

AĞIRLIK MERKEZİ VE KÜTLE EYLEMSİZLİK MOMENTİNİN BİLGİSAYAR DESTEKLİ DENEYLE BULUNMASI

İ. Deniz AKÇALI

Prof. Dr.

Makina Mühendisliği Bölümü

Ç.Ü. Müh. Mim. Fakültesi

ADANA

Hüseyin MUTLU

Araş. Gör.

Makina Mühendisliği Bölümü

Ç.Ü. Müh. Mim. Fakültesi

ADANA

Hareketli makina parçalarının dinamik incelenmesinde karşılaşılan önemli üç büyüklük, kütle, ağırlık merkezinin yeri ve ağırlık merkezi etrafında kütle eylemsizlik momentidir. Bu çalışmada, düzlemsel tek simetri eksenli ve genel düzlemsel parçaların bu üç büyüklükten son ikisinin bilgisayar yardımı ile deneysel hesaplanmasına ilişkin bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Düzgün geometriye sahip parçalar için elde edilen deneysel ve kuramsal sonuçlar karşılaştırılmıştır.

GİRİŞ

Makinalarda, makinaya ait hareketli parçaların dinamiğinin incelenebilmesi için uzuvların kütle, ağırlık merkezinin yeri ve ağırlık merkezi etrafındaki kütle eylemsizlik momentlerinin bilinmesi zorunludur. Dinamiğin temel denklemleri olan Newton ve Euler [1] hareket denklemlerinin bu büyüklüklere bağlı olduğu bilinmektedir. Pratikte bu özellikler, makinalarda titreşime neden olan dengesizlik kuvvetlerinin giderilmesi [2], [3], [4], [5] volan, kasnak vs. gibi bazı makina parçalarının eylemsizlik yarıçaplarının bilinmesi için de gereklidir.

Ağırlık merkezinin yeri ve kütle atalet momentleri geometrisi bilinen, düzgün makina uzuvları için kuramsal hesaplanabilir. Fakat düzgün geometriye sahip olmayan parçalar için kuramsal hesap hem güç, hem de kesin değildir. Bu nedenle bu işin deneysel yapılmasına gereksinim vardır.

Cisimlerin kütleleri bir tartı aletiyle kolayca bulunur. Ağırlık merkezinin yeri çubuk şeklindeki tek simetri eksenli parçalarda, iki noktadan desteklenmiş, kütle ağırlığının destek noktasında ölçülen tepki kuvvetleriyle saptanabilir [1], [6]. Düzlemsel simetrik olmayan parçalarda ise ağırlık merkezinin yeri, parçanın serbestçe dönebileceği farklı iki noktadan asılmasıyla ortaya çıkan yerçekimi doğrultusunun şekil üzerindeki izdüşümlerinin kesiştirilmesiyle

bulunur [2]. Kütle atalet momentinin bulunmasında ise çeşitli yöntemler kullanılır. Bunlardan başlıcaları, çeşitli sarkaç deneyleri [2], [6] açısız ivmenin ölçüldüğü deneyler [7] ve çeşitli burulma titreşimi deneyleridir [4], [7].

Yukarıda sayılan yöntemler şimdiye kadar yapılan çalışmalarda genellikle tek ya da çift simetri eksenli bulunan nispeten düzgün geometriye parçalara uygulanmıştır. Ancak yöntemin simetrik olmayan genel düzlemsel parçalara uygulanmasına rastlanmamıştır. İşte bu çalışmada sarkaç yönteminin, simetri özelliği olmayan düzlemsel parçaların ağırlık merkezleri ile kütle eylemsizlik momentlerinin bulunması ve genelleştirilmesi yapılmıştır. Sarkacın periyodunun ölçüm işlemlerinde, veri toplama ve analizinde bilgisayar kullanılarak zaman ve insan gücünden büyük bir tasarruf sağlanmış ve en önemlisi de hata payı çok küçük oranlara indirilmiştir.

