

Beta Fonksiyonları Yardımı ile Yapılan Sheffer Polinomlarını İçeren Operatörlerin Bir Genellemesi

Gürhan İçöz^{*1} , Handenur Özdemir² 

¹Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

²Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Bu çalışmada Sheffer polinomları yardımıyla kurulan bir operatörün genellemesi elde edilmiştir.
- Elde edilen bu genelleme ile diğer operatör genellemelerine ışık tutacaktır.
- Yaklaşım hızlarının karşılaştırılmasına olanak sağlayacaktır.
- Kullanılan modüller sayesinde diğer yazarlara bu modülleri benzer düşünceyle kullanma fırsatı sunacaktır.

Makale Bilgileri

Geliş: 26/06/2025

Kabul: 12/11/2025

Anahtar Kelimeler

Süreklilik Modülü
Sheffer Polinomları
Beta Fonksiyonu

Öz

Bu çalışmada, Sheffer polinomlarını içeren yeni bir Beta tipli operatör sınıfı tanıtılmaktadır. Bu operatörlerin yaklaşım özellikleri, Korovkin tipli teorem yardımıyla incelenmektedir. Ayrıca, yakınsama hızı; süreklilik modülü, ikinci mertebeden süreklilik modülü ve Petree K-fonksiyoneli kullanılarak belirlenmektedir.

A Generalization of Operators Including Sheffer Polynomials with the Help of Beta Functions

Highlights

- In this study, a generalization of an operator established with the help of Sheffer polynomials has been obtained.
- This generalization will shed light on other operator generalizations.
- It will allow comparison of approximation speeds.
- Thanks to the modules used, it will provide other authors with the opportunity to use these modules with similar ideas.

Article Info

Received: 26/06/2025

Accepted: 12/11/2025

Keywords

Modulus of Continuity
Sheffer Polynomials
Beta Function

Abstract

The present paper aims to introduce Beta functions that involve Sheffer polynomials. We investigate approximation properties of our operators with the help of the well-known Korovkin-type theorem and also establish the rate of convergence by using the modulus of continuity, the second-order modulus of smoothness, and Petree's K-functional.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin temel amacı, doğrudan hesaplanamayan nicelikleri, hesaplanabilir niceliklerle yaklaşık olarak ifade etmektir. 1953 yılında Korovkin, sürekli fonksiyonlar üzerinde lineer pozitif operatörler kullanarak yaklaşımın sağlandığını belirlemenin en basit ve etkili yöntemini ortaya koymuştur. Bu gelişmeden sonra birçok matematikçi bu konuda önemli çalışmalar yapmıştır. Mazhar ve Totik [1] ise Szász operatörünü [2] değiştirerek pozitif lineer operatörlerin yeni bir türünü tanımlamışlardır:

$$S_n^*(f; x) = ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-nt} \frac{(nt)^k}{k!} f(t) dt. \quad (1.1)$$

Jakimovski ve Leviatan [3], Appell polinomlarını içeren Szász operatörlerinin bir genellemesini sunmuşlardır. Bilindiği üzere, Appell polinomları $p_k(x)$

$$g(u)e^{ux} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k \quad (1.2)$$

şekilde doğurucu fonksiyona sahiptir. Burada $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$ ($R > 1$) diskinde analitik bir fonksiyondur ve $g(1) \neq 0$ koşulunu sağlar. Doğurucu fonksiyonlardan yararlanarak, [3] de Jakimovski ve Leviatan

$$P_n(f; x) := \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

operatörünü tanımlamıştır.

P_n operatörü, Ciupa [4] tarafından

$$P_n^*(f; x) := \frac{e^{-nx}}{g(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{\lambda+k} f(t) dt \quad (1.3)$$

şeklinde modifiye edilmiştir. Burada Γ , Gamma fonksiyonudur ve $\lambda \geq 0$ 'dır. Özel durum olarak $g(z)=1$ ve $\lambda = 0$ alındığında, (1.3) ile tanımlanan operatör (1.1) ile verilen S_n^* operatörüne dönüşür. $p_k(x)$, Sheffer polinomları olmak üzere, Sheffer polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$A(u)e^{xH(u)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)u^k, |u| < R \quad (1.4)$$

ile tanımlanmaktadır. Burada A ve H polinomları

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, & (a_0 \neq 0) \\ H(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n, & (h_1 \neq 0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$|z| < R$, ($R > 1$) diskinde analitik fonksiyonlardır. Sheffer polinomları

