Örneğin; halkanın yarı lokal olması için gerek ve yeter koşul her öz idealinin $(2, J)$-ideali olmasıdır. Çok kısa bir süre önce ise de yazarlar zayıf $(2, J)$-ideal kavramını tanıttılar [10]. I, R halkasının bir öz ideali, $a, b, c \in R$ için $0 \neq abc \in I$ iken $ab \in I$, $ac \in Jac(R)$ veya $bc \in Jac(R)$ oluyorsa I ya zayıf $(2, J)$-ideal adı verilir. Bu ideal sınıfının $(2, J)$-ideal sınıfından daha zayıf bir koşul olduğu için böyle adlandırıldığı açıktır. Yazarlar zayıf $(2, J)$-ideallerin temel özelliklerini inceleyip daha sonra da birleştirilmiş halkaların zayıf $(2, J)$-ideallerini karakterize ettiler. Bu yolla ise bu özel sınıfın aşikar olmayan bazı örneklerini inşa ettiler. Biz ise bu tanımdan yola çıkarak $(2, J)$-idealleri, idealler arasındaki bir φ-fonksiyonunu kullanarak genelledik. $\varphi: I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere, I, R halkasının bir öz ideali, $a, b, c \in R$ için $abc \in I \setminus \varphi(I)$ iken $ab \in I$, $ac \in Jac(R)$ veya $bc \in Jac(R)$ oluyorsa I ya φ-$(2, J)$-ideal adı verilir. Burada $\varphi(I) = 0$ olarak alınırsa bu tanım zayıf $(2, J)$-ideal tanımına dönüşür. Bu tanım hem $(2, J)$-ideallerin hem de φ-J-ideallerin bir genellemesi olarak düşünülebilir.

Bu makalenin temel amacı, φ -$(2, J)$-ideallerinin cebirsel yapısını sistematik bir şekilde incelemek, varlık koşullarını, temel özelliklerini ve çeşitli karakterizasyonlarını ortaya koymaktır. Çalışmamız, bu yeni ideal sınıfının, $(2, J)$-idealler, φ-J-idealler ve ilgili diğer φ-genellemeleri gibi literatürdeki yerleşik ideal kavramlarıyla olan teorik bağlantılarını ve hiyerarşik ilişkilerini detaylı bir analize tabi tutacaktır. Özellikle, φ-$(2, J)$-ideallerinin temel halka teorik işlemleri - homomorfik görüntüler, bölüm halkalarına geçiş ve yerelleştirme, kartezyen çarpım- altındaki davranışları titizlikle incelenecek ve bu işlemlerin idealin φ-$(2, J)$ karakterini nasıl etkilediği belirlenecektir. Bu yeni ideal sınıfının, değişmeli halka teorisindeki mevcut sınıflandırma şemalarına katkıda bulunacağı ve φ-$(2, J)$-ideallerin daha ileri düzeydeki yapısal çalışmalara zemin hazırlayacağı öngörülmektedir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Aşağıdaki tanım [9]'daki tanımın genel versiyonu ve [11]'deki kavramın özel bir durumu olarak düşünülebilir. Çalışmamızın temel katkısı özel durumun kendine has yapısal zenginliklerini kullanarak, genel n durumu için anlamlı olmayan veya doğrudan türetilemeyecek, özgün ve derin sonuçlar ortaya koymasıdır. Bilimsel katkımız, sadece genel bir tanımın bir örneğini sunmak değil, bu özel durumun iç dinamiklerini ve literatürdeki diğer ideal sınıflarıyla olan karmaşık ilişkilerini ortaya çıkarmaktır.

Tanım 1. R bir halka ve I, R'nin bir öz ideali olsun. Eğer $a, b, c \in R$ ve $abc \in I \setminus \varphi(I)$ olduğunda $ab \in I$ veya $ac \in Jac(R)$ veya $bc \in Jac(R)$ koşulu sağlanıyorsa, I'ya bir φ-$(2, J)$-ideal denir.

Tanım 2. R bir halka ve I, R'nin bir öz ideali olsun. Eğer $a, b \in R$ ve $ab \in I \setminus \varphi(I)$ olduğunda $a \in I$ veya $b \in Jac(R)$ koşulu sağlanıyorsa, I'ya bir φ-J-ideal denir.

Örnek 1. R bir halka ve $\varphi_\alpha \ : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler, φ_α ya karşılık gelen φ-$(2, J)$ ideal türlerini vermektedir.

$\varphi_\emptyset$	$\varphi(I) = \emptyset$	$(2, J)$-ideal
φ_0	$\varphi(I) = (0)$	zayıf $(2, J)$-ideal
φ_2	$\varphi(I) = I^2$	neredeyse $(2, J)$-ideal
φ_n	$\varphi(I) = I^n$	n-neredeyse $(2, J)$-ideal
φ_w	$\varphi(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$	w-$(2, J)$-ideal
φ_1	$\varphi(I) = I$	herhangi bir ideal

$\varphi, \psi : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ iki fonksiyon olsun. O hâlde, R'nin tüm I idealleri için $\varphi(I) \subseteq \psi(I)$ ise $\varphi \leq \psi$ olur. Ayrıca, $\varphi_\emptyset \leq \varphi_0 \leq \varphi_w \leq \dots\dots \leq \varphi_{n+1} \leq \varphi_n \leq \dots \leq \varphi_2 \leq \varphi_1$ dir.
Bu makale boyunca $\varphi(I) \subseteq I$ olduğunu varsayacağız.