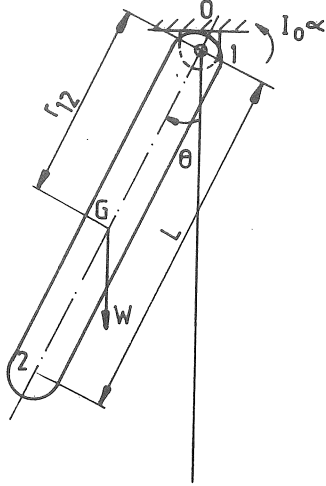
KURAM

Makina parçalarının ağırlık merkezinin yeri ve ağırlık merkezi etrafındaki kütle atalet momentinin belirlenmesi için, sarkacın salınım periyodu ile bu büyüklükler arasındaki ilişkinin bilinmesi gerekir.

Bunun için düzlemde tek simetri eksenli hal ve düzlemde genel hal olmak üzere iki durum gözönüne alınmalıdır.

Düzlemde Tek Simetri Eksenli Hal

Düzlemde tek simetri eksenine sahip bir makina parçası Şekil 1'de görüldüğü gibi bir O noktası etrafında serbest olarak salınma bırakılsın.



Şekil 1. Tek simetri eksenli halde salınım büyüklükleri.

Bu durumda O etrafında Euler hareket denklemleri yazılırsa

$$mg \sin \theta r_{12} + I_0 \alpha = 0 \quad (1)$$

bulunur. Burada cismin kütlesi (m), yerçekimi ivmesi (g), cismin açısal ivmesi (α), cismin askı noktası (O) etrafındaki kütle eylemsizlik momenti (I_0)'dır. (1) ifadesi küçük salınım açıları (θ) için tekrar yazılırsa ve açısal ivme (α) yerine θ açısının ikinci dereceden türevi konursa, aşağıdaki ikinci dereceden sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \sqrt{\frac{mg r_{12}}{I_0}} \theta = 0 \quad (2)$$

(2) denklemleri sarkacın başlangıçta θ_0 konumundan sıfır hızıyla bırakıldığı dikkate alınır, $t = 0$, $\theta = \theta_0$, $d\theta/dt = 0$ sınır şartları yazılır. Buna göre (2) nolu

diferansiyel denklemin bu sınır şartları altındaki çözümü şöyle olur:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{mg r_{12}}{I_0}} t \quad (3)$$

Paralel Eksenler teoreminden, I_G ağırlık merkezi etrafındaki kütle eylemsizlik momenti olmak üzere yazılan ($I_0 = I_G + r_{12}^2 m$) bağıntısı (3) 'te yerine konursa periyod (T_1) ifadesi şu şekilde bulunur.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + r_{12}^2 m}{mg r_{12}}} \quad (4)$$

(4) bağıntısında I_G ve r_{12} olarak iki bilinmeyen bulunduğu için, ikinci bir denkleme ihtiyaç vardır. Bu amaçla Şekil 1'de görüldüğü gibi, sarkaç, farklı ikinci bir noktadan asıldığında, periyodu (T_2) aşağıdaki bağıntıyla verilen salınım hareketini yapacaktır.

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + (L - r_{12})^2 m}{mg (L - r_{12})}} \quad (5)$$

(4) ve (5) denklemlerinden ağırlık merkezinin 1. askı noktasına uzaklığı (r_{12}) ile ağırlık merkezi (G) etrafındaki kütle eylemsizlik momenti (I_G) çekilirse,

$$r_{12} = \frac{L \left[\left(\frac{T_1}{2\pi} \right)^2 - \frac{1}{g} \right]}{\left[\left(\frac{T_1}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{T_2}{2\pi} \right)^2 - \frac{2L}{g} \right]} \quad (6)$$

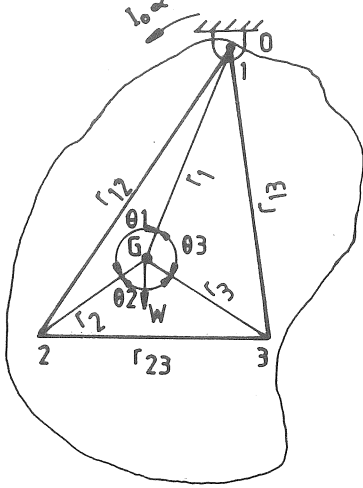
$$I_G = mg r_{12} \left[\left(\frac{T_1}{2\pi} \right)^2 - \frac{r_{12}}{g} \right] \quad (7)$$

(6), (7) bağıntıları bulunur.