- i. $x \in [0, \infty)$ için $p_k(x) \geq 0$,
- ii. $A(1) \neq 0$ ve $H'(1) = 1$,

iii. $|u| < R$ için (1.4) geçerlidir. (1.5) kuvvet serileri $|z| < R$ ($R > 1$) için yakınsaktır. (1.6)

varsayımları altında, Ismail [5], T_n lineer pozitif operatörlerini

$$T_n(f; x) := \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.7)$$

şeklinde tanıtmış ve ayrıntılı bir şekilde bu operatörün özelliklerini incelemiştir. T_n operatörünün, Sucu ve Büyükyazıcı [6] tarafından integral genellemesi yapılarak

$$T_n^*(f; x) := \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k(nx) \frac{n^{\lambda+k+1}}{\Gamma(\lambda+k+1)} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{\lambda+k} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu çalışmada, T_n^* operatörü modifiye edilerek

$$H_n(f; x) := \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{1}{\beta(j, n+1)} \int_0^{\infty} \frac{s^{j-1}}{(1+s)^{n+j+1}} f(s) ds \quad (1.8)$$

şeklinde yeni bir operatör tanımlanmıştır. Burada, β Beta fonksiyonu, $f \in C[0, \infty)$ ve (1.6) ile verilen varsayımlar gerçekleştiği kabul edilmektedir.

2. H_n OPERATORLERİNİN BAZI YAKLAŞIM SONUÇLARI

Şimdi, ana teoremi belirtmeden önce bazı yardımcı tanımlar ve lemmalar verilecektir.

E sınıfı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$E := \left\{ f: f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} = M \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lemma 2.1. (1.8) ile tanımlanan H_n operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır:

$$H_n(1; x) = 1, \quad (2.1)$$

$$H_n(t; x) = x + \frac{A'(1)}{nA(1)}, \quad (2.2)$$

$$H_n(t^2; x) = \frac{n^2}{n(n-1)} x^2 + \frac{1}{(n-1)} \left[H''(1) + \frac{A'(1)}{A(1)} + 2 \right] x + \frac{1}{n(n-1)} \left[\frac{3A'(1) + A''(1)}{A(1)} \right]. \quad (2.3)$$

İspat. (1.8) ile tanımlanan H_n operatöründe f fonksiyonu sırasıyla $1, t, t^2$ alınır, beta fonksiyonunun tanımı kullanılır ve son olarak da (1.4) ile verilen doğurucu fonksiyonda $t = 1$ ve $x \rightarrow nx$ yazılırsa aşağıdaki eşitliklere kolayca ulaşılır:

$$H_n(1; x) = \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{1}{\beta(j, n+1)} \beta(j, n+1) = 1,$$

$$H_n(t; x) = \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{1}{\beta(j, n+1)} \int_0^{\infty} \frac{s^j}{(1+s)^{n+j+1}} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{1}{\beta(j, n+1)} \beta(j+1, n) \\
&= \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{j}{n} \\
&= \frac{1}{n} \left[nx + \frac{A'(1)}{A(1)} \right] \\
&= x + \frac{A'(1)}{nA(1)}, \\
H_n(t^2; x) &= \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{1}{\beta(j, n+1)} \int_0^{\infty} \frac{s^{j+1}}{(1+s)^{n+j+1}} ds \\
&= \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{1}{\beta(j, n+1)} \beta(j+2, n-1) \\
&= \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{j^2 + j}{n(n-1)} \\
&= \frac{n}{n-1} x^2 + \frac{1}{n-1} \left[H''(1) + \frac{A'(1)}{A(1)} + 2 \right] x + \frac{1}{n(n-1)} \left[\frac{2A'(1) + A''(1)}{A(1)} \right].
\end{aligned}$$