3. BULGULAR

φ - $(2, J)$-ideallerle ilgili aşağıdaki önermeler sağlanır.

Önerme 1.

(i) Her $(2, J)$-ideal bir φ-$(2, J)$-idealdir.

(ii) Her φ-J-ideal bir φ-$(2, J)$-idealdir.

(iii) Her φ-$(2, n)$-ideal bir φ-$(2, J)$-idealdir.

(iv) Her zayıf $(2, J)$-ideal bir φ-$(2, J)$-idealdir.

(v) Eğer $\varphi, \psi : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ iki fonksiyon olup $\varphi \leq \psi$ ise, o hâlde her φ-$(2, J)$-ideal bir ψ-$(2, J)$-idealdir.

(vi) I bir $(2, J)$-ideal $\Rightarrow I$ bir zayıf $(2, J)$-ideal $\Rightarrow I$ bir $w - (2, J)$-ideal $\Rightarrow I$ bir m-neredeyse (almost) $(2, J)$-ideal $\Rightarrow I$ bir neredeyse (almost) $(2, J)$-idealdir.

Yukarıdaki ifadelerin tersleri doğru değildir.

Örnek 2. $R = \mathbb{Z}_{42}$ ve $I = (\bar{0})$ alalım. O hâlde I nın bir φ_n-$(2, J)$ ideal olduğu açıktır. $2.3.7 \in I$ ancak $2.3 \notin I, 2.7 \notin Jac(\mathbb{Z}_{42})$ ve $3.7 \notin Jac(\mathbb{Z}_{42})$ olduğundan I bir $(2, J)$-ideal değildir.

Örnek 3. k bir cisim, $R = k[[X]]$ formal kuvvet serisi halkasını ele alalım. Burada $Jac(k[[X]]) = (X)$ ve $N(k[[X]]) = (0)$. Şimdi $I = (X^4)$ idealini alalım. I bir φ_2-$(2, J)$-idealdir. Ancak $X.X.X^2 = X^4 \in I \setminus I^2$ olmasına rağmen $X^2 \notin I, X^3 \notin N(k[[X]])$ olduğundan φ_2-$(2, n)$-ideal değildir.

Önerme 2. R bir halka, $\varphi : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon ve $\{I_i\}_{i \in \Omega}$ bir $\varphi - (2, J)$-idealler ailesi olsun.

(i) Eğer φ kapsamayı tersine çeviriyorsa, o hâlde $\bigcap_{i \in \Omega} I_i$ bir φ-$(2, J)$-idealdir.

(ii) Eğer φ kapsamayı koruyorsa ve $\{I_i\}_{i \in \Omega}$, φ-$(2, J)$-ideallerin artan bir zincir koleksiyonu ise, o hâlde $\bigcup_{i \in \Omega} I_i$ bir $\varphi - (2, J)$-idealdir.

İspat. [2] numaralı makaledeki Önerme 2.4'e benzer olarak ispatlanabilir. □

$f: R \to R'$ bir halka homomorfizması ve $\varphi_{R'} : I(R') \to I(R') \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon olsun. $\varphi_R : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonunu $\varphi_R(I) = \varphi_{R'}(I^e)^c$ olarak tanımlayalım ve eğer $\varphi_{R'}(I^e) = \emptyset$ ise $\varphi_R(I) = \emptyset$ olsun. Şimdi iki farklı halkanın idealleri arasındaki ilişkiyi kuran bu fonksiyon yardımıyla, bir φ-$(2, J)$-idealin ters görüntüsünün de yine bir φ-$(2, J)$-ideal olacağını gösterelim.

Teorem 1. $f: R \to R'$ örten bir halka homomorfizması olsun. Eğer K, R' halkasının bir $\varphi_{R'}$-$(2, J)$-ideali ve $Kerf \subseteq Jac(R)$ ise, o hâlde $f^{-1}(K)$, R halkasının bir φ_R-$(2, J)$-idealidir.

İspat. $ac, bc \notin Jac(R)$ olmak üzere $abc \in f^{-1}(K) \setminus \varphi_R(f^{-1}(K))$ olsun. O hâlde $f(a)f(b)f(c) \in K$ olur. $f(a)f(b)f(c) \in \varphi_{R'}(K)$ olduğunu varsayalım. O hâlde $abc \in (\varphi_{R'}(K))^c \subseteq (\varphi_{R'}(K^{ce}))^c = \varphi_R(K^c) = \varphi_R(f^{-1}(K))$ olur, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $f(a)f(b)f(c) \in K \setminus \varphi_{R'}(K)$ olur. K bir $\varphi_{R'}$-$(2, J)$-ideal olduğundan, $f(a)f(b) \in K$ veya $f(b)f(c) \in Jac(R')$ veya $f(a)f(c) \in Jac(R')$ olur. f örten ve $Kerf \subseteq Jac(R)$ olduğundan $f^{-1}(Jac(R')) = Jac(R)$. Böylece $f(b)f(c) \in Jac(R')$ veya $f(a)f(c) \in Jac(R')$ olduğunda $bc \in Jac(R)$ veya $ac \in Jac(R)$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $f(b)f(c) \notin Jac(R')$ ve $f(a)f(c) \notin Jac(R')$ olur. O hâlde $f(a)f(b) \in K$ olur. Bu da $ab \in f^{-1}(K)$ verir ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

