

DİŞLİ ÇARKLARININ KÜÇÜLTÜLMESİNDE KRİTİK NOKTALAR

Alp ESİN

Prof. Dr.

Makina Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
ANKARA

Bu makalede dişli çarkların küçültülmesinde bilgisayar destekli tasarımın sağladığı akılcılık tartışılmaktadır. Ele alınmış olan noktalar dişli tasarımını etkileyen parametrelerin anlamlı biçimde irdelenmesine de olanak vermektedir.

1. GİRİŞ

Dişli sistemlerinin tasarımında, şu parametreler genellikle baştan verilmiştir: Devir ve güç girdileri, devir oranı ve merkezler arası uzaklığı, çalışma koşulları. Tasarımcı ise diş sayısı, alın genişliği, üretimin kalitesi, çalışma ömrü ve malzeme gibi diğer parametreleri saptamak zorundadır. Görüldüğü gibi, dişli çarkların tasarımı, birbiriyle etkileşen birçok noktanın göz önünde tutulmasını gerektirir. Bu noktaların bir çoğu kolayca karar verilemeyecek kadar karmaşık olduğu gibi, yeterince açıklıkla tanımlanmaları da kolay değildir. Bu nedenle, dengeli ve koşullara uyum sağlayan tasarım kararları almak zordur. Tasarıma ilişkin zorunluluklar esnek olduğunda, birden çok geçerli çözüm elde edebilmek olasıdır. Ancak, bunların tümünün iyi çözümler olduğu ileri sürülemez.

Bazı uygulamalarda, optimum (koşullara en uygun) çözüm gerekebilir. Dişli tasarımında, optimum çözüme yaklaşmak için gereken hesaplamalar çok ayrıntılı ve karmaşıktır. Dişli tasarımında en sık rastlanan optimum tasarım koşullarından birisi, dişli çarkların elverdiğince küçültülmesidir. Bu küçültme ağırlığın veya dişli kutularına ayrılacak hacimlerin sınırlı olduğu uygulamalarda önemlidir. Dişli çarkların küçültülmesinin matematiksel olarak ifadesi

$$MA = \frac{D_p + D_g}{2} D_p (1 + M_G) / 2 \quad (1)$$

olarak yazılabilir. Burada MA merkezler arası minimum mesafedir. D, aşağıdaki denklemin de gösterdiği gibi bağımlı bir parametredir:

$$D = N m \quad (2)$$

N ve m de bağımlı parametreler olduklarından, denklem (1)'deki matematiksel ifadenin hareketle, asgari çapta dişli çarkları kolayca elde edilemez. Değişkenlerin oldukça çapraşık bir irdelenmesi gerekir. Bu tür bir irdeme Johnson [1] tarafından yapılmış olup, dişli çarkların çaplarının küçültülebilmesi için varmış olduğu sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

-Döndüren dişli çarkındaki diş sayısı asgari olmalıdır (düz dişli çarkta, 20° basınç açısı için 18 diş),

-Dişlilerin malzemelerinin yorulma dayanımları (S_t ve S_c) mümkün olduğu kadar yüksek olmalıdır,

-Dişliler en yüksek kalite düzeyinde üretilmelidir,

-Alın genişliği, pratikte izin verilen azami değerinde olmalıdır.

Değişkenlerin sürekli olmadığı ve değişkenlere verilebilecek değerlerin bir matematiksel kuralı izlemediği durumlarda, çapraşık matematiksel ifadelerin limit analizinden elde edilen sonuçlar, her zaman, optimum tasarım kararlarını oluşturamayabilir. Bu bağlamda, modern bilgisayarın özelliklerinden yararlanarak yapılacak yaklaşımlar, sağlıklı kararlar için daha güvenli dayanak oluşturabilir [2-4]. Bu kaynaklardan ilk ikisi oldukça çapraşık bir

bilgisayar taraması algoritmasına dayanmaktadır. [4] nolu kaynaktaki yöntem bilgisayara daha az dayanmakla birlikte, bu makalenin özünü oluşturan bilgisayar yöntemi kadar sonuçların irdelemesine açık değildir.