Lemma 2.2. Lemma 2.1 kullanılarak, (1.8) ile verilen H_n operatörlerinin merkezi momentleri şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
H_n((t-x); x) &= \frac{A'(1)}{nA(1)}, \\
H_n((t-x)^2; x) &= \frac{1}{n-1} x^2 + \left[\frac{1}{n-1} \left(H''(1) + \frac{A'(1)}{A(1)} + 2 \right) - \frac{2A'(1)}{nA(1)} \right] x \\
&\quad + \frac{2A'(1) + A''(1)}{n(n-1)A(1)}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Tanım 2.1. $\Omega(f; \delta)$ fonksiyonu, $f \in \bar{C}[0, \infty)$ fonksiyonunun süreklilik modülüdür ve

$$\Omega(f; \delta) := \sup_{\substack{x, y \in [0, \infty) \\ |x-y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)|$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\bar{C}[0, \infty)$, düzgün sürekli fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.2. Peetre K-fonksiyoneli

$$K(f; \delta) := \inf_{g \in W_{\infty}^2} \{ \|f - g\|_{\bar{C}_B} + \delta \|g\|_{W_{\infty}^2} \}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $W_{\infty}^2 := \{g \in \bar{C}_B[0, \infty): g', g'' \in \bar{C}_B[0, \infty)\}$ şeklindedir.

İkinci dereceden süreklilik modülü

$$\Omega_2(f; \delta) := \sup_{\substack{x \in [0, \infty) \\ |h| \leq \delta}} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Peetre K-fonksiyonu ile ikinci mertebeden süreklilik modülü arasında

$$K(f; \delta) \leq M\{\Omega_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1, \delta) \|f\|_{\bar{C}_B}\}$$

eşitsizliğinin mevcut olduğu bilinmektedir. $\bar{C}_B[0, \infty)$, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı ve reel değerli, sınırlı ve düzgün sürekliliğe sahip fonksiyonlar sınıfıdır ve

$$\|f\|_{\bar{C}_B} := \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$$

normuna sahiptir.

Lemma 2.3. (Gavrea ve Rasa [7]), L_n operatörü, $L_n(1; x) = 1$ eşitliğini sağlayan ve $\{L_n(g; x)\}_{n \geq 1}$, $g \in C^2[0, a]$ için lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Bu durumda,

$$|L_n(g; x) - g(x)| \leq \|g'\| \sqrt{L_n((t-x)^2; x)} + \frac{1}{2} \|g''\| L_n((t-x)^2; x)$$

eşitsizliği sağlanır. f , ikinci mertebeden Steklov fonksiyonu olsun. Zhuk [8] tarafından verilen aşağıdaki sonuç kullanılacaktır. Eğer $f \in C[a, b]$ ve $h \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$ ise,

$$\|f_h - f\| \leq \frac{3}{4} \Omega_2(f; h), \quad (2.5)$$

$$\|f_h''\| \leq \frac{3}{2h^2} \Omega_2(f; h), \quad (2.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır. (1.8) ile belirtilen H_n operatörünün yaklaşım özellikleri, bir sonraki kısmın konusunu oluşturmaktadır.

Temel sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1. $f \in \bar{C}[0, \infty) \cap E$ ve her $x \in [0, \infty)$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(f; x) = f(x)$$

eşitliği gerçekleşir. Yakınsama $[0, \infty)$ aralığının her kompakt alt kümesinde düzgündür.

İspat. Lemma 2.1 kullanılırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(\zeta^i; x) = x^i, (i = 0, 1, 2)$$

kolaylıkla elde edilir. Korovkin teoreminin uygulanmasıyla, $[0, \infty)$ aralığının kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaklık elde edilir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Genellikle, yaklaşım teorisinde hata kestirimleri; süreklilik modülü, ikinci mertebeden süreklilik modülü ve Peetre K-fonksiyoneli cinsinden verilir. Bu nedenle, H_n operatörleriyle f fonksiyonuna olan yaklaşım özellikleri ifade edilir.

Teorem 2.2. Eğer $f \in \bar{C}[0, \infty) \cap E$ ise

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq 2\Omega(f; \varsigma_n(x))$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\varsigma_n(x) = \sqrt{H_n((t-x)^2; x)}$ dir.