Bu teoremdeki $Kerf \subseteq Jac(R)$ şartının önemi aşağıdaki örnekle daha iyi anlaşılabilir.

Örnek 4. $f(a) = \bar{a}$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{12}$ homomorfizmasını ele alalım. Burada $Kerf \nsubseteq Jac(\mathbb{Z})$ olduğu açıktır. Ayrıca $Jac(\mathbb{Z}_{12}) = (\bar{6})$ dır. $\varphi_{\mathbb{Z}_{12}}(I) = (\bar{0})$ ve $K = (\bar{0})$ alalım. O hâlde K bir $\varphi_{\mathbb{Z}_{12}}$-$(2, J)$-idealdir. Ancak $f^{-1}(K) = 12\mathbb{Z}$ bir $\varphi_{\mathbb{Z}}$-$(2, J)$-ideal değildir.

Şimdi ise aynı fonksiyon yardımıyla bir φ-$(2, J)$-idealin homomorfik görüntüsünün de yine bir φ - $(2, J)$-ideal olacağını görelim.

Teorem 2. Eğer $f : R \to R'$ örten bir halka homomorfizması ve I, R halkasının $Kerf \subseteq I$ koşulunu sağlayan bir φ_R-$(2,J)$-ideali ise, o hâlde $f(I)$, R' halkasının bir $\varphi_{R'}$-$(2,J)$-idealidir.

İspat. $a'b'c' \in f(I) \setminus \varphi_{R'}(f(I))$ ve $a'c'$, $b'c' \notin Jac(R')$ olsun. f örten olduğundan, $a' = f(a)$, $b' = f(b)$ ve $c' = f(c)$ olacak şekilde $a, b, c \in R$ vardır. O hâlde $Kerf \subseteq I$ olduğundan, $abc \in I$ olur. Şimdi $abc \in \varphi_R(I)$ olduğunu varsayalım. O hâlde $a'b'c' = f(a)f(b)f(c) = f(abc) \in f(\varphi_R(I)) = \varphi_{R'}(f(I))$ olur, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $abc \in I \setminus \varphi_R(I)$ olur. I, R halkasının bir φ_R-$(2,J)$-ideali olduğundan, $ab \in I$ veya $ac \in Jac(R)$ veya $bc \in Jac(R)$ olur. Eğer $ac \in Jac(R)$ ise, o hâlde $f(ac) = f(a)f(c) = a'c' \in f(Jac(R))$ olur. f örten olduğundan, $f(Jac(R)) \subseteq Jac(R')$ olur. Yani $a'c' \in Jac(R')$ elde edilir, bu $a'c' \notin Jac(R')$ ile çelişir. Eğer $bc \in Jac(R)$ ise, o hâlde $f(bc) = f(b)f(c) = b'c' \in f(Jac(R)) \subseteq Jac(R')$ olur. Yani $b'c' \in Jac(R')$ olur, bu $b'c' \notin Jac(R')$ ile çelişir. Dolayısıyla, $ab \in I$ olmalıdır. Bu ise $a'b' \in f(I)$ anlamına gelir. Yani $f(I)$ bir $\varphi_{R'}$-$(2,J)$-idealdir. □

R bir halka, K, R halkasının bir ideali, $\varphi : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon olsun. $\varphi_K : I(R/K) \to I(R/K) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonunu, $K \subseteq J$ olan $J \in I(R)$ için $J/K \to (\varphi(J) + K)/K$ olarak tanımlayalım ve eğer $\varphi(J) = \emptyset$ ise $\varphi_K(J/K) = \emptyset$ olsun. Şimdi ise R halkasının ve onunla oluşturulan bölüm halkasının idealleri arasındaki bu geçişi kullanarak φ-$(2,J)$-idealleri ile oluşturulan kesir halkalarının ideallerinin de belirli koşullar altında φ-$(2,J)$-ideal olmayı koruduğunu göstereceğiz.

Teorem 3. Aşağıdakiler geçerlidir.

(1) Eğer I, R halkasının $K \subseteq I$ koşulunu sağlayan bir φ-$(2,J)$-ideali ise, o hâlde I/K, R/K bölüm halkasının bir φ_K-$(2,J)$-idealidir.

(2) Eğer I, R halkasının $K \subseteq I$ ve $\varphi(I) \subseteq K$ koşullarını sağlayan bir φ-$(2,J)$-ideali ise, o hâlde I/K, R/K bölüm halkasının bir zayıf $(2,J)$-idealidir.