2. DIŞLİ DAYANIM FORMÜLLERİ FORMÜLASYON VE TEORİ

Amerikan Dişli Üreticileri Derneği (AGMA) tarafından geliştirilmiş olan standart uygulama uyarınca [5] dişli çarkların dayanımına temel alınan denklemler aşağıdadır:

$$S_t = \left[\frac{F_t K_a}{K_v} \right] \left[\frac{1}{F m} \right] \left[\frac{K_d K_b}{J} \right] \quad (3)$$

$$S_c = C_p \sqrt{\left[\frac{F_t C_a}{C_v} \right] \left[\frac{C_b}{D F} \right] \left[\frac{C_d C_v}{I} \right]} \quad (4)$$

Yukarıdaki denklemler, sırası ile, bir dişli çarkın eğmede yorulma ve aşınma sonucu yetmezlik denklemleridir. Aşağıdaki denklemler kullanılarak denklem (3) ve denklem (4) açılabilir:

$$W_t = \frac{746 P}{\pi D_p n_p / 60000} \\ = 1.425 \times 10^7 P / D_p n_p \quad (5)$$

$$F = a m \quad (6)$$

ve sonuçta:

$$S_t = \left[\frac{1.425 \times 10^7 P K_a}{n_p} \right] \left[\frac{1}{a N_p m^3} \right] \left[\frac{K_d}{J} \right] \quad (7)$$

ve

$$S_c = C_p \sqrt{\left[\frac{1.425 \times 10^7 P C_a}{n_p} \right] \left[\frac{1}{C_v} \right] \left[\frac{1}{a N_p^2 m^3} \right] \left[\frac{C_d}{I} \right]} \quad (8)$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemlerde, alın dişlileri için AGMA'nın tavsiyesi uyarınca, K_b , C_b ve C_y 1 olarak alınmıştır.

Denklemlerdeki dinamik yük faktörleri K_v ve C_v , AGMA'nın empirik denklemlerinden [5] elde edilir:

$$Q \leq 5 \text{ için,} \\ K_v = C_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200 V}} \quad (9a)$$

$$6 \leq Q \leq 11 \text{ için,} \\ K_v = C_v = \left[\frac{A}{A + \sqrt{200 V}} \right]^B \quad (9b)$$

AGMA'nın kullandığı semboller aynen kullanıldığı bu denklemlerde;

$$A = 50 + 56 (1.0 - B) \quad (10a)$$

$$B = \frac{(12 - Q)^{2/3}}{4} \quad (10b)$$

Q = AGMA, dişli üretim kalitesinin derecesi
 V = Bölüm dairesi üzerinde ölçülen teğetsel hızdır [m/s].

Teğetsel hızın değeri dişli çarkın bölüm dairesinin çapı ve dişlinin dönme hızıyla bağlıdır. Dişli çarkın bölüm dairesinin çapı N ve m türünden ifade edildiğinde, teğetsel hız için

$$V = \pi N_p m n_p / 60000 \quad (10c)$$

eşitliği yazılabilir.

Denklemlerdeki I değeri de (aşınma için geometri faktörü) verilen bir devir oranı ve diş biçimi (20° basınç açısı) için aşağıdaki denklemden elde edilir:

$$I = \frac{\sin \phi \cos \phi}{2} \left[\frac{M_G}{1 + M_G} \right] \\ = 0.1607 \left[\frac{M_G}{1 + M_G} \right] \quad (11a)$$

Yük dağılım faktörleri de, alın genişliği ve montaj duyarlılığına bağlı olarak,

$$K_d = C_d = 1.6 - 2.0 \quad (11b)$$

olarak alınabilir.

