

Elmas Çizgelerin Bazı Ters Dereceye Dayalı Topolojik İndekslerinin Hesaplanması

Mukaddes ÖKTEN TURACI ^{1*}

¹Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 20160, Denizli

¹<https://orcid.org/0000-0001-9376-3194>

*Sorumlu yazar: moktenturaci@pau.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihiçesi:

Geliş tarihi: 03.07.2025

Kabul tarihi: 23.10.2025

Online Yayınlanma: 16.03.2026

Anahtar Kelimeler:

Matematiksel kimya

Kimyasal çizge teorisi

Dereceye dayalı topolojik indeksler

Ters topolojik indeksler

Elmas çizgeleri

ÖZ

Fen bilimleri, mühendislik bilimleri ve sosyal bilimler gibi birçok farklı bilim dalında çizge teorisi üzerine çalışmalar yapılmaktadır. Özellikle matematik, kimya, bilgi ve ağ analizi alanlarında çizge teorisinin uygulamaları görülmektedir. Son zamanlarda matematiksel kimya alanında bir molekülün kimyasal analizi çizge teorik parametreleri ile hesaplanabilmektedir. Bu parametreler topolojik çizge indeksleri olarak tanımlanır. Bu indekslerin farklı özelliklere göre tanımları vardır, örneğin dereceye dayalı topolojik indeksler ve dış merkezliğe dayalı topolojik indeksler literatürde çalışılmaktadır. Son zamanlarda ters topolojik indeksler tanımlanmıştır. Bu çalışmada, elmas çizgelerin bazı önemli ters dereceye dayalı topolojik indeks değerleri incelenmiş ve bu indeksler için kapalı formüller elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar bir grafik yardımıyla karşılaştırılmıştır. Elmas çizgelerin çeşitli fizikokimyasal özelliklerinin modellenmesi ve tahmin edilmesinde elde edilen bu sayısal değerler önemli bir katkı sağlamaktadır.

Computing Some Reverse Degree Based Topological Indices of Diamond Graphs

Research Article

Article History:

Received: 03.07.2025

Accepted: 23.10.2025

Published online: 16.03.2026

Keywords:

Mathematical chemistry

Chemical graph theory

Degree-based topological indices

Reverse topological indices

Diamond graphs

ABSTRACT

Graph theory is studied in many different branches of science such as science, engineering and social sciences. Applications of graph theory are seen especially in mathematics, chemistry, information and network analysis. Recently, in mathematical chemistry, chemical analysis of a molecule can be calculated with graph theoretical parameters. These parameters are defined as topological graph indices. These indices have definitions according to different properties, for example, degree-based topological indices and eccentricity-based topological indices are studied in the literature. Recently, reverse topological indices have been defined. In this study, some important reverse topological indices of diamond graphs have been studied and closed formulas have been obtained for them. The results obtained have been compared with a graphic. These numerical values contribute significantly to the modeling and prediction of various physicochemical properties of diamond graphs.

To Cite: Ökten Turacı M. Elmas Çizgelerin Bazı Ters Dereceye Dayalı Topolojik İndekslerinin Hesaplanması. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2026; 9(2): 857-870.

1. Giriş

Çizge teorisinin, doğa bilimlerinde, özellikle de matematiksel kimyada önemli bir çalışma alanı haline geldiği kimya ve biyoloji gibi alanlarda yaygın bir kullanım alanı bulmaktadır. Kimyasal çizge teorisinde, moleküler yapılar ile kimyasal davranışları, fiziksel özellikleri veya biyolojik etkileri arasında ilişkiler kurmak için çok sayıda çizge parametresi kullanılmıştır (Wiener, 1947). Bu

parametreler genellikle topolojik indeksler olarak adlandırılır. Bu indekslerin geniş bir sınıfı, mesafe ve tepe derecesi gibi metriklere dayanmaktadır. Esasen, topolojik indeksler, çizge izomorfizmi altında değişmeden kalan çizgelerin sayısal tanımlayıcıları olarak da ifade edilebilir. Son yıllarda topolojik indekslere olan ilgi artmıştır. Atomik düzenlemelerden ve bağlantılardan türetilmiş olan bu sayısal değerler, moleküler özelliklerin tahmin edilmesinde etkili olmuştur (Wiener, 1947; Dobrynin ve ark., 2001). Literatürde şu anda her biri moleküler fizikokimyasal özelliklerin analizine katkıda bulunan onlarca farklı topolojik indeks tanımlanmış bulunmaktadır. Moleküler yapılar tipik olarak tepelerin, atomlara ve ayrıtların, kimyasal bağlara karşılık geldiği çizgelerle temsil edilirler (Randic, 1975; Todeschini ve Consonni, 2000; Balaban ve Devillers, 2014; Çolakoğlu Havare, 2024). Ayrıca bu tür indeksler, ağ zedelenebilirliği ve dayanıklılığı ölçümlerine benzer şekilde, moleküler çizgelerin yapısal dayanıklılığını veya sağlamlığını değerlendirmek için kullanılırlar (Turacı ve Ökten, 2015).