(3) Eğer $K \subseteq I$, I/K, R/K bölüm halkasının bir φ_K-$(2,J)$-ideali, $K \subseteq \varphi(I)$ ve $K \nsubseteq Jac(R)$ ise, o hâlde I, R halkasının bir φ-$(2,J)$-idealidir.

İspat. [2]'de Teorem 2.10 un özel hali olarak ispatlanabilir. □

R bir halka ve S, R halkasının bir çarpımsal kapalı altkümesi olsun. $\varphi : I(R) \to I(R) \cup \{0\}$ bir fonksiyon ve $\varphi_S : I(S^{-1}R) \to I(S^{-1}R) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonu $S^{-1}J \to S^{-1}(\varphi(S^{-1}J \cap R))$ olarak tanımlansın (burada J, R'nin bir idealidir) ve eğer $\varphi(S^{-1}J \cap R) = \emptyset$ ise $\varphi_S(S^{-1}J) = \emptyset$ olsun.

Teorem 4. R bir halka ve $\varphi : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer I, R halkasının bir φ-$(2,J)$-ideali, S, R halkasının $I \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir çarpımsal kapalı altkümesi ve $S^{-1}\varphi(I) \subseteq \varphi_S(S^{-1}I)$ ise, o hâlde $S^{-1}I$, $S^{-1}R$ halkasının bir φ_S-$(2,J)$-idealidir.

İspat. [2]'de Önerme 2.11'de $n = 2$ alınarak ispatlanır. □

Aşağıdaki örnek yukarıdaki teoremin tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 5. $R = \mathbb{Z}[x]$, $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ve $I = (6x)$ olsun. İdeallerin bir fonksiyonu olarak R'nin herhangi bir K ideali için $\varphi(K) = 2K$ olarak tanımlayalım. Burada $2.3.x \in I \setminus \varphi(I)$ olup $6 \notin I$, $2x \notin Jac(\mathbb{Z}[x]) = (0)$ ve $3x \notin Jac(\mathbb{Z}[x]) = (0)$ olduğu için I, $\mathbb{Z}[x]$ halkasının bir φ-$(2,J)$-ideali değildir. Burada $S \cap I = \emptyset$ olduğu açıktır. O hâlde $S^{-1}R = \mathbb{Q}[x]$ olur. Ayrıca $S^{-1}Jac(R) = S^{-1}(0) = (0) = Jac(S^{-1}R) = (0)$, $S^{-1}\varphi(I) = S^{-1}(12x) = (x)$ ve $\varphi_S(S^{-1}I) = S^{-1}\varphi(I) = (x)$ olup teoremdeki şartlar sağlanır. Şimdi ise $S^{-1}I$ idealinin $\mathbb{Q}[x]$ halkasının bir φ_S-$(2,J)$-ideal olduğunu gösterelim. $S^{-1}I = S^{-1}(6x) = (6x)S^{-1}R = (6x)\mathbb{Q}[x] = (x)$. O hâlde $\varphi_S(S^{-1}I) = (x)$ olduğu için istenen sonuç otomatik olarak sağlanmış olur.

Önerme 3. R,T iki halka öyle ki T, R'nin bir integral genişlemesi olsun. $\varphi : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ ve $\psi : I(T) \to I(T) \cup \{\emptyset\}$ iki fonksiyon olup her $I \in I(R)$ için $\varphi(I) = \psi(I)$ olsun. Eğer φ kapsamayı tersine çeviriyorsa ve P,T'nin bir ψ-$(2,J)$-ideali ise, o hâlde $P \cap R$, R'nin bir φ-$(2,J)$-idealidir.

İspat. $ac \notin Jac(R)$ ve $bc \notin Jac(R)$ olmak üzere $abc \in (P \cap R) \setminus \varphi(P \cap R)$ olsun. Burada T, R nin bir integral genişlemesi olduğu için $Jac(R) = Jac(T) \cap R$ olur. $P \cap R \subseteq P$ olduğu için $\varphi(P) \subseteq \varphi(P \cap R)$. Varsayım $\varphi(I) = \psi(I)$ olduğu için $\varphi(P \cap R)$ yerine $\psi(P \cap R)$ kullanılabilir. Dolayısıyla $abc \in P \setminus \psi(P)$. Eğer $abc \in P \setminus \psi(P)$ ve $ac \notin Jac(T)$, $bc \notin Jac(T)$ ise $ab \in P$. O hâlde $ab \in P \cap R$. □

Tanım 3. R bir halka ve I, R'nin bir φ-$(2,J)$-ideali olsun. Eğer $a,b,c \in R$ ve $abc \in \varphi(I)$ ama $ab \notin I$, $ac \notin Jac(R)$, $bc \notin Jac(R)$ ise (a,b,c) üçlüsüne I'nın bir φ-J-kritik üçlüsü denir.