Düzlemde Genel Hal

Yukarıdaki tek-simetri eksenli halde bilinmeyen sayısı 2 idi. Oysa genel düzlemsel halde bilinmeyen sayısı artacaktır.

Şekil 2'deki genel düzlemsel haldeki geometrik incelemede bilinmeyen parametre sayısının 4 olduğu görülebilir. Bunlar kısaca ağırlık merkezinin askı noktalarına olan uzaklıkları ($r_i, i=1, 2, 3$) ve ağırlık merkezi etrafındaki kütle eylemsizlik momenti (I_G)'dir.



Şekil 2. Düzlemde simetrik olmayan hal için sarkaç geometrisi.

Şimdi, (4) bağıntısı Şekil 2'deki 3 askı noktasına uygulanırsa, aşağıdaki periyod ifadeleri bulunur.

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + r_i^2 m}{mg r_i}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

(8) bağıntı kümesine ek olarak, askı noktaları ile ağırlık merkezinin yerleri arasındaki 4'üncü bağıntı da Şekil 3'ün geometrisinden ($\theta_i, i = 1, 2, 3$) cosinüs teoremi yardımıyla aşağıdaki gibi kurulur.

$$\cos\theta_i = \frac{r_i^2 + r_j^2 - r_{ij}^2}{2 r_i r_j}, \quad j = -3/2 i^2 + 11/2 i - 2 \quad (9)$$

$r_{ij} = r_{ji}, \quad i = 1, 2, 3$

$$\sin\theta_i = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_i}, \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

yazılır. Ayrıca

$$\theta_1 + \theta_2 = 360 - \theta_3 \quad (11)$$

olduğu Şekil 2'deki geometriden görülür. (11) ifadesinin iki tarafının cosinüsü alınırsa 4'üncü eşitlik olarak

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 = \cos\theta_3 \quad (12)$$

elde edilir. (8) ve (12) denklemleri sağ tarafı sıfır olacak şekilde düzenlenirse (13) ve (14)'de görülen 4 bilinmeyenli doğrusal olmayan denklem takımı şu hali alır.

$$r_i \left[\left(\frac{T_i}{2\pi} \right)^2 - \frac{r_i}{g} \right] - \frac{I_G}{mg} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 - \cos\theta_3 = 0 \quad (14)$$

(13) ve (14) 4 bilinmeyenli doğrusal olmayan denklem takımı sayısal teknikle çözülür. Bunun için (13) ve (14) denklem takımı elemanları $f_i = f(x_1)$ olan $F(x_1) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) şeklinde bir sütun matrisi olarak gösterilebilir. Buna göre Newton-Raphson [8], yöntemi ile çözüm için aşağıdaki adımlar uygulanmıştır.

1. $I_G = 0$, iterasyon düzeyini gösteren $j = 0$ alınır. Ayrıca çözümün ıraksaması halinde, 4. adımda I_G 'ye eklenecek dI_G artımı ve ardışık tekrarı bitirecek ϵ hata sınırı seçilir.
2. r_i ($i = 1, 2, 3$) başlangıç değerleri, I_G 'nin (13) denklem kümesinde yerine konulmasıyla hesaplanır.
3. $x_i^j = r_i$ ($i = 1, 2, 3$) ve $x_4^j = I_G$ ataması yapılır.
4. $F(x_i^j)$ sütun matrisi ve Jakobi matrisinin tersi ($[J]^{-1}$) hesaplanır. Eğer bunları çeşitli nedenlerle hesaplamak mümkün olamıyorsa I_G 'ye dI_G eklenerek 2 nolu adıma gidilir.
5. $x_i^{j+1} = x_i^j - [J]^{-1} * F(x_i^j)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ardışık tekrar ifadesinden bir sonraki çözüm değerleri hesaplanır.

$$6. \varepsilon < \left(\sum_{i=1}^4 ((x_{i+1}^{j+1} - x_i)^2)^{1/2} \right) \text{ ise } r_i = x_i^{j+1}$$

$i = 1, 2, 3$, atamaları yapılarak bilinmeyen büyüklükler bulunur, aksi halde j bir artırılır ($j+1$) ve 4 nolu adıma gidilerek ardışık tekrara devam edilir.