Yapılmış olan irdelemenin sonucunda, denklem (7) ve denklem (8), D_p için yazılabilir. Bu denklemlerin uzun olması nedeniyle, irdelemeyi etkilemeyen parametreleri (sabit veya verilmiş) içeren parantezler tire işaretiyle sadeleştirilmiştir.

$$D_p = N_p m = [-] \left[\frac{1}{K_v} \right] \left[\frac{1}{a m^2} \right] \left[\frac{K_d}{J} \right] \left[\frac{1}{S_{at}} \right] \quad (12)$$

$$D_p^2 = [N_p m]^2 = [-] \left[\frac{1}{C_v} \right] \left[\frac{1}{a m} \right] \left[\frac{C_d}{I} \right] \left[\frac{C_p}{S_{ac}} \right]^2 \quad (13)$$

Bu denklemlerdeki S_{at} ve S_{ac} , S_a ve S_c yerine kullanılan, malzemenin çalışma gerilmeleridir.

C_p verilmiş bir dişli çiftinin malzemesine bağlı olup, değişken değildir. a , S_{at} ve S_{ac} , dişli parametreleri N ve m den bağımsızdır. Bunların azami değerlerini alması, Johnson'un da işaret etmiş olduğu gibi, D_p nin sayısal değerinin küçülmesine neden olur. Ancak bir matematiksel sonucu tasarım kararlarına dönüştürmek, sayısal değerleri değiştirmek kadar kolay değildir. Yerine göre çok daha çapraşık olup, değişik bakış açılarını gerektirebilir. Bunun yanı sıra dişlilere ilişkin parametrelerin sürekli değişkenler türünden olmaması ve özellikle dişli modüllerinin yalnızca standart aralıklarla değiştirilebilmesi, karar verilen malzemenin ve üretim duyarlılığının yerinde olup olmadığı hususunda haklı duraksamalar yaratır. Özetle, gerçekçi bir çözüm elde edebilmek için, yalnızca limit analizlerinden derlenmiş sonuçlar yetersiz kalabilir. Parametrelerin değerlerindeki değişikliklerin tümünden etkileşimini görmek gerekir.

Her ne kadar Denklem (12) ve (13) yoluyla bölüm dairesinin çapı elde edilebilirse de, Denklem (7) ve (8) in bilgisayardaki kullanımı daha kolaydır. Üstelik bu denklemlerin bilgisayar çıkışları, değişik çözüm seçeneklerinin irdelenebilmesine de elverişlidir. Denklemler arasındaki benzerlik nedeniyle yalnızca bir adet bilgisayar akış şeması verilmiştir, (Şekil 1). Bilgisayar

programının ilginç yönü, evolvent girişimi olmaması için Slaymaker denkleminde elde edilen asgari diş sayısından daha fazla diş kullanılarak da asgari çapın elde edilip edilemeyeceği sorusuna cevap aranabilmektedir.

3. ÖRNEK VE İRDELEME

Yukarıda ele alınan hususları vurgulamak için her iki dişlinin de çelik olduğu aşağıdaki problem seçilmiştir:

Aktarılan güç = 50 BG

Devir = 575 d/dak

Devir oranı = 1.2

Dişli çarkların çalışma gerilmeleri (S_{at} ve S_{ac}), AGMA'nın malzeme sertliğine dayandırılmış denklemlerinden, 200 - 400 H_B aralığı için elde edilebilir [5]. Anılan kaynaktaki 14 ve 15 nolu şekillerdeki denklemlerden (MPa türünden)