Önerme 4. R bir halka, I, R'nin bir öz ideali öyle ki $\varphi(I)$ bir J-ideal olsun. O hâlde I'nın bir φ-$(2,J)$-ideal olması için gerek ve yeter koşul I'nın bir $(2,J)$-ideal olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $ac, bc \notin Jac(R)$ olmak üzere $abc \in I$ olsun. Eğer $abc \neq \varphi(I)$ ise, I bir φ-$(2,J)$-ideal olduğu için $ab \in I$. Şimdi $abc \in \varphi(I)$ olduğunu varsayalım. $\varphi(I)$ bir J-ideal olduğu için (ve $ac, bc \notin Jac(R)$ varsayımıyla), $ab \in \varphi(I)$ olmalıdır. $\varphi(I) \subseteq I$ olduğu için $ab \in I$ ki bu da istenendir.
$(\Leftarrow)$: I bir $(2,J)$-ideal ise, $abc \in I$ ve $ac, bc \notin Jac(R)$ ise $ab \in I$. Bu koşul $abc \in I \setminus \varphi(I)$ için de geçerlidir. Dolayısıyla I bir φ-$(2,J)$-idealdir. □

Tanım 4. I, R halkasının bir öz ideali, I_1, I_2, I_3, R'nin idealleri öyle ki $I_1 I_2 I_3 \subseteq I \setminus \varphi(I)$ olsun. Eğer her $a \in I_1, b \in I_2, c \in I_3$ için (a,b,c), I'nın bir φ-J-kritik üçlüsü değilse I'ya $I_1I_2I_3$'e göre φ-J-kritik üçlüsü bulundurmayan denir.

Yardımcı Teorem 1. I, R halkasının bir φ-$(2,J)$-ideali, K, R'nin bir öz ideali olsun. $abK \subseteq I$ ve her $c \in K$ için (a,b,c) I'nın bir φ-J-kritik üçlüsü olmayacak şekilde $a,b \in R$ olsun. O hâlde $ab \in I$ veya $aK \subseteq Jac(R)$ veya $bK \subseteq Jac(R)$ olur.

İspat. Aksini varsayalım, yani $ab \notin I, aK \nsubseteq Jac(R)$ ve $bK \not\subset Jac(R)$ olsun. $aK \nsubseteq Jac(R)$ olduğu için bir $k_1 \in K$ için $ak_1 \notin Jac(R)$ vardır. $bK \nsubseteq Jac(R)$ olduğu için bir $k_2 \in K$ için $bk_2 \notin Jac(R)$ vardır. $abk_1 \in abK \subseteq I$. Eğer $abk_1 \in I \setminus \varphi(I)$ ise, I bir φ-$(2,J)$-ideal ve $ak_1 \notin Jac(R)$ olduğu için, $ab \in I$ (çelişki) veya $bk_1 \in Jac(R)$ olmalıdır. Eğer $abk_1 \in \varphi(I)$ ise, (a,b,k_1) I'nın bir φ-$(2,J)$-kritik üçlüsü olmadığından $ab \in I$ (çelişki) veya $ak_1 \in Jac(R)$ (çelişki) veya $bk_1 \in Jac(R)$ olmalıdır. Dolayısıyla $bk_1 \in Jac(R)$ olmalıdır. Benzer şekilde, $abk_2 \in I$ için eğer $abk_2 \in I \setminus \varphi(I)$ ve $bk_2 \notin Jac(R)$ ise, $ab \in I$ (çelişki) veya $ak_2 \in Jac(R)$ olmalıdır. Eğer $abk_2 \in \varphi(I)$ ise ve (a,b,k_2) üçlüsü φ-$(2,J)$-kritik üçlüsü değilse, $ab \in I$ (çelişki) veya $ak_2 \in Jac(R)$ veya $bk_2 \in Jac(R)$ (çelişki) olmalıdır. Dolayısıyla $ak_2 \in Jac(R)$ olmalıdır. Şimdi $k_1 + k_2 \in K$ elemanını düşünelim. Burada $ab(k_1 + k_2) \in abK \subseteq I$. Eğer $ab(k_1 + k_2) \in I - \varphi(I)$ ise, I bir φ-$(2,J)$-ideal olduğu için, $ab \in I$ (çelişki) veya $a(k_1 + k_2) \in Jac(R)$ veya $b(k_1 + k_2) \in Jac(R)$ olmalıdır. Eğer $a(k_1 + k_2) \in Jac(R)$ ise $ak_1 + ak_2 \in Jac(R)$. $ak_2 \in Jac(R)$ olduğu için $ak_1 \in Jac(R)$ olur. Bu $ak_1 \notin Jac(R)$ ile çelişir. Eğer $b(k_1 + k_2) \in Jac(R)$ ise $bk_1 + bk_2 \in Jac(R)$. $bk_1 \in Jac(R)$ olduğu için $bk_2 \in Jac(R)$ olur. Bu $bk_2 \notin Jac(R)$ ile çelişir. Eğer $ab(k_1 + k_2) \in \varphi(I)$ ise ve $(a,b,k_1 + k_2)$ φ-$(2,J)$-kritik üçlüsü değilse, $ab \in I$ (çelişki) veya $a(k_1 + k_2) \in Jac(R)$ (yukarıdaki gibi çelişki) veya $b(k_1 + k_2) \in Jac(R)$ (yukarıdaki gibi çelişki) olmalıdır. Her durumda çelişki elde edilir. Dolayısıyla baştaki varsayım yanlış olmalıdır. Yani $ab \in I$ veya $aK \subseteq Jac(R)$ veya $bK \subseteq Jac(R)$ olmalıdır. □