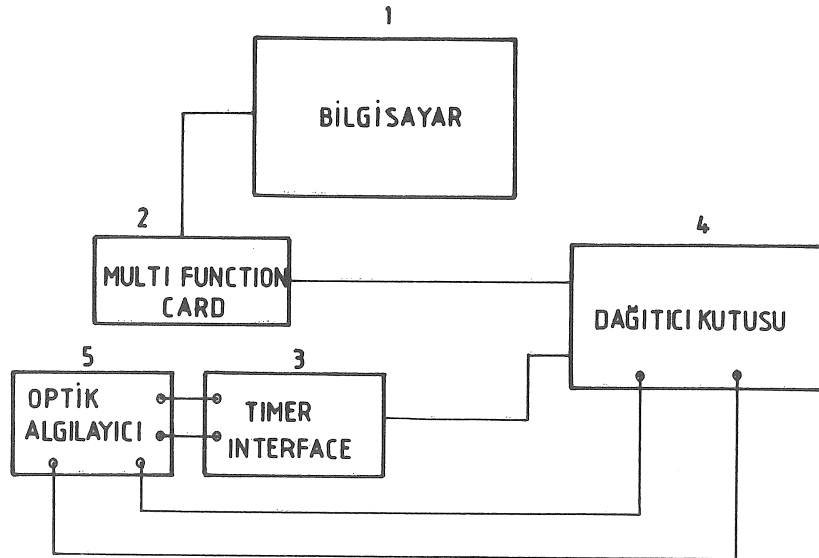
DENEY DÜZENEGİ

Deney düzeneği esas olarak Şekil 3'de görülen, içerisinde analog dijital çevirici bulunan bilgisayara bağlı kart (Multi function card), analog dijital çevirici arayüzü (interface), XT tipi bilgisayar, bilgisayara bağlı bir dağıtıcı kutusu ve bu kutu tarafından +5 voltla beslenen optik algılayıcıdan oluşur. Düzenek, optik algılayıcıya gönderilen enfraruj ışınlarının sarkacın salınımı sırasında her bir periyot kesilmesiyle yaratılan fototransistörün uçları arasındaki gerilim değişiminin, bilgisayarda sayısal sinyale dönüştürülme prensibine göre çalışır. Bu durumda optik algılayıcının ışığı kesilmesi halinde sıfır, kesilmemesi halinde 2^n (n bir tamsayı) şeklinde sayılar üretilir. Bu da Şekil 4'de görülen bir kare dalga sinyale karşılıktır. Bu sinyaller bir zaman arayüzü (interface) üzerinden bilgisayara taşınır ve buradaki programlar yoluyla periyotlar hesaplanarak kaydedilir.

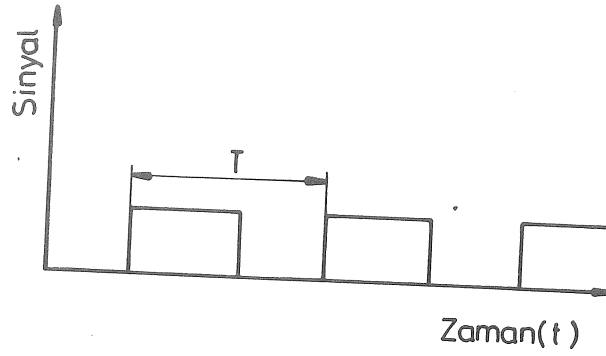
Bilgisayar Programı

Daha önce gösterilen deney düzeneğinde, verilerin toplanması ve değerlendirilmesi için etkileşimli bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Programın işletilmesi için gerekli adımlar aşağıdaki gibidir.