$G=(V(G),E(G))$, $n=|V(G)|$ ve $m=|E(G)|$ olmak üzere n - tepeli ve m - ayrıtlı bir çizge olsun. Bu bölümde, makale boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılmaktadır. $v \in V(G)$ olmak üzere, v tepesinin açık komşuluğu olan küme $N_G(v)=\{u \in V \mid uv \in E(G)\}$ şeklinde tanımlanır ve v tepesine komşu olan tüm tepeleri içerir. Bu v tepesinin kapalı komşuluğu olan küme ise $N_G[v]=N_G(v) \cup \{v\}$ şeklinde ifade edilir ve v tepesinin kendisini ve ona komşu olan tüm tepelerini içerir. Bir v tepesinin derecesi $\deg_G(v)$ ile ifade edilir ve bu v tepesine bitişik ayrıtların sayısıdır veya bu v tepesinin açık komşuluk kümesinin elemanlarının sayısıdır (Chartrand ve Lesniak, 1996). Bir G çizgesinin en büyük ve en küçük dereceli tepesi sırasıyla $\Delta(G)$ ve $\delta(G)$ ile ifade edilir. Bununla beraber bir $v \in V(G)$ tepesinin ters derecesi $\deg_G(v)$ ile gösterilir ve $\deg_G(v)=\Delta(G)-\deg_G(v)+1$ şeklinde tanımlanır (Ediz ve Cancan, 2016; Gowtham ve Husin, 2023).

Bir G çizgesinde herhangi iki u ve v tepelerini ele alalım. u ve v tepeleri arasındaki mesafe, $d_G(u,v)$ ile gösterilir ve G çizgesinde bu iki tepeyi birbirine bağlayan en kısa yolun uzunluğunu ifade eder. Ayrıca, $diam(G)$, G 'nin çapı olarak ifade edilir ve G 'deki tepe çiftleri arasındaki tüm olası en kısa yollar arasındaki en büyük olanının uzunluğu olarak tanımlanır. İlgili bir diğer kavram ise, $\mathcal{E}_G(u)$ ile gösterilen ve u tepesinden G 'deki herhangi bir v tepesine olan maksimum uzaklık olarak tanımlanan u tepesinin dış merkezliliğidir (Chartrand ve Lesniak, 1996).

$n \geq 2$ olmak üzere, $L_n \cong P_n \square P_2$ bir Ladder çizge olsun. Burada, L_n 'nin tepe ve ayrıt kümeleri $V(L_n)=\{v_i, u_i : i=1,2,...,n\}$ ve $E(L_n)=\{v_i v_{i+1}, u_i u_{i+1} : i=1,2,...,n-1\} \cup \{v_i u_i : i=1,2,...,n\}$ şeklinde tanımlanır (Gallian, 2014). L_n Ladder çizgesine $u_i v_{i+1}, i=1,2,...,n-1$ ayrıtları eklenirse ve u_n tepesine bitişik $u_{n-1} u_n$ ve $u_n v_n$ ayrıtları L_n 'den kaldırılırsa üçgen Ladder çizgesi TL_n elde edilmiş olur. Bir Br_n , $n \geq 3$, elmas çizgesi tek bir w tepesinin TL_n 'deki tüm v_i , $i=1,2,...,n$, tepelerinin birleşmesiyle oluşur (Shulhany ve Salman, 2015; Hinding, 2018).

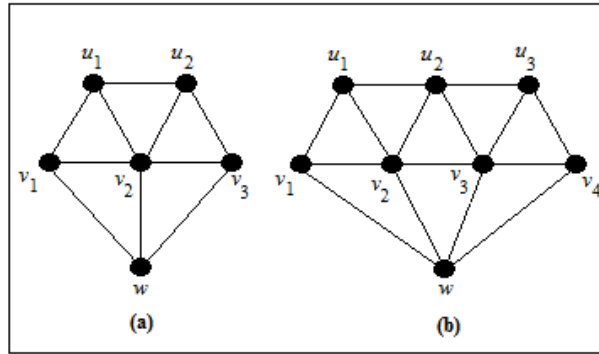
Br_n elmas çizgesinin tepeler kümesi $V(Br_n) = \{w\} \cup \{v_i : i=1,2,\dots,n\} \cup \{u_i : i=1,2,\dots,n-1\}$ şeklindedir.

Bununla beraber, Br_n 'nin ayrıtlar kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

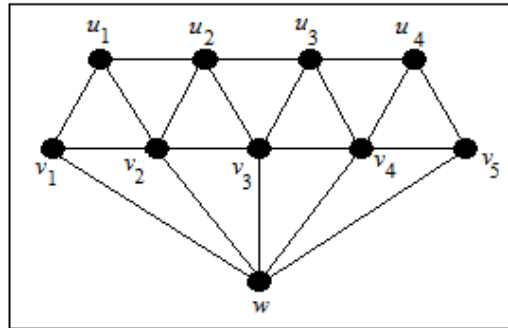
$$E(Br_n) = \{u_i u_{i+1} : i=1,2,\dots,n-2\} \cup \{v_i v_{i+1} : i=1,2,\dots,n-1\} \\ \cup \{u_i v_i : i=1,2,\dots,n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} : i=1,2,\dots,n-1\} \cup \{w v_i : i=1,2,\dots,n\}.$$

Böylece, Br_n 'nin tepe sayısı $|V(Br_n)| = 2n$ ve ayrıtlar sayısı $|E(Br_n)| = 5n - 5$ şeklindedir.

Şekil 1'de Br_3 ve Br_4 elmas çizgeleri gösterilmektedir, benzer olarak Şekil 2'de Br_5 elmas çizgesi gösterilmektedir.