Teorem 5. R bir halka, I, R'nin bir φ-$(2,J)$-ideali olsun ve I_1, I_2, I_3 idealleri için $I_1I_2I_3 \subseteq I \setminus \varphi(I)$ olup I, $I_1I_2I_3$'e göre φ-J-kritik üçlüsü bulundurmasın. O hâlde $I_1I_2 \subseteq I$ veya $I_1I_3 \subseteq Jac(R)$ veya $I_2I_3 \subseteq Jac(R)$ olur.

İspat. Farzedelim ki $I_1I_2 \nsubseteq I$, $I_1I_3 \nsubseteq Jac(R)$ ve $I_2I_3 \nsubseteq Jac(R)$. O hâlde $i_1I_3 \nsubseteq Jac(R)$ ve $i_2I_3 \nsubseteq Jac(R)$ olacak şekilde bir $i_1 \in I_1$ ve $i_2 \in I_2$ bulunabilir. Bir önceki yardımcı teorem kullanılarak $i_1i_2 \in I$ sonucuna varılır. Ayrıca $I_1I_2 \nsubseteq I$ kabul ettiğimizden, $ab \notin I$ olacak şekilde $a \in I_1$ ve $b \in I_2$ vardır. O hâlde $abI_3 \subseteq I$ ve $ab \notin I$ olduğu için $aI_3 \subseteq Jac(R)$ veya $bI_3 \subseteq Jac(R)$ olmalıdır. Bu 3 durum hâlinde incelenebilir.

Durum 1: $aI_3 \subseteq Jac(R)$ ama $bI_3 \nsubseteq Jac(R)$ olsun. Burada $I_1I_2I_3 \subseteq I$ olduğu için $i_1bI_3 \subseteq I$ elde edilir. Eğer $(a + i_1)I_3 \subseteq Jac(R)$ olsaydı $aI_3 \subseteq Jac(R)$ olduğu için $i_1I_3 \subseteq Jac(R)$ çelişkisi elde edilirdi. O hâlde $i_1I_3 \nsubseteq Jac(R)$ ve $bI_3 \nsubseteq Jac(R)$ olduğu için önceki yardımcı teoreme göre $i_1b \in I$ elde edilir. Ayrıca $(a + i_1)bI_3 \subseteq I$ ve $bI_3 \nsubseteq Jac(R)$, $(a + i_1)I_3 \nsubseteq Jac(R)$ olduğu için $(a + i_1)b \in I$ elde edilir. Buradan $ab \in I$ sonucuna varılır ki bu bir çelişkidir.

Durum 2: $bI_3 \subseteq Jac(R)$ ama $aI_3 \nsubseteq Jac(R)$ olsun. $I_1I_2I_3 \subseteq I$ olduğu için $ai_2I_3 \subseteq I$ elde edilir. Eğer $(b + i_2)I_3 \subseteq Jac(R)$ olsaydı $bI_3 \subseteq Jac(R)$ olduğu için $i_2I_3 \subseteq Jac(R)$ çelişkisi elde edilirdi. O hâlde $aI_3 \nsubseteq Jac(R)$ ve $i_2I_3 \nsubseteq Jac(R)$ olduğu için önceki yardımcı teoreme göre $ai_2 \in I$ elde edilir. Ayrıca $a(b + i_2)I_3 \subseteq I$ ve $aI_3 \nsubseteq Jac(R)$, $(b + i_2)I_3 \nsubseteq Jac(R)$ olduğu için $a(b + i_2) \in I$ elde edilir. Buradan yine $ab \in I$ sonucuna varılır ki bu bir çelişkidir.

Durum 3: Şimdi ise hem $aI_3 \subseteq Jac(R)$ hem de $bI_3 \subseteq Jac(R)$ durumunu göz önüne alalım. Eğer $(b + i_2)I_3 \subseteq Jac(R)$ olsaydı $bI_3 \subseteq Jac(R)$ olduğu için $i_2I_3 \subseteq Jac(R)$ çelişkisi elde edilirdi.O hâlde $i_1(b + i_2)I_3 \subseteq I$, $i_1I_3 \nsubseteq Jac(R)$ ve $(b + i_2)I_3 \nsubseteq Jac(R)$ olduğu için öncelikle $i_1(b + i_2) \in I$. Ayrıca $i_1i_2 \in I$ olduğu için $i_1b \in I$ elde edilir. Benzer şekilde $(a + i_1)i_2I_3 \subseteq I$, $i_2I_3 \nsubseteq Jac(R)$ ve $(a + i_1)I_3 \nsubseteq Jac(R)$ ele alınarak $ai_2 \in I$ elde edilir. O hâlde $(a + i_1)(b + i_2)I_3 \subseteq I$ ama $(a + i_1)I_3 \nsubseteq Jac(R)$ ve $(b + i_2)I_3 \not\subset Jac(R)$. Bu ise $ab + i_1b + ai_2 + i_1i_2 = (a + i_1)(b + i_2) \in I$ anlamına gelir. Önceki elde edilenlerle birlikte $ab \in I$ sonucuna varılır ki bu da yine bir çelişkidir. □