İspat. (2.1) eşitliği, süreklilik modülünün özelliği ve basit hesaplamalarla

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \left(1 + \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{\beta(j, n+1)} \int_0^{\infty} \frac{s^{j-1}}{(1+s)^{n+j+1}} |s-x| ds \right) \Omega(f; \delta)$$

olduğu görülür. Cauchy-Schwarz eşitsizliği yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integral terimi için uygulanırsa

$$\begin{aligned} |H_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \left(1 + \frac{1}{\varsigma} \frac{1}{\beta(j, n+1)} \int_0^{\infty} \frac{s^{j-1}}{(1+s)^{n+j+1}} (s-x)^2 ds \right) \Omega(f; \delta) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\varsigma} \frac{e^{-nxH(1)}}{A(1)} \sum_{k=0}^{\infty} j_k(nx) \frac{1}{\beta(j, n+1)} \int_0^{\infty} \frac{s^{j-1}}{(1+s)^{n+j+1}} (s-x)^2 ds \right) \Omega(f; \delta) \quad (2.7) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte, seriler için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini tekrar kullanılırsa

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\varsigma} \sqrt{H_n((t-x)^2; x)} \right\} \Omega(f; \delta)$$

bulunur. Burada $\varsigma_n(x) = \sqrt{H_n((t-x)^2; x)}$ şeklinde seçilirse istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi, H_n operatörlerinin yakınsama hızı, ikinci dereceden süreklilik modülü yardımıyla hesaplama yapılacaktır.

Teorem 2.3. $f \in \bar{C}[0, \infty)$ için, Ω_2 ikinci dereceden süreklilik modülü yardımıyla yakınsama hızı

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{2}{a} h^2 \|f\| + \frac{3}{4} (2 + a + h^2) \Omega_2(f; h)$$

ile elde edilir. Burada $h := \sqrt[4]{H_n((t-x)^2; x)}$ dir.

İspat. f fonksiyonuna bağlı ikinci mertebeden Steklov fonksiyonu f_h olarak tanımlanmaktadır. Burada $H_n(1; x) = 1$ dir. O takdirde,

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq 2\|f_h - f\| + |H_n(f_h; x) - f_h(x)| \quad (2.8)$$

eşitsizliği elde edilir. Landau eşitsizliği ve Steklov fonksiyonları için bilinen sonuçlar uygulanırsa

$$\begin{aligned}\|f'_h\| &\leq \frac{2}{a}\|f_h\| + \frac{a}{2}\|f''_h\| \\ &\leq \frac{2}{a}\|f\| + \frac{3a}{4h^2}\Omega_2(f; h)\end{aligned}\quad (2.9)$$

eşitsizliği bulunur. $f_h \in C^2[0, a]$ olması nedeniyle, Lemma 2.3, (2.6) ve (2.9) kullanılırsa

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq \left(\frac{2}{a}\|f\| + \frac{3a}{4h^2}\Omega_2(f; h)\right) \sqrt{H_n((t-x)^2; x)} + \frac{3}{4h^2} H_n((t-x)^2; x) \Omega_2(f; h) \quad (2.10)$$

olur. (2.10) eşitsizliğinde $h = \sqrt[4]{H_n((t-x)^2; x)}$ seçilirse ve ardından (2.8) eşitsizliğindeki son ifade dikkate alınır, ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca, f fonksiyonu düzgün bir fonksiyon olduğunda, aşağıdaki teorem f için yaklaşık olarak kestirimi için bir tahmin verir.

Teorem 2.4. Eğer $f \in W_\infty^2$ ise

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \mu(x) \|f\|_{W_\infty^2} \quad (2.11)$$

elde edilir. Burada

$$\mu(x) := \frac{1}{n(n-1)}x^2 + \left[\frac{1}{(n-1)}\left(H''(1) + \frac{A'(1)}{A(1)} + 2\right) - \frac{2A'(1)}{nA(1)}\right]x + \frac{1}{n(n-1)}\left[(n+2)\frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{A''(1)}{A(1)}\right] \quad (2.12)$$

şeklinde seçilmiştir.