$$S_t = [6235 + 174 H_B - 0.126 H_B^2] 6.89 \times 10^{-3} \quad (14a)$$

$$S_t = [-274 + 167 H_B - 0.152 H_B^2] 6.89 \times 10^{-3} \quad (14b)$$

$$S_c = [27000 + 364 H_B] 6.89 \times 10^{-3} \quad (15a)$$

$$S_c = [26000 + 327 H_B] 6.89 \times 10^{-3} \quad (15b)$$

Seçilmiş olan örnekten elde edilen yorulma ve aşınma yetmezlikleri sonuçları Çizelge 1 ve Çizelge 2'de sunulmuştur. Çizelgelerde, eşit bölüm daireleri kalın çizgilerle vurgulanmıştır. Söz konusu çizelgelerdeki gerilme değerlerinin aralıklı oluşu nedeniyle, bilgisayardan, ek olarak, Çizelge 3 ve 4 elde edilmiştir. Bu sonuçlar, daha önceki dökümü tümleyerek, belirli bir AGMA üretim kalitesi için, bölüm dairesinin asgari çapının değiştiği gerilme değerini vermektedir.

Çizelgeler, sistematik olmayan tasarım yaklaşımlarının ne ölçüde kısa düşebileceklerini çarpıcı bir biçimde göstermektedir. Örneğin Çizelge 1'den, $Q=5$ için, eğmede yorulma dayanımı 282 MPa olan bir çelikten üretilen dişli çarkın bölüm dairesinin çapı 90 mm. dir. Daha yüksek bir üretim kalitesi kullanılsa dahi, dayanımı 395

MPa dan daha yüksek bir malzeme kullanılmadıkça, çapın değerinin etkilenmediği bu çizelgeden izlenmektedir. Görüldüğü gibi, bu tür bir irdeleme yapılmaksızın daha yüksek dayanımlı malzeme seçmek veya daha üstün üretim kalitesine karar vermek, tümüyle israfa yol açabilir.

Limit analizine dayalı yaklaşımlara göre, Çizelge 1 ve 2'nin sağ en alt köşelerindeki çap değerleri, matematiksel olarak, optimum küçüklüklerdir. Ancak çizelgelerdeki kalın sınır çizgileri, aşırı idealize edilmiş yaklaşımların çok yanıltıcı olabileceğini kanıtlamaktadır.

Bilgisayar yaklaşımının ortaya koyduğu bir diğer nokta da, evolvent girişimini önleyen asgari diş sayısını kullanmakla asgari çapın her durumda elde edilmeyeceğini göstermesidir; (Çizelge 3 ve 4). Örneğin, 1350 MPa basma dayanımına sahip bir malzemenin Q=5 kalitesinde üretilen bir dişlinin, verilmiş olan girdiler için, 6 mm modülle açılması gerekir. Elde edilecek bölüm dairesinin çapı ise 108 mm dir. Ancak bu durumda, malzemenin dayanımının % 80'i (1087/1350) kullanılmış olmaktadır. Öte yandan, Çizelge 4'den, bu malzeme için, 21 diş 5 modül, 20 diş 5 modül ve 19 diş 5 modülün de çözüm seçenekleri olabileceği ortadadır (1222 < 1350; 1278 < 1350; 1340 < 1350). Bu çözümlerin her biri daha küçük dişli çapı elde edilmesine neden olduğu gibi, malzemenin daha verimli kullanılmasını da sağlamaktadır.

Üretim kalitesini artırmanın etkisi, aynı sıradaki değerleri izleyerek görülebilir. Ancak, bunun, pratikte büyük önemi olan bir karar olduğunun ve bir matematiksel işlem olarak değerlendirilmesinin yanlış olacağını hatırd tutulması gerekir. AGMA 390.03 standardı uyarınca, örnek olarak verilen çap ve modül değerleri için, Q=6 kalitesinden Q=11 kalitesine geçiş, toplam dişli hatasında, 0.3 mm den 0.04 mm duyarlılığa geçmeyi gerektirir. İkinci durumun, sekiz kat daha dar toleransla üretim yapmayı gerektirdiğine dikkat çekmekte yarar olacaktır.