R_1, R_2 iki halka, $\varphi_1 : I(R_1) \to I(R_1) \cup \{\emptyset\}$ ve $\varphi_2 : I(R_2) \to I(R_2) \cup \{\emptyset\}$ iki fonksiyon olsun. Şimdi $R = R_1 \times R_2$ olsun ve $\varphi : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonunu R_1'in I_1 ideali ve R_2'nin I_2 ideali için $\varphi(I_1 \times I_2) = \varphi_1(I_1) \times \varphi_2(I_2)$ olarak tanımlayalım.

Önerme 5. $R = R_1 \times R_2$, I_1, R_1 halkasının $\varphi_1(I_1) \neq I_1$ koşulunu sağlayan bir ideali ve I_2, R_2'nin $\varphi_2(I_2) \neq I_2$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. O hâlde aşağıdakiler denktir.

(1) $I_1 \times I_2$, $R_1 \times R_2$ halkasının bir φ-$(2, J)$-idealidir.

(2) I_1, R_1 halkasının bir J-ideali ve I_2, R_2 halkasının bir J-idealidir.

(3) $I_1 \times I_2$, $R_1 \times R_2$ ‘nin bir $(2, J)$-idealidir.

İspat. (1) ⇒ (2) : $a_1b_1 \in I_1$ ve $b_1 \notin Jac(R_1)$ olsun. I_1 idealinin bir J-ideal olduğunu göstermek için $a_1 \in I_1$ göstermeliyiz. $i_2 \in I_2 \setminus \varphi_2(I_2)$ seçelim (böyle bir i_2 var çünkü $\varphi_2(I_2) \neq I_2$). $a = (a_1, 1), b = (1, i_2)$, $c = (b_1, 1)$ alalım. O hâlde $abc = (a_1b_1, i_2) \in I_1 \times I_2$. $i_2 \notin \varphi_2(I_2)$ olduğu için $(a_1b_1, i_2) \notin \varphi_1(I_1) \times \varphi_2(I_2) = \varphi(I_1 \times I_2)$. Yani $abc \in (I_1 \times I_2) \setminus \varphi(I_1 \times I_2)$. Burada $b_1 \notin Jac(R_1)$ olduğu için $bc = (b_1, i_2) \notin Jac(R_1 \times R_2)$. Ayrıca Jabobson radikali de öz ideal olduğu için $ac = (a_1b_1, 1) \notin Jac(R_1 \times R_2)$. O hâlde φ-$(2, J)$-ideal tanımından, $ab = (a_1, i_2) \in I_1 \times I_2$ olmalıdır. Bu ise $a_1 \in I_1$ verir ki bu da istenendir.
(2) ⇒ (3): [9] da bu yön ispatlanmıştır.
(3) ⇒ (1) : Bir $(2, J)$-idealin her zaman bir φ-$(2, J)$-ideal olduğu açıktır. □

Önerme 6. Eğer I, $R = R_1 \times R_2 \times R_3$ halkasının bir φ-$(2,J)$-ideali ise, o hâlde $I = \varphi(I)$ olur.

İspat. I_i, R_i halkasının ideali olmak üzere $I = I_1 \times I_2 \times I_3$ ve $I \neq \varphi(I) = \varphi_1(I_1) \times \varphi_2(I_2) \times \varphi_3(I_3)$ olduğunu varsayalım. $I \neq \varphi(I)$ olduğu için, en az bir j için $I_j \neq \varphi_j(I_j)$. Genelliği bozmadan $I_1 \neq \varphi_1(I_1)$ kabul edelim. O hâlde $a \in I_1 \setminus \varphi_1(I_1)$ bulunabilir. $b \in I_2$ ve $c \in I_3$ olmak üzere $(a,b,c) \in I \setminus \varphi(I)$ alalım. $x = (a,1,1)$, $y = (1,b,1)$, $z = (1,1,c)$ olsun. O hâlde $xyz = (a,b,c) \in I - \varphi(I)$. I bir φ-$(2,J)$-ideal olduğu için önceki önermeden I_i, R_i'nin öz idealleridir. Eğer $xy = (a,b,1) \in I = I_1 \times I_2 \times I_3$ ise $1 \in I_3$, yani $I_3 = R_3$, çelişkidir. Eğer $xz = (a,1,c) \in Jac(R) = Jac(R_1) \times Jac(R_2) \times Jac(R_3)$ ise $1 \in Jac(R_2)$ çelişkisi elde edilir. Eğer $yz = (1,b,c) \in Jac(R) = Jac(R_1) \times Jac(R_2) \times Jac(R_3)$ ise $1 \in Jac(R_1)$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $I = \varphi(I)$ anlamına gelir. □