İspat. Taylor açılımı kullanılarak

$$f(\xi) = f(x) + f'(x)(\xi - x) + \frac{f''(\eta)}{2}(\xi - x)^2$$

yazılabilir. H_n operatörünün lineerlik özelliği sayesinde

$$H_n(f; x) - f(x) = f'(x)H_n(\xi - x; x) + \frac{f''(\eta)}{2}H_n((\xi - x)^2; x)$$

olur. Bu durumda Lemma 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}&|H_n(f; x) - f(x)| \\ &\leq \frac{A'(1)}{nA(1)}\|f'\|_{\bar{C}_B} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n-1}x^2 + \left[\frac{1}{n-1}\left(H''(1) + \frac{A'(1)}{A(1)} + 2\right) - \frac{2A'(1)}{nA(1)}\right]x + \frac{2A'(1) + A''(1)}{n(n-1)A(1)}\right\}\|f''\|_{\bar{C}_B}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte yapılacak basit bir hesapla (2.11) sonucu elde edilir.

Bir sonraki teorem, Peetre K-fonksiyoneli aracılığıyla nicel bir tahmin içermektedir.

Teorem 2.5. Her $f \in \bar{C}[0, \infty)$ için

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq 2M(\Omega_2(f; h) + \min(1, h^2) \|f'\|_{\bar{C}_B})$$

dir. Burada $h := \sqrt{\frac{\mu(x)}{2n}}$ ve $\mu(x)$ ise (2.12) de tanımlandığı şekildedir.

İspat. $g \in W_{\infty}^2$ olsun. Teorem 2.4 den

$$\begin{aligned} & |H_n(f; x) - f(x)| \\ & \leq 2 \left\{ \|f - g\|_{\bar{C}_B} \right. \\ & \quad + \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{n-1} x^2 + \left[\frac{1}{n-1} \left(H''(1) + \frac{A'(1)}{A(1)} + 2 \right) - \frac{2A'(1)}{nA(1)} \right] x \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{n(n-1)} \left[(n+2) \frac{A'(1)}{A(1)} + \frac{A''(1)}{A(1)} \right] \right] \|g\|_{W_{\infty}^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

eşitsizliği açıkça elde edilir. (2.12) eşitsizliğinin sol tarafı g fonksiyonuna bağlı olmadığından

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq 2K \left(f; \frac{\mu(x)}{2n} \right).$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $K(f; t)$ Peetre K-fonksiyoneli. Peetre K-fonksiyoneli ile ikinci mertebeden

süreklilik modülü arasındaki bağıntı kullanılır ve $h := \sqrt{\frac{\mu(x)}{2n}}$ şeklinde seçilirse

$$|H_n(f; x) - f(x)| \leq 2M(\Omega_2(f; h) + \min(1, h^2) \|f\|_{\bar{C}_B})$$

elde edilir.

YAZARLAR'IN KATKI ORANLARI

Gürhan İçöz: Metodoloji, İçerik analizi, Makalenin yazımı-Orijinal taslak, Makalenin yazımı-inceleme ve düzenleme. **Handenur Özdemir:** İçerik analizi, Araştırma, Makalenin yazımı-Orijinal taslak.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Mazhar, S. M., & Totik, V. (1985). Approximation by modified Szasz operators. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 49, 257–269.
- [2] Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45, 239–245.
- [3] Jakimovski, A., & Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica (Cluj)*, 11, 97–103.
- [4] Ciupa, A. (1995). A class of integral Favard–Szász type operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 40(1), 39–47.
- [5] Ismail, M. E. H. (1974). On a generalization of Szász operators. *Mathematica (Cluj)*, 16(2), 259–267.
- [6] Sucu, S., & Büyükyazıcı, İ. (2012). Integral operators containing Sheffer polynomials. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 4(4), 56–66.
- [7] Gavrea, I., & Rasa, I. (1993). Remarks on some quantitative Korovkin-type results. *Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation*, 22(2), 173–176.
- [8] Zhuk, V. V. (1989). Functions of the Lip1 class and S. N. Bernstein's polynomials. *Vestnik Leningradskogo Universiteta. Matematika, Mekhanika, Astronomiya*, 1, 25–30.