Verilmiş olan bir devir oranı için, aşağıdaki Slaymaker denkleminden, evolvent girişimini önleyen asgari diş sayısı hesaplanabilir.

$$\frac{4m'}{\sin^2 \phi} (N + m) \leq 2 Nn + n^2 \quad (16)$$

Bu denklemde de orijinal denklemdeki simgeler aynen kullanılmıştır. Bunlar:

m' = diş üstü sabitesi (0.8 veya 1.0)

ϕ = basınç açısı

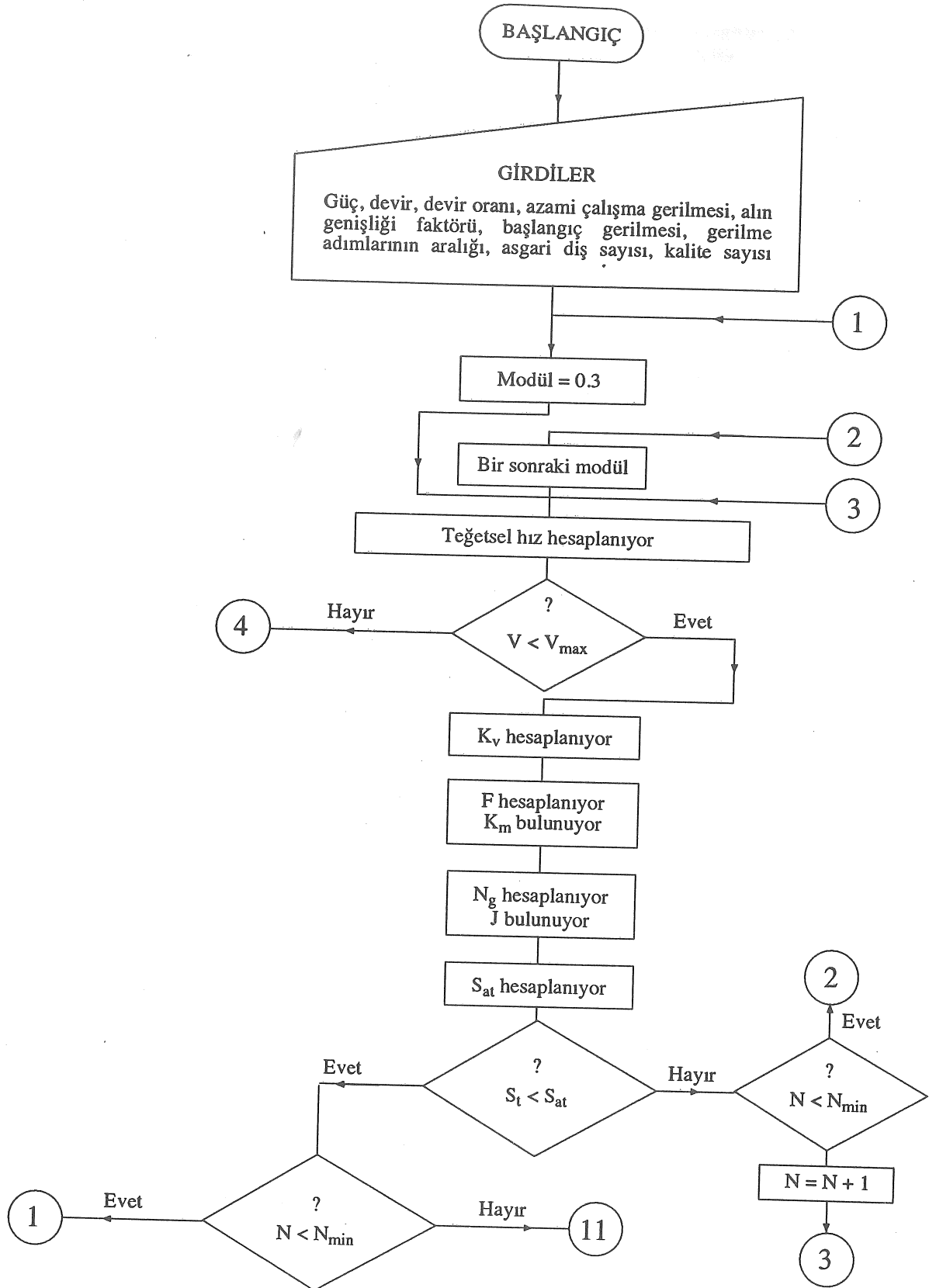
N = büyük dişlideki diş sayısı

n = küçük dişlideki diş sayısı

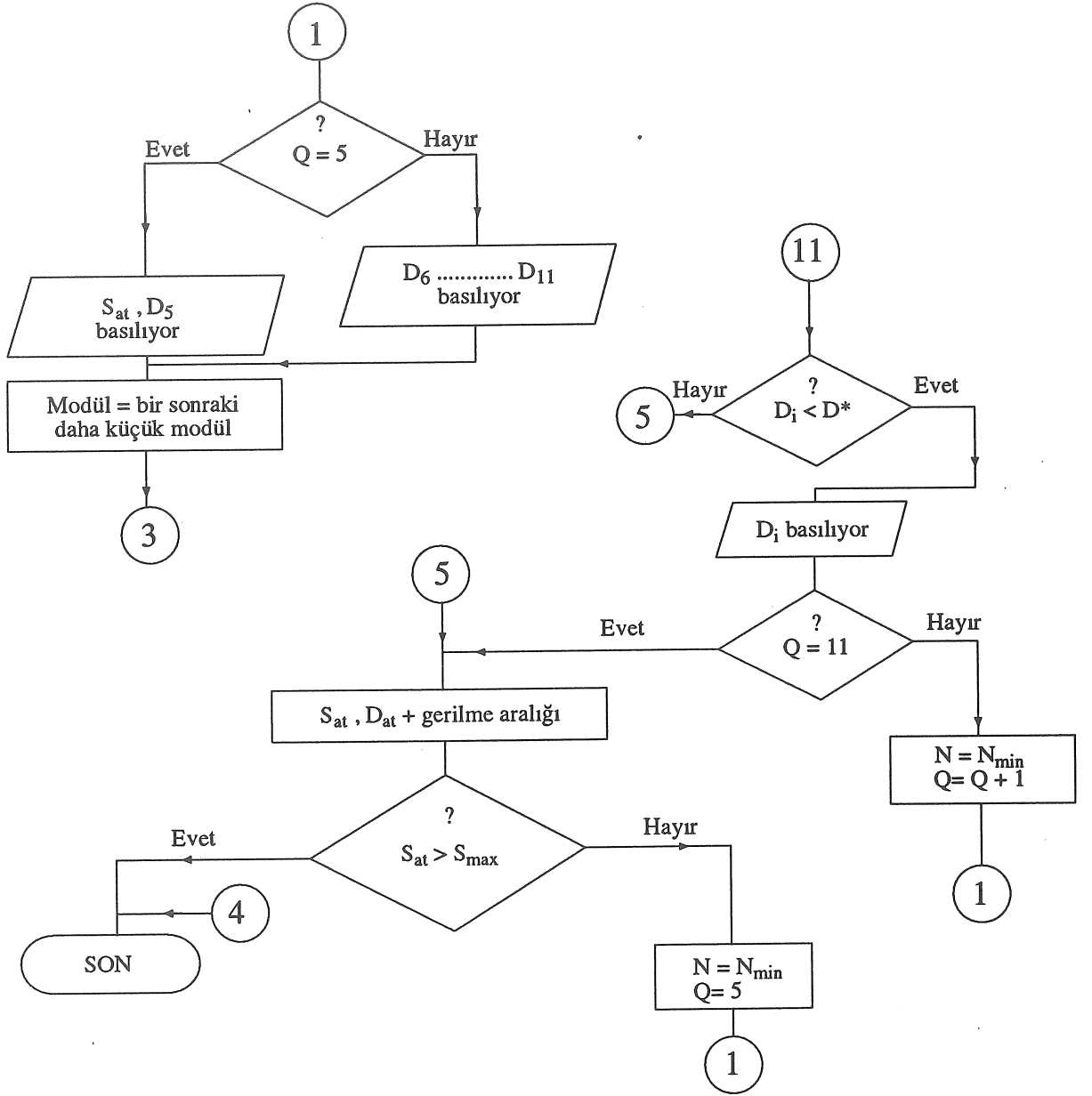
Örneğin 20° basınç açısı ile açılan dişlilerde, küçük dişlinin limit değeri olan 18 diş, büyük dişli, çubuk dişli ($N = \infty$) olarak alındığında elde edilir. Örneğimizdeki devir oranı için bu denklem çözüldüğünde, seçilebilecek asgari diş sayısı 14'tür. Çizelge 5, verilmiş olan bir devir oranı için geçerli olan asgari diş sayısı kullanılsa da, 14 dişden daha fazla diş sayısı kullanıldığında daha küçük çapta dişli elde edebilmenin olası olduğunu göstermektedir. Bu gibi durumlar, çizelgede verilmiş bir aşınma dayanımı değerine ait sıradaki ikinci satırla belirtilmiştir. Örneğin, Q=5 kalitesi ve 550 MPa dayanım için asgari çap, örnek alınan girdiler uyarınca, 168 mm dir ve yalnızca 14 diş, 12 modül kullanılarak elde edilebilir. Öte yandan, kalite Q=6 olarak alındığında, 15 diş ve 11 modül kullanarak, daha küçük dişli elde edilebilir. Çizelge 5'in daha çarpıcı biçimde ortaya koyduğu noktalardan birisi, kalın çizgilerle ayrılmış bölgelerin işaret ettiği gibi, gelişigüzel malzeme veya üretim kalitesinin seçiminin, özellikle, yüksek dayanımlı malzeme veya daha üst düzeyde üretim kalitesi kullanıldığında, israf olasılığını artırdığıdır.