1. Programdaki menüden "veri girme" maddesi seçilir ve deneyi yapılacak parçanın düzlemsel tek simetri eksenli olma veya simetrik olmama durumuna göre, parça üzerinde seçilen askı noktaları arası mesafeler ve parçanın ölçülen kütlesi programa girilir.
2. Menüden "deney yapma" maddesi seçilir ve program deneysel veri toplama durumuna getirilir. Bu şekilde sarkacın salınımı sırasında oluşan kare dalga sinyale karşılık gelen periyot hesaplanarak kaydedilir. Bu işlem gerekirse tekrarlanabilir. Benzer işlemler diğer askı noktaları için de yapılır.
3. Programdaki menüden "hesap yapma" maddesi seçilir. Kaydedilmiş periyot değerleri (6), (7) veya (13), (14) nolu denklemler yardımı ile ağırlık merkezinin yeri ve ağırlık merkezi etrafındaki kütle eylemsizlik momenti bulunur.
4. Birinci adıma gidilerek deney istenirse tekrarlanabilir.



Şekil 3. Deney düzeneği şeması.



Şekil 4. Fototransistörün ürettiği kare dalga sinyal.

SAYISAL ÖRNEKLER

Şekil 5'de görülen 5 adet düzgün geometriye sahip tahta ve metal malzemeden yapılmış, düzlemsel tek simetri eksenli ve simetrik olmayan parçaların ağırlık merkezlerinin yerleri ve kütle eylemsizlik momentleri, deneysel ve kuramsal olarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar ile kuramsal ve deneysel sonuçlar arasındaki bağıl hatalar Tablo 1, 2, 3'de sunulmuştur.

Tablo 2'deki ağırlık merkezi yerinin kuramsal hesabında, Şekil 5'deki geometri üzerinde görülen eksen takımları kullanılmıştır. Bilgisayarda elde edilen deneysel sonuçların, kuramsal sonuçlarla karşılaştırılabilmesi için sonuçların bu eksen takımlarına göre dönüştürülmesi yapılmıştır.