Şekil 1. (a) 6 tepeli, 10 ayrıtlı Br_3 çizgesi (b) 8 tepeli, 15 ayrıtlı Br_4 çizgesi (Ökten Turacı, 2018)



Şekil 2. 10 tepeli, 20 ayrıtlı Br_5 çizgesi (Ökten Turacı, 2018)

Kimya alanında tanıtılan en eski topolojik indeks, 1947 yılında kimyager Harold Wiener tarafından formüle edilen Wiener indeksi olarak bilinir (Wiener, 1947). Bu indeks, alkan bileşiklerinin kaynama noktaları ile güçlü bir korelasyon göstermektedir. Matematiksel olarak Wiener indeksi, bir G çizgesindeki tüm tepe çiftleri arasındaki mesafelerin toplamının yarısı olarak hesaplanır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$W(G) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_G(v_i, v_j) \right). \quad (1)$$

Wiener indeksinin tanımlanmasının ardından, birçoğu çizgelerin belirli yapısal özelliklerine göre kategorize edilen çok sayıda topolojik indeks tanımlanmıştır. Bu indekslerdeki önemli bir husus, atomları temsil eden herhangi iki tepe veya kimyasal bağları temsil eden kenarlar arasındaki mesafelerin belirlenmesini içermektedir. Bununla beraber, temel bileşenler olarak tepe derecelerini ve dışmerkezlilik ölçümlerini içeren çeşitli topolojik indeksler tanımlanmıştır. Örneğin, bağlantısal dışmerkezlilik indeksi (Gupta ve ark., 2000) birinci Zagreb indeksi ve ikinci Zagreb indeksi (Gutman ve Trinajstić, 1972; Gutman ve ark., 1975), birinci ve ikinci Zagreb dışmerkezlilik indeksleri (Vukicević ve Graovac, 2010), birinci ve ikinci ters Zagreb indeksleri (Ediz ve Cancan, 2016), ters toplam-bağlantılılık indeksi (Kulli, 2017a), ters aritmetik-geometrik ve ters geometrik-aritmetik indeksler (Kulli, 2017b; Kulli, 2018b), ters Sombor indeksi (Kulli, 2017a; Swamy ve ark., 2022), ters Nirmala indeksi (Gowtham, 2023). Ayrıca, (Estrada ve ark., 1998; Gupta ve ark., 2000; Vukicević ve Fortula, 2009; Vukicević ve Graovac, 2010; Andova ve ark., 2012; Graovac ve ark., 2015; Turacı ve Ökten, 2015; Aslan, 2015a; Aslan, 2015b; Aslan ve Kürkçü, 2018; Kulli, 2018a; Ökten Turacı, 2020) çalışmalarında topolojik indekslerle ilgili farklı çalışmalar görülebilir. Bunlara ek olarak bazı çizge ailelerinin topolojik özellikleri ve topolojik indeksler arasındaki ilişkileri içeren çalışmalarda literatürde yer almaktadır. Örneğin, bir çizge ailesinin hamiltonyenlik özellikleri ile topolojik indeksler arasındaki ilişkilerin elde edildiği sonuçlar (Jahanbani ve Sheikholeslam, 2023; Li, 2024; Li, 2025) çalışmalarında görülebilir.

2. Materyal ve Yöntemler

Kimyasal çizge teorisi alanındaki son gelişmelerde, ters derecelere dayalı olarak ifade edilen topolojik indekslere odaklanan çalışmalar giderek artmaktadır. Ters tepe dereceleri aracılığıyla tanımlanan dereceye dayalı sayısal tanımlayıcıların temel kavramı ilk olarak 2003 yılında Milan Randić tarafından tanımlanmıştır (Ahmad ve ark., 2023). Bu çalışmada, bir çizgenin tümleyen çizgesinin tepelerinin derecelerinden türetilen yeni bir topolojik tanımlayıcılar sınıfı önerilmiş ve bunların moleküler yapıların çeşitli fizikokimyasal özelliklerinin modellenmesi ve tahmin edilmesinde uygulanabilirliği gösterilmiştir. Bu çalışmadan sonra, ters dereceye dayalı tanımlayıcılar önemli bir araştırma alanı haline gelmiş ve hem matematiksel hem de kimyasal olarak çok sayıda yeni indeks önerilmesine ve araştırılmasına yol açmıştır (Ahmad ve ark., 2023). Bu indeksler, özellikle kaynama noktaları, yüzey gerilimi ve organik bileşiklerin çözünürlüğü gibi moleküler özelliklerin tahmininde olmak üzere çeşitli uygulamalarda önemli bir fayda sağlamıştır (Koam ve ark., 2022; Gowtham ve Husin, 2023). Ters dereceye dayalı topolojik indeksler benzersiz bir bakış açısı sunmaktadır ve özellikle kemoinformatik, ekoloji, ağ analizi ve iletişim ağları gibi çeşitli alanlarda kullanılmaktadır (Kulli, 2018a). Aşağıda, bazı ters dereceye dayalı topolojik indekslere ilişkin tanımlar verilmiştir.

Tanım 1. (Ediz ve Cancan, 2016) *Bir G çizgesinin birinci ve ikinci ters Zagreb indeksleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$RM_1(G) = \sum_{u \in V(G)} (\deg_G(u))^2, \quad (2)$$

$$RM_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} (\deg_G(u) \cdot \deg_G(v)). \quad (3)$$

Tanım 2. (Kulli, 2017a) Bir G çizgesinin ters toplam- bağlantılılık indeksi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$RSCI(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg_G(u) + \deg_G(v)}}. \quad (4)$$

Tanım 3. (Kulli, 2017b; Kulli, 2018b) Bir G çizgesinin ters aritmetik-geometrik ve ters geometrik-aritmetik indeksleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$RAG(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{\deg_G(u) + \deg_G(v)}{2\sqrt{\deg_G(u) \cdot \deg_G(v)}}, \quad (5)$$

$$RGA(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{\deg_G(u) \cdot \deg_G(v)}}{\deg_G(u) + \deg_G(v)}. \quad (6)$$