SİMGELER

a	Alın genişliği faktörü
C_p	Elastiklik katsayısı
C_y	Yüzey kalitesi faktörü
D	Bölüm dairesinin çapı, mm
W_t	Aktarılan yük, N
F	Alın genişliği, mm
H_B	Brinell sertlik derecesi
I	Aşınmada geometri faktörü
J	Eğmede geometri faktörü
K_a, C_a	Yük uygulama faktörü
K_b, C_b	Boyut faktörü
K_d, C_d	Yük dağılım faktörü



Şekil 1. Bilgisayar Akış Şeması.



Şekil 1. Bilgisayar Akış Şeması (D* = en küçük modül).
(Devamı)

ÇİZELGE 1. Yorulma Yetmezliği Sonuçları. N (min) = 18 diş, F = 16m mm.

AGMA NO	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
Sat (MPa)	Bölüm dairesi çapı (mm)						
175	108	108	108	108	108	108	108
200							
225					90	90	90
250			90	90			
275		90					
300	90						
325							
350							
375							90
400					90	90	72
425				90	72	72	
450			90	72			
475		90	72				
500	90	72	72	72	72	72	72

ÇİZELGE 2. Aşınma Yetmezliği Sonuçları. N (min) = 18 diş, F = 16m mm.

AGMA NO.	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
Sat (MPa)	Bölüm dairesi çapı (mm)						
550	180	180	180	162	162	162	162
625	162	162	162			144	144
700		144	144	144	144		
775	144					126	126
850		126	126	126	126		
925	126						108
1000			108	108	108	108	
1075		108					
1150	108						
1225						90	90
1300				90	90		
1375		90	90				
1450	90	90	90	90	90	90	90

ÇİZELGE 3. Yorulma Yetmezliğine Dayalı Asgari Bölüm Dairesi
Çapı. N (min) = 18 diş, F = 16m mm.