M bir R-modül olsun. $R \ltimes M = \{(r,m) : r \in R, m \in M\}$ kümesi bileşen bileşen toplama ve $(r_1,m_1)(r_2,m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + r_2m_1)$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte birimi $(1,0)$ olan değişmeli bir halkadır ve M nin idealleştirilmesi olarak adlandırılır. R halkasının bir I ideali ve M modülünün bir N altmodülü için $I \times N$ kümesinin $R \ltimes M$ halkasının bir ideali olması için gerek ve yeter koşul $IM \subseteq N$ olmasıdır [12]. Şimdi ise bu halkanın idealleriyle ilgili fonksiyonu tanımlayalım. $\varphi : I(R) \to I(R) \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere $\varphi_M : I(R \ltimes M) \to I(R \ltimes M) \cup \{0\}$ fonksiyonu $\varphi_M(I \ltimes M) = \varphi(I) \ltimes M$ olarak tanımlansın. O hâlde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6. M bir R-modül, I, R'nin bir öz ideali ve $R \ltimes M$ idealizasyon halkası (trivial extension) olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $I \ltimes M$, $R \ltimes M$ halkasının bir φ_M-$(2,J)$-idealidir,

(ii) I, R halkasının bir φ-$(2,J)$-idealidir.

İspat. [2,Teorem 2.12]'nin özel hali olarak ispatlabilir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada, değişmeli halkalarda φ-$(2,J)$-ideal kavramı tanıtılmış ve bu ideallerin temel özellikleri, varlık koşulları ve çeşitli halka işlemleri altındaki davranışları incelenmiştir. φ-$(2,J)$-ideallerin, $(2,J)$-idealler ve φ-J-idealler gibi önemli ideal sınıflarını kapsayan bir genelleme olduğu gösterilmiştir. Elde edilen karakterizasyonlar ve yapısal sonuçlar, bu yeni ideal sınıfının teorik önemini vurgulamaktadır. Örneğin, homomorfik görüntüler ve bölüm halkaları altındaki kararlılıkları, bu ideallerin cebirsel yapılar arasında iyi transfer özelliklerine sahip olduğunu göstermiştir. Bu çalışma, φ-$(2,J)$-ideallerin daha derinlemesine incelenmesi için bir başlangıç noktası sunmaktadır. Gelecekteki araştırmalar, bu kavramın belirli halka sınıflarında, örneğin; Dedekind bölgeleri, von Neumann regüler halkaları gibi, nasıl davrandığını, φ-$(2,J)$-radikali gibi ilişkili yapıların tanımlanıp tanımlanamayacağını veya bu ideallerin modül teorisine genişletilip genişletilemeyeceğini ele alabilir. Ayrıca, farklı φ fonksiyon seçimlerinin φ-$(2,J)$-ideallerin özellikleri üzerindeki etkilerinin daha ayrıntılı incelenmesi de verimli bir araştırma alanı olabilir.

YAZAR KATKI ORANI

Eda Yıldız: Kavramlaştırma, Metodoloji, İçerik analizi, Araştırma, Makalenin yazımı-Orijinal taslak, Makalenin yazımı- İnceleme ve Düzenleme.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Badawi, A. (2007) On 2-absorbing ideals of commutative rings, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 75(3), 417-429.
[2] Badawi, A., Tekir, U., & Yetkin, E. (2014). On 2-absorbing primary ideals in commutative rings. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 51(4), 1163-1173.
[3] Qaralleh, I., El Khalfi, A. (2025). On (2, r)-ideals of commutative rings. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 74(4), 1-10.
[4] Tamekkante, M., Bouba, E. M. (2019). (2, n)-ideals of commutative rings. *Journal of Algebra and its Applications*,
[5] Yassine, A., Nikmehr, M. J., Nikandish, R. (2021). On 1-absorbing prime ideals of commutative rings. *Journal of Algebra and its Applications*, 20(10), 2150175.
[6] Yildiz, E., Tekir, U., Koc, S. (2021). On φ-1-absorbing prime ideals. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, 62(4), 907-918.
[7] Anebri, A., Mahdou, N., Tekir, Ü., Yıldız, E. (2023, September). On φ-(n, N)-ideals of Commutative Rings. *Algebra Colloquium* (Vol. 30, No. 03, pp. 481-492). World Scientific Publishing Company.
[8] Khashan, H. A., Bani-ata, A. B. (2021). J-ideals of commutative rings. *International Electronic Journal of Algebra*, 29(29), 148-164.
[9] Yildiz, E., Tekir, Ü., Koc, S. (2020). (2, J)-Ideals in Commutative Rings. *Comptes Rendus De L Academie Bulgare Des Sciences*, 73(9).
[10] Anebri, A., Mahdou, N., Zahir, Y. On weakly (2, J)-ideals of commutative rings. *Novi Sad Journal of Mathematics (Accepted)*
[11] El Khalfi, A. (2023). On φ-(n, J)-ideals and n-J-ideals of commutative rings. *Moroccan Journal of Algebra and Geometry with Applications, 2(1), 143-153.*
[12] Anderson, D. D., Winders, M. (2009). Idealization of a module. *Journal of Commutative Algebra,* 1(1), 56.