SONUÇ VE TARTIŞMA

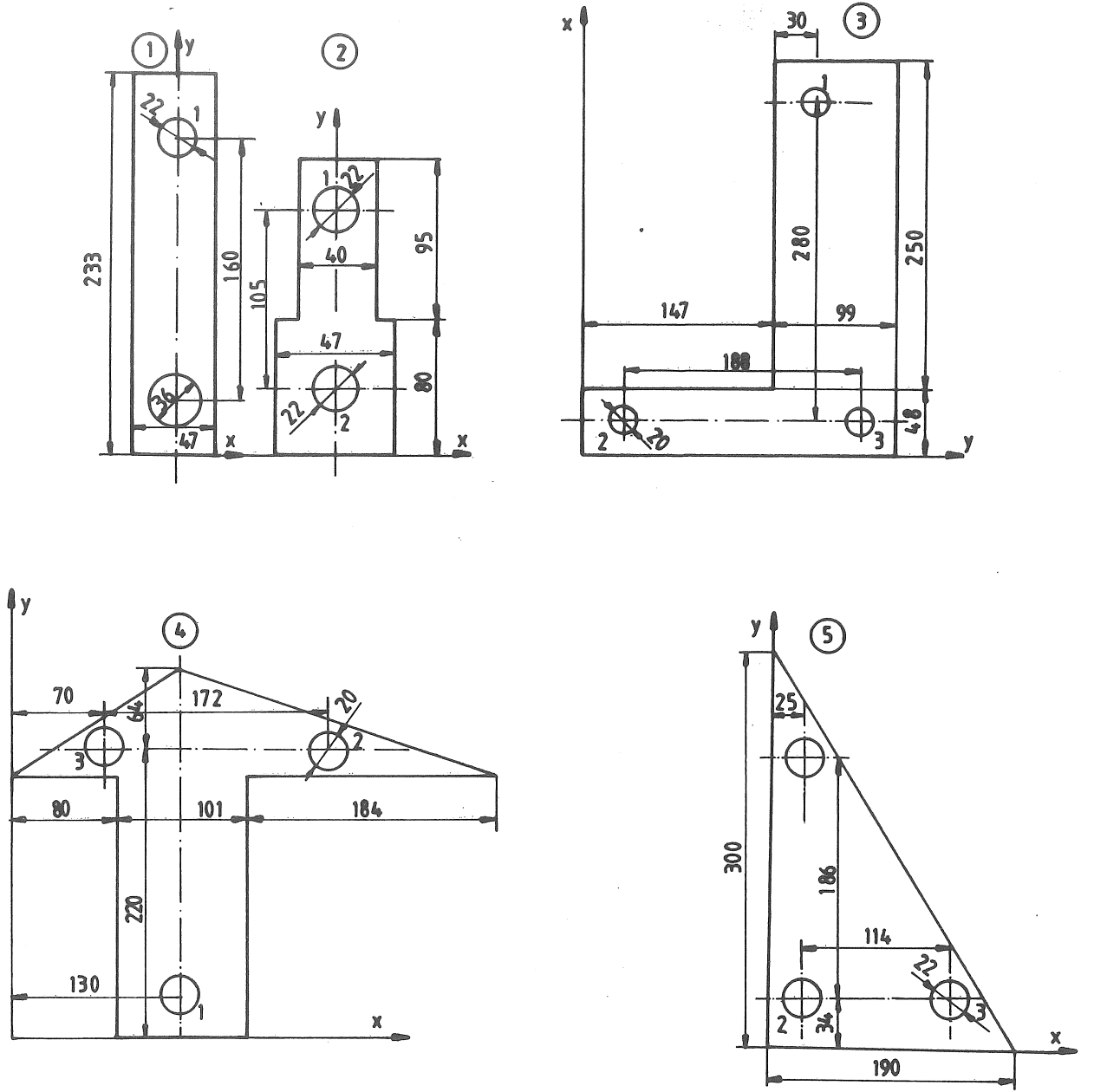
Deneysel ve kuramsal sonuçlar arasındaki bağıl hatalar Tablo 3'den incelenirse ağırlık merkezinin yerinde (r_G) en küçük % 0.13, en büyük % 1.77; kütle eylemsizlik momenti (I_G) de ise % 0.07 ile % 4.60 arasında değişen bağıl hatalar gözlenir. Bu hatalar, deneyde ve kuramda ihmal edilen büyüklükler ile parçaların imalatından kaynaklanan hatalardır. Önemli olarak parçaların imalatı sırasında meydana gelen düzlemsellikten sapmalardır. Sarkacın

askı noktasındaki sürtünmeleri, hava direnci ve hesaplarda kullanılan periyod ifadesinin küçük açılar için çıkarılması, deneysel sonuçları etkileyen ikinci dereceden hata sebepleri olabilir. Parçaların kütle dağılımlarının homojen olmaması da kuramsal sonucu etkileyen önemli bir hata kaynağıdır. Bu durum Tablo 1'deki 2, 3, 4 ve 5 nolu parçaların aynı malzemeden (tahta) imal edilmelerine karşın, yoğunluklarının farklı olmasından da görülebilir.

Diğer önemli bir sonuç da sarkacın periyodunun dijital bir sayıcı ve kronometre kullanılarak yapılan deneysel çalışmadır [9]. Böyle bir yöntemde Şekil 4'de görülen kare dalga sinyalinin birinci periyodunu tesbit etmek mümkün olamayacağından ölçülen periyod değeri ortalama ve yaklaşık olacaktır. Periyodun ölçümünde yapılan hata diğer parametrelerin yanında sonuca en büyük oranda etkiyecektir. Zaten böyle bir deney sonucu % 50'lere varan bağıl hatalar oluşmuştur. Bu hatalar Tablo 3'de görüldüğü gibi bilgisayar kullanımıyla binde mertebelerine kadar inmiştir.

SİMGELER

m	Kütle
g	Yerçekimi ivmesi
r_{ij}	Askı noktaları arası mesafe
r_i	Ağırlık merkezinin askı noktalarına olan uzaklığı



Şekil 5. Deneyde kullanılan geometriler.