Tanım 4. (Kulli, 2017a; Swamy ve ark., 2022) Bir G çizgesinin ters Sombor indeksi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$RSQ(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{(\deg_G(u))^2 + (\deg_G(v))^2}. \quad (7)$$

Tanım 5. (Gowtham, 2023) Bir G çizgesinin ters Nirmala indeksi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$RN(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\deg_G(u) + \deg_G(v)}. \quad (8)$$

Bu çalışmada, birinci ve ikinci ters Zagreb indeks değerleri, ters toplam-bağlantı indeks değeri, ters aritmetik-geometrik indeks değeri, ters geometrik-aritmetik indeks değeri, ters Sombor indeks değeri ve ters Nirmala indeks değeri gibi bazı ters tepe derecesine dayalı topolojik indeksler elmas çizgiler için hesaplanmış ve karşılaştırmalar yapılmıştır.

3. Sonuçlar ve Tartışma

Bu bölümde, elmas çizgilerin birinci ve ikinci ters Zagreb indeks değerleri, ters toplam-bağlantı indeks değeri, ters aritmetik-geometrik indeks değeri, ters geometrik-aritmetik indeks değeri, ters Sombor indeks değeri ve ters Nirmala indeks değeri analiz edilmiş ve tepe sayısına bağlı genel formüller türetilmiştir. Şimdi, elmas çizgilerin tepe ve ayrıtlar kümelerinin parçalanışlar Tablo 1 ve Tablo 2’de verilecektir.

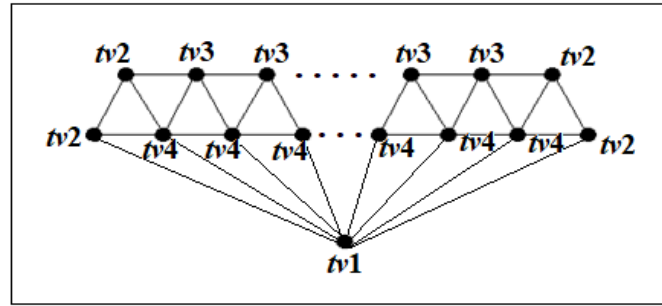
Br_n elmas çizgesinde herhangi bir tepe $v \in V(Br_n)$ olsun. Br_n elmas çizgesinin tepeler kümesinin parçalanışı, tepelerin tiplerine, sıklıklarına ve ters derece değerlerine göre Tablo 1’de verilmektedir. Ayrıca, Br_n elmas çizgesinin tepelerinin tipleri Şekil 3’de gösterilmektedir. Bununla beraber, Br_n

elmas çizgesinde herhangi bir ayrıt $(u, v) \in E(Br_n)$ olsun. Br_n elmas çizgesinin ayrıtlar kümesinin parçalanışı, ayrıtların tiplerine, sıklıklarına ve ayrıtların bağlı olduğu tepelerin ters derece değerlerine göre Tablo 2’de verilmektedir.

Tablo 1. Br_n elmas çizgesinin tepeler kümesinin parçalanışı

$v \in V(Br_n)$ tepelerinin tipleri	Sıklık	$\deg_G(v)$
$tv1$	1	1
$tv2$	4	$n-2$
$tv3$	$n-3$	$n-3$
$tv4$	$n-2$	$n-4$

Şekil 3’de, Br_n çizgesinin tepelerinin tipleri gösterilmektedir.



Şekil 3. Br_n elmas çizgesinin tepelerinin tipleri

Tablo 2. Br_n elmas çizgesinin ayrıtlar kümesinin parçalanışı

$(u, v) \in E(Br_n)$ ayrıtlarının tipleri	Sıklık	$(\deg_G(u), \deg_G(v))$
$(tv1, tv2)$	2	$(1, n-2)$
$(tv1, tv4)$	$n-2$	$(1, n-4)$
$(tv2, tv4)$	4	$(n-2, n-4)$
$(tv4, tv4)$	$n-3$	$(n-4, n-4)$
$(tv2, tv3)$	2	$(n-2, n-3)$
$(tv3, tv3)$	$n-4$	$(n-3, n-3)$
$(tv2, tv2)$	2	$(n-2, n-2)$
$(tv3, tv4)$	$2n-6$	$(n-3, n-4)$

Teorem 1. $n \geq 5$ olmak üzere Br_n , $2n$ tepeli elmas çizge olsun. Br_n elmas çizgesinin birinci ve ikinci ters Zagreb indeks değerleri $RM_1(Br_n) = 2n^3 - 15n^2 + 43n - 42$ ve $RM_2(Br_n) = 4n^3 - 32n^2 + 93n - 100$ 'dir.

İspat. $RM_1(Br_n)$ ve $RM_2(Br_n)$ değerleri, (2) ve (3) formülleri kullanılarak hesaplanır. Bu değerleri hesaplamak için tepe ve ayrıt kümelerinin parçalanışları Tablo 1 ve Tablo 2'deki gibi kullanıldığında:

$$\begin{aligned} RM_1(G) &= \sum_{u \in V(G)} (\deg_G(u))^2 \\ &= ((1.1) + 4.(n-2) + (n-3).(n-3) + (n-2).(n-4)) \\ &= 2n^3 - 15n^2 + 43n - 42, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} RM_2(G) &= \sum_{uv \in E(G)} (\deg_G(u). \deg_G(v)) \\ &= 2(1.(n-2)) + (n-2).(1.(n-4)) + 4((n-2).(n-4)) + (n-3).((n-4).(n-4)) \\ &\quad + 2((n-2).(n-3)) + (n-4).((n-3).(n-3)) + 2((n-2).(n-2)) + (2n-6).((n-3).(n-4)). \\ &= 4n^3 - 32n^2 + 93n - 100 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