AGMA NO.	Q5	Q6	Q7	Q11
Çap (mm)	İşletme gerilmesi (MPa)			
108	175	175	175	175
105	230	205	194	-
100	245	218	208	175
95	262	234	223	188
90	282	252	241	204
88	409	367	350	297
84	433	389	371	316
80	461	415	397	338
76	493	445	426	364
72	501	480	460	395
63	-	501	501	501

ÇİZELGE 4. Aşınma Yetmezliğine Dayalı Asgari Bölüm Dairesi
Çapı. N (min) = 18, F = 16m mm.

AGMA NO.	Q5	Q7	Q9	Q11
Çap (mm)	İşletme gerilmesi (MPa)			
180	550	550	-	-
171	585	550	-	-
162	614	556	550	-
160	659	597	565	550
152	690	626	594	565
144	725	659	626	595
140	795	724	687	654
133	832	759	722	688
126	874	799	761	726
120	987	904	861	823
114	1035	949	905	865
108	1087	999	954	913
105	1222	1124	1073	1028
100	1278	1177	1125	1079
95	1340	1236	1183	1135
90	1408	1301	1246	1197
88	-	1486	1424	1368
84	-	-	1490	1432

ÇİZELGE 5. Aşınma Yetmezliği Sonuçları. N (min) = 14 diş, F = 16m mm.

AGMA NO.	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
Sac (MPa)	Bölüm dairesi çapı (mm)						
550	168	168	154	154	154	154	154
	-	165	-	-	-	150	150
625	154	154	140	140	140	140	140
	-	150	-	-	-	135	135
700	140	140	140	126	126	126	126
	-	135	135	-	-	-	-
775	126	126	126	126	126	126	112
	-	-	-	120	120	120	-
850	126	126	112	112	112	112	112
	-	120	-	-	-	-	-
925	112	112	112	112	112	112	112
	-	-	-	-	105	105	105
1000	112	112	112	98	98	98	98
	-	105	105	-	-	-	-
1075	112	98	98	98	98	98	98
	105	-	-	-	96	96	96
1150	98	98	98	98	98	98	98
	-	96	96	96	90	90	90
1225	98	98	98	98	84	84	84
	96	90	90	90	-	-	-
1300	98	84	84	84	84	84	84
	90	-	-	-	-	-	-
1375	84	84	84	84	84	84	84
	-	-	-	-	-	80	80
1450	84	84	84	84	84	84	84
	-	-	-	80	80	80	75

K_v, C_v	Dinamik yük faktörü
m	Modül, mm
M_G	Devir oranı
N	Diş sayısı
n	Döndüren dişlinin hızı, d/dak
P	Güç, BG
p, g	Döndüren ve döndürülen dişliler için simge (pinyon ve karşılığı)
S_c	Basmada yorulma dayanımı, MPa
S_t	Eğmede yorulma dayanımı, MPa

CRITICAL POINTS IN DESIGN OF COMPACT GEAR SETS

The merits of a computer-assisted approach for designing compact spur-gear sets which lends itself to meaningful analysis of variables is discussed.

KAYNAKÇA

1. Johnson, R.C., Optimal Design of Machine Elements, Wiley Interscience, 2. baskı (1980)
2. Savage, M.Coy ve Townsend, D.P., Optimal Tooth Numbers for Compact Standard Spur Gear Sets, Trans. ASME. Jour of mechanical Design, v104, No4, sayfa 749,758 (1982).
3. Caroll, R.K. ve Johnson, G.E., Optimal Design of Compact Gear Sets, Trans. ASME, Jour of Mechanical design, v106, No1, sayfa 95-101 (1983)
4. Errichello, R.,A. Rational Procedure for Designing Minimum Weight Gears, Proc. 1989 Int Conf.; Power Transmission and Gearing, ASME; sayfa 111-114 (1989)
5. AGMA Dişli Standardı. No: 218.01: "AGMA Standard for Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur and Helical Involute Gear Teeth".
6. AGMA Dişli Standardı. No: 215.01: "AGMA Information Sheet for Surface Durability (Pitting) of Spur, Helical, Herringbone and Bevel Gear Teeth.