I_0	Herhangi 0 noktası etrafında kütle eylemsizlik momenti	t	Zaman
α	Açısal ivme	T_1, T_2, T_3	Periyod
θ	Açısal yer değıştirme	I_G	Ağırlık merkezi etrafında kütle eylemsizlik momenti
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	Ağırlık merkezini askı noktalarına birleştiren doğrular arasındaki açı	L	Boy
		x_i	Ardışık tekrarda bulunan bilinmeyen parametreler

Tablo 1. Deneysel Veriler

Parça no	Kütle (gr)	Yoğunluk (gr/cm ³)	Periyot (sn)			Askı kolları arası mesafe (cm)		
			T ₁	T ₂	T ₃	r ₁₂	r ₂₃	r ₁₃
1	1320	8.133	0.7392	0.7723	-	19.15	-	-
2	106.4	0.769	0.6814	0.6540	-	12.75	-	-
3	498.6	0.826	0.9615	0.9982	0.9319	30.40	20.00	26.40
4	421.1	0.774	0.8908	0.8894	0.8689	24.20	19.00	22.00
5	410.7	0.877	0.8631	0.8119	0.8376	20.80	12.80	24.20

Tablo 2. Deney ve Kuram Sonuçları

Parça no	Ağırlık mer. yeri (cm) (Kuramsal)		Ağırlık mer.yeri (cm) (Deneysel)		Kütle Eylem. Momenti (kg-cm ²) (Kuramsal)	Kütle Eylem. Momenti (kg-cm ²) (Deneysel)
	X _g	Y _g	X _g	Y _g		
1	-	12.23	-	12.26	57.54	57.58
2	-	7.38	-	7.40	2.90	2.92
3	17.31	12.60	17.10	12.40	58.07	57.83
4	16.34	14.86	16.10	14.60	38.01	36.26
5	6.38	10.01	6.20	10.05	28.23	27.48

Tablo 3. Bağlı Hatalar

Parça no	Ağırlık Merkezinin Yerindeki Bağlı Hata (%)	Kütle Eylemsizlik Momentindeki BAĞlı Hata (%)
1	0.245	0.069
2	0.162	0.586
3	0.134	0.413
4	1.770	4.600
5	0.520	2.670

[J]	Jakobi matrisi
F(x _i)	Doğrusal olmayan denklem takımını içeren sütun matrisi
ε	Ardışık tekrarı sona erdirecek hata sınırı

COMPUTER AIDED DETERMINATION OF CENTER OF MASS AND MASS MOMENT OF INERTIA

The three significant quantities that are of interest to the dynamic investigation of moving machine parts are mass, center of gravity and mass moment of inertia. Here in this work, a computer programme package has been developed to determine experimentally the last two quantities using computer. Results obtained theoretically on a number of samples with smooth geometries have been compared with those recorded by the computer in the experiment.

KAYNAKÇA

1. Beer, F.P., Johnston, E.R., Dinamik, ÜÇER Matbaacılık, İstanbul, 1979.

2. Akçalı, İ.D., Makina Dinamiği Ders Notları, Ç.Ü. Müh. Mim. Fak., Adana, 1988.
3. Shigley, J.E., Uicker, J.J., Theory of Machines and Mechanisms, McGraw-Hill Book Company Inc., USA, 1981.
4. J.E. Shigley, Theory of Machines, McGraw-Hill Book Company Inc., USA, 1961.
5. Martin, G.H., Kinematics and Dynamics of Machines, McGraw-Hill, Inc., USA, 1969.
6. Hirschhorn, J., Kinematics and Dynamics of Plane Mechanisms, McGraw-Hill Book Company Inc., USA, 1962.
7. G. Dittrich, Maschinendynamik II, Institut für Getriebetechnik und Maschinendynamik Technische Hochschule, Aachen, 1980.
8. Aktaş, Z., Öncül, H., Ural, S., Sayısal Çözümleme, ODTÜ - Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Ankara, 1984.
9. Öz diler, A., Dinamik Veriler için Deney Düzenegi, Bitirme Ödevi, Adana, 1990.