İspat tamamlanmıştır. $\square$

Teorem 2. $n \geq 5$ olmak üzere Br_n , $2n$ tepeli elmas çizge olsun. Br_n elmas çizgesinin ters-toplam bağlantılılık indeks değeri:

$$RSCI(Br_n) = \frac{2}{\sqrt{n-1}} + \frac{n-2}{\sqrt{n-3}} + \frac{2}{\sqrt{2n-4}} + \frac{2}{\sqrt{2n-5}} + \frac{n}{\sqrt{2n-6}} + \frac{2n-6}{\sqrt{2n-7}} + \frac{n-3}{\sqrt{2n-8}}, \text{ dir.}$$

İspat. $RSCI(Br_n)$ değeri, (4) formülü ve Tablo 2'deki ayrıtlar kümesinin parçalanışları kullanılarak hesaplanır.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} RSCI(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg_G(u) + \deg_G(v)}} \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+(n-2)}}\right) + (n-2).\left(\frac{1}{\sqrt{1+(n-4)}}\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{(n-2)+(n-4)}}\right) \\ &\quad + (n-3).\left(\frac{1}{\sqrt{(n-4)+(n-4)}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{(n-2)+(n-3)}}\right) + (n-4).\left(\frac{1}{\sqrt{(n-3)+(n-3)}}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{\sqrt{(n-2)+(n-2)}}\right) + (2n-6).\left(\frac{1}{\sqrt{(n-3)+(n-4)}}\right). \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n-1}} + \frac{n-2}{\sqrt{n-3}} + \frac{2}{\sqrt{2n-4}} + \frac{2}{\sqrt{2n-5}} + \frac{n}{\sqrt{2n-6}} + \frac{2n-6}{\sqrt{2n-7}} + \frac{n-3}{\sqrt{2n-8}} \text{ bulunur.}$$

İspat tamamlanmıştır. $\square$

Teorem 3. $n \geq 5$ olmak üzere Br_n , $2n$ tepeli elmas çizge olsun. Br_n elmas çizgesinin ters aritmetik-geometrik ve ters geometrik-aritmetik indeks değerleri:

$$RAG(Br_n) = 2n-5 + \frac{n-1}{\sqrt{n-2}} + \frac{n^2-5n+6}{2\sqrt{n-4}} + \frac{4n-12}{\sqrt{n^2-6n+8}} + \frac{2n-5}{\sqrt{n^2-5n+6}} + \frac{2n^2-13n+21}{\sqrt{n^2-7n+12}}$$

ve

$$RGA(Br_n) = 2n-5 + \frac{4\sqrt{n-2}}{n-1} + \frac{(2n-4)\sqrt{n-4}}{n-3} + \frac{8\sqrt{n^2-6n+8}}{2n-6} + \frac{4\sqrt{n^2-5n+6}}{2n-5} + \frac{(4n-12)\sqrt{n^2-7n+12}}{2n-7},$$

dir.

İspat. $RAG(Br_n)$ ve $RGA(Br_n)$ değerleri, (5) ve (6) formülleri, ayrıca Tablo 2'deki ayrıtlar kümesinin parçalanışları kullanılarak hesaplanır. Böylece,

$$\begin{aligned} RAG(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{\deg_G(u) + \deg_G(v)}{2\sqrt{\deg_G(u) \cdot \deg_G(v)}} \\ &= 2 \left(\frac{(1+(n-2))}{2\sqrt{1 \cdot (n-2)}} \right) + (n-2) \cdot \left(\frac{(1+(n-4))}{2\sqrt{1 \cdot (n-4)}} \right) \\ &\quad + 4 \cdot \left(\frac{((n-2)+(n-4))}{2\sqrt{(n-2) \cdot (n-4)}} \right) + (n-3) \cdot \left(\frac{((n-4)+(n-4))}{2\sqrt{(n-4) \cdot (n-4)}} \right) \\ &\quad + 2 \cdot \left(\frac{((n-2)+(n-3))}{2\sqrt{(n-2) \cdot (n-3)}} \right) + (n-4) \cdot \left(\frac{((n-3)+(n-3))}{2\sqrt{(n-3) \cdot (n-3)}} \right) \\ &\quad + 2 \cdot \left(\frac{((n-2)+(n-2))}{2\sqrt{(n-2) \cdot (n-2)}} \right) + (2n-6) \cdot \left(\frac{((n-3)+(n-4))}{2\sqrt{(n-3) \cdot (n-4)}} \right). \\ &= 2n-5 + \frac{n-1}{\sqrt{n-2}} + \frac{n^2-5n+6}{2\sqrt{n-4}} + \frac{4n-12}{\sqrt{n^2-6n+8}} + \frac{2n-5}{\sqrt{n^2-5n+6}} + \frac{2n^2-13n+21}{\sqrt{n^2-7n+12}}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} RGA(G) &= \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{\deg_G(u) \cdot \deg_G(v)}}{\deg_G(u) + \deg_G(v)} \\ &= 2 \left(\frac{2\sqrt{1 \cdot (n-2)}}{(1+(n-2))} \right) + (n-2) \cdot \left(\frac{2\sqrt{1 \cdot (n-4)}}{(1+(n-4))} \right) \\ &\quad + 4 \cdot \left(\frac{2\sqrt{(n-2) \cdot (n-4)}}{((n-2)+(n-4))} \right) + (n-3) \cdot \left(\frac{2\sqrt{(n-4) \cdot (n-4)}}{((n-4)+(n-4))} \right) \\ &\quad + 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{(n-2) \cdot (n-3)}}{((n-2)+(n-3))} \right) + (n-4) \cdot \left(\frac{2\sqrt{(n-3) \cdot (n-3)}}{((n-3)+(n-3))} \right) \\ &\quad + 2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{(n-2) \cdot (n-2)}}{((n-2)+(n-2))} \right) + (2n-6) \cdot \left(\frac{2\sqrt{(n-3) \cdot (n-4)}}{((n-3)+(n-4))} \right). \end{aligned}$$

$$= 2n-5 + \frac{4}{n-1}\sqrt{n-2} + \frac{2n-4}{n-3}\sqrt{n-4} + \frac{8}{2n-6}\sqrt{n^2-6n+8} \\ + \frac{4}{2n-5}\sqrt{n^2-5n+6} + \frac{4n-12}{2n-7}\sqrt{n^2-7n+12} \text{ bulunur.}$$

İspat tamamlanmıştır. $\square$

Teorem 4. $n \geq 5$ olmak üzere Br_n , $2n$ tepeli elmas çizge olsun. Br_n elmas çizgesinin ters Sombor indeks değeri:

$$RSQ(Br_n) = 2\sqrt{2}(n^2-6n+10) + 2\sqrt{n^2-4n+5} + (n-2)\sqrt{n^2-8n+17} \\ + 4\sqrt{2n^2-12n+20} + 2\sqrt{2n^2-10n+13} + (2n-6)\sqrt{2n^2-14n+25} \text{ ' dir.}$$

İspat. $RSQ(Br_n)$ değeri, (7) formülü ve Tablo 2'deki ayrıtlar kümesinin parçalanışları kullanılarak hesaplanır. Bu durumda,

$$RSQ(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{(\deg_G(nu))^2 + (\deg_G(rv))^2} \\ = 2\left(\sqrt{1^2 + (n-2)^2}\right) + (n-2)\left(\sqrt{1^2 + (n-4)^2}\right) + 4\left(\sqrt{(n-2)^2 + (n-4)^2}\right) \\ + (n-3)\left(\sqrt{(n-4)^2 + (n-4)^2}\right) + 2\left(\sqrt{(n-2)^2 + (n-3)^2}\right) + (n-4)\left(\sqrt{(n-3)^2 + (n-3)^2}\right) \\ + 2\left(\sqrt{(n-2)^2 + (n-2)^2}\right) + (2n-6)\left(\sqrt{(n-3)^2 + (n-4)^2}\right). \\ = 2\sqrt{2}(n^2-6n+10) + 2\sqrt{n^2-4n+5} + (n-2)\sqrt{n^2-8n+17} \\ + 4\sqrt{2n^2-12n+20} + 2\sqrt{2n^2-10n+13} + (2n-6)\sqrt{2n^2-14n+25} \text{ bulunur.}$$

İspat tamamlanmıştır. $\square$

Teorem 5. $n \geq 5$ olmak üzere Br_n , $2n$ tepeli elmas çizge olsun. Br_n elmas çizgesinin ters Nirmala indeks değeri:

$$RN(Br_n) = 2\sqrt{n-1} + (n-2)\sqrt{n-3} + 2\sqrt{2n-4} + 2\sqrt{2n-5} + n\sqrt{2n-6} + (2n-6)\sqrt{2n-7} + (n-3)\sqrt{2n-8} \\ \text{ ' dir.}$$

İspat. $RN(Br_n)$ değeri, (8) formülü ve Tablo 2'deki ayrıtlar kümesinin parçalanışları kullanılarak hesaplanır. Böylece,

$$RN(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{\deg_G(nu) + \deg_G(rv)}$$

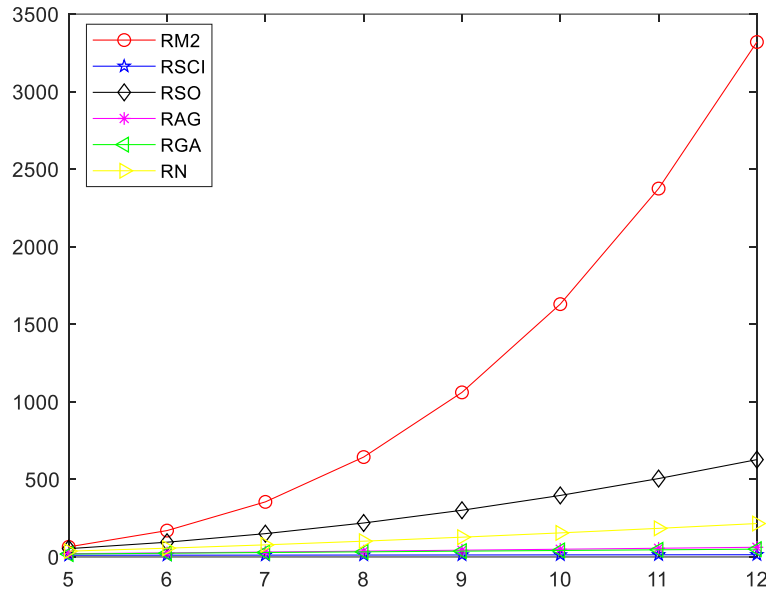
$$\begin{aligned}
&= 2\left(\sqrt{1+(n-2)}\right) + (n-2) \cdot \left(\sqrt{1+(n-4)}\right) + 4 \cdot \left(\sqrt{(n-2)+(n-4)}\right) \\
&\quad + (n-3) \cdot \left(\sqrt{(n-4)+(n-4)}\right) + 2 \cdot \left(\sqrt{(n-2)+(n-3)}\right) + (n-4) \cdot \left(\sqrt{(n-3)+(n-3)}\right) \\
&\quad + 2 \cdot \left(\sqrt{(n-2)+(n-2)}\right) + (2n-6) \cdot \left(\sqrt{(n-3)+(n-4)}\right).
\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{n-1} + (n-2)\sqrt{n-3} + 2\sqrt{2n-4} + 2\sqrt{2n-5} + n\sqrt{2n-6} + (2n-6)\sqrt{2n-7} + (n-3)\sqrt{2n-8}$$

bulunur.

İspat tamamlanmıştır. $\square$

Aşağıdaki Şekil 4'te; Teorem 1'de elde edilen ikinci ters Zagreb indeks (RM2), Teorem 2'de bulunan ters-toplam bağlantılılık indeks (RSCI), Teorem 3'te elde edilmiş olan ters aritmetik-geometrik indeks (RAG) ve ters geometrik-aritmetik (RGA) indeks, Teorem 4'te bulunan ters Sombor indeks (RSO) ve Teorem 5'te elde edilen ters Nirmala indeks (RN) değerlerinin sonuçları iki boyutlu düzlemde karşılaştırılmıştır.



Şekil 4. Br_n elmas çizgesinin ayrıtları kullanılarak elde edilmiş olan bazı ters dereceye dayalı topolojik indeks değerleri

Yukarıda verilen Şekil 4'te görülmektedir ki, elmas çizgeleri için ikinci ters Zagreb indeks (RM2) değeri diğer hesaplanan ters dereceye dayalı topolojik indekslere göre daha hızlı artmaktadır. Benzer olarak, elmas çizgeleri için ters-toplam bağlantılılık indeks (RSCI) değerinin diğer hesaplanan ters dereceye dayalı topolojik indekslere göre daha yavaş arttığı görülmektedir. Bununla beraber, Br_n elmas çizgesinin $RM_2(Br_n)$, $RSO(Br_n)$, $RN(Br_n)$, $RAG(Br_n)$, $RGA(Br_n)$ ve $RSCI(Br_n)$ değerleri $5 \leq n \leq 12$ için Tablo 3'te verilmektedir.

Tablo 3. Br_n elmas çizgesinin $5 \leq n \leq 12$ için bazı ters dereceye bağlı topolojik indeks değerleri

n	$RM_2(Br_n)$	$RSQ(Br_n)$	$RN(Br_n)$	$RAG(Br_n)$	$RGA(Br_n)$	$RSCI(Br_n)$
5	65	53.5138	37.3704	21.2121	18.9270	11.0559
6	170	94.9966	56.4620	26.1297	24.0007	11.2996
7	355	150.2227	77.9865	31.6833	28.5994	11.7472
8	644	218.9394	101.7097	37.5108	33.0487	12.2505
9	1061	301.0585	127.4478	43.5278	37.4288	12.7676
10	1630	396.5419	155.0550	49.7004	41.7690	13.2830
11	2375	505.3707	184.4129	56.0108	46.0825	13.7902
12	3320	627.5343	215.4229	62.4473	50.3766	14.2865

4. Sonuç

Matematiksel kimya, çizge teorisinin en belirgin uygulamalarından birini temsil etmektedir. Bu alanda çok çeşitli topolojik indeksler araştırılmıştır; bazıları tepe derecesine dayanırken, bazıları mesafe ölçütlerine dayanmaktadır. Son zamanlarda, ters dereceye dayalı topolojik indeksler tanımlanmış ve bunlar birçok makalede incelenmiştir. Bu makalede, elmas çizgeleri için bazı ters dereceye dayalı topolojik indeksler analiz edilmiş ve bu indeksler için kapalı formüller elde edilmiştir. Ayrıca elmas çizgeleri için, ayrıtlar kümesinin parçalanışının kullanıldığı ters topolojik indeksler olan ikinci ters Zagreb indeks değeri $RM_2(Br_n)$, ters toplam-bağlantılılık indeks değeri $RSCI(Br_n)$, ters aritmetik-geometrik indeks değeri $RAG(Br_n)$, ters geometrik-aritmetik indeks değeri $RGA(Br_n)$, ters Sombor indeks değeri $RSQ(Br_n)$ ve ters Nirmala indeks değeri $RN(Br_n)$ grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Hesaplanan bu değerler arasında, n değerleri arttıkça $RM_2(Br_n) > RSQ(Br_n) > RN(Br_n) > RAG(Br_n) > RGA(Br_n) > RSCI(Br_n)$ ilişkisi görülmektedir. İleri çalışmalar kapsamında, elmas çizgeleri için veya bu çizgelerin farklı çizge işlemleri sonucunda oluşan yeni çizgeleri için farklı ters topolojik indeks değerlerinin hesaplanması yapılabilir. Ayrıca, elmas çizge ailesinin bazı topolojik özellikleri ile ters topolojik indeksler arasındaki ilişkilerin elde edilmesi ile ilgili çalışmalar yapılabilir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazar makaleye %100 oranında katkı sağlamış olduğunu beyan eder.

Kaynakça

- Ahmad A., Koam AN., Azeem M. Reverse-degree-based topological indices of fullerene cage networks. *Molecular Physics* 2023; 121(14): e2212533.
- Andova V., Dimitrov D., Fink J., Skrekovski R. Bounds on Gutman Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* 2012; 67: 515-524.
- Aslan E. The edge eccentric connectivity index of armchair polyhex nanotubes. *Journal of Comp. and Theor. Nano.* 2015a; 12(11): 4455-4458.
- Aslan E. On the fourth atom-bond connectivity index of nanocones. *Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications* 2015b; 9(3-4): 525-527.
- Aslan E., Kürkcü ÖK. Edge harmonic index of carbon nanocones and an algorithm, *Bulgarian Chemical Communications* 2018; 50(3): 478-483.
- Balaban AT., Devillers J. Topological indices and related descriptors in QSAR and QSPAR, CRC Press 2014.
- Chartrand G., Lesniak L. *Graphs and digraphs*. California: Chapman and Hall 1996.
- Çolakoğlu Havare, Ö. Reformulated Zagreb indices of some cycle-related graphs and linear [n]-phenylenes. *Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* 2024; 7(1): 33-45.
- Dobrynin AA., Entringer R., Gutman I. Wiener index of trees: theory and applications. *Acta Applicandae Mathematicae* 2001; 66: 211–249.
- Ediz S., Cancan M. Reverse Zagreb indices of cartesian product of graphs. *International Journal of Mathematics and Computer Science* 2016; 11(1): 51–58.
- Estrada E., Torres L., Rodriguez L., Gutman I. An atom-bond connectivity index: modelling the enthalpy of formation of alkanes. *Ind. J. Chem.* 1998; 37A: 849–855.
- Gallian JA. Graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics* 2014; 17: (Dynamic Survey #DS6).
- Gowtham KJ., Husin MN. A study of families of bistar and corona product of graph: Reverse topological indices. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences* 2023; 17(4): 575-586.
- Gowtham KJ. A study of reverse topological indices and their importance in chemical sciences. *Applied Mathematics E-Notes* 2023; 23: 175–186.
- Graovac A., Ghorbani M., Hosseinzadeh MA. Computing fifth geometric-arithmetic index for nanostar dendrimers, *J. Math. Nanoscience* 2011; 1(1): 33–42.
- Gupta S., Singh M., Madan AK. Connective eccentricity index: a novel topological descriptor for predicting biological activity. *Journal of Molecular Graphics and Modelling* 2000; 18(1): 18–25.
- Gutman I., Trinajstić N. Graph theory and molecular orbitals. III. Total π -electron energy of alternant hydrocarbons. *Chemical Physics Letters* 1972; 17: 535–538.
- Gutman I., Ruscic B., Trinajstić N., Wilcox CF. Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes. *Journal of Chemical Physics* 1975; 62: 3399–3405.
- Harary F., Buckley F. *Distance in graphs*. Addison-Wesley Publishing Company 1989.

- Hinding N., Firmayasari D., Basir H., Bača M., Feňovčíková AS. On irregularity strength of diamond network. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 2018; 15(3): 291-297.
- Jahanbani A., Sheikholeslam S. The topological indices and some Hamiltonian properties of graphs. *Applied Mathematics E-Notes* 2023; 23: 260-264.
- Koam AN., Ansari MA., Haider A., Ahmad A., Azeem M. Topological properties of reverse-degree-based indices for sodalite materials network. *Arabian Journal of Chemistry* 2022; 15(10): 104160.
- Kulli VR. On the sum connectivity reverse index of oxide and honeycomb networks. *Journal of Computer and Mathematical Sciences* 2017a; 9(8): 408–413.
- Kulli VR. Geometric-arithmetic reverse and sum connectivity reverse indices of silicate and hexagonal networks. *International Journal of Current Research in Science and Technology* 2017b; 3(10): 29–33.
- Kulli VR. Reverse Zagreb and reverse hyper-Zagreb indices and their polynomials of rhombus silicate networks. *Annals of Pure and Applied Mathematics* 2018a; 16(1): 47–51.
- Kulli VR. Computing two arithmetic-geometric reverse indices of certain networks. *International Research Journal of Pure Algebra* 2018b; 8(8): 43–49.
- Li R. Bounds of the forgotten topological index and some Hamiltonian properties of graphs. *Electronic Journal of Mathematics* 2024; 8: 48–53.
- Li, R. The General Inverse Degree and Some Hamiltonian Properties of Graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 2025; 124: 87-98.
- Ökten Turaci M. On vertex and edge eccentricity-based topological indices of a certain chemical graph that represents bidentate ligands. *Journal of Molecular Structure* 2020; 1207: 127766.
- Ökten Turaci M. The values of eccentricity-based topological indices of diamond graphs. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* 2018; 22(Özel Sayı): 285-289.
- Randic M. On characterization of molecular branching. *J. Am. Chem. Soc.* 1975; 97: 6609–6615.
- Shulhany MA., Salman ANM. Bilangan Terhubung Pelangi Graf Berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika* 2015; UMS (2015): 916–924.
- Swamy NN., Manohar T., Sooryanarayana B., Gutman I. Reverse sombor index. *Bulletin of International Mathematical Virtual Institute* 2022; 12(2): 267–272.
- Todeschini R., Consonni V. *Handbook of molecular descriptors*. Wiley-VCH Verlag GmbH&Co. KGaA, Weinheim 2000.
- Turacı T., Ökten M. The edge eccentric connectivity index of hexagonal cactus chains. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* 2015; 12(10): 3977-3980.
- Vukicevic D., Fortula B. Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges. *J. Math. Chem.* 2009; 46: 1369–1376.

- Vukicevic D., Graovac A. Note on the comparison of the first and second normalized Zagreb eccentricity indices. *Acta Chimica Slovenica* 2010; 57: 524–528.
- Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American Chemical Society* 1947; 69(1): 17-20.