

Taksicab Çemberde Graf Uygulamaları

Cansel AYCAN¹, Makbule KIZILHAN*², Simge ŞİMŞEK³

¹ Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 20160, Denizli, Türkiye

² Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 20160, Denizli, Türkiye

³ Pamukkale Üniversitesi, Acıpayam Meslek Yüksekokulu, Büro Hizmetleri ve Sekreterlik Bölümü, 20800, Denizli, Türkiye

¹(ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9893-5642>)

²(ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-0282-6072>)

³(ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9054-8533>)

(Alınış / Received: 14.07.2025, Kabul / Accepted: 30.07.2025, Online Yayınlanma / Published Online: 31.07.2025)

*İlgili yazar ve danışmanı: makbulekizilhan@gmail.com , c_aycan@pau.edu.tr

Öz: Bu çalışmada şehir ve bölge planlamada önemli bir yere sahip olan Taksicab geometri ile bilgisayar ağları, akış problemleri, programlama modelleri gibi değişik alanlarda kullanılan graf teorisinin Taksicab çemberde incelemesi ele alınmıştır. Çalışmanın temel amacı Taksicab geometride yer alan Taksicab çemberin graf teorisi ile birleştirilerek Taksi-graf modellemelerinin yeniden tanımlanması ve şekillendirilmesidir. Öncelikle Taksicab geometri ve graf teorisinde bazı önemli özellikler ve tanımlar verilmiştir. Daha sonra Taksicab çemberin tanımı verilmiştir, Taksi-graf metriği oluşturulmuş ve ispatlanmıştır. Taksicab düzlemdeki çemberde graf yapılarının nasıl oluşturulabileceği, köşe ve kenar ekleme ve çıkarmanın nasıl yapılması gerektiği dikkatli bir biçimde ele alınmış gerekli açıklamaları ve ispatları da yaparak gösterilmiştir. Taksi-graf çembere örnek verilmiştir, örnek üzerinde detaylı incelemeler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler

Taksicab geometri, Taksicab çember, Graf teoris, Taksi-graf çember

Graph Applications in Taxicab Circle

Abstract:

In this study, the analysis of graph theory on the Taxicab circle, which holds a significant place in city and regional planning and is used in various fields such as computer networks, flow problems, and programming models, has been addressed. The main objective of the study is to reinterpret and reshape the modeling of Taxicab graphs by integrating the Taxicab circle, which is a part of Taxicab geometry, with graph theory. First, Taxicab geometry and some important concepts and definitions in graph theory are presented. Then, the Taxicab graph metric is defined. Subsequently, the definition of the Taxicab circle is introduced, and it is demonstrated how graph structures can be constructed on the circle in the Taxicab plane. The procedures for adding and removing vertices and edges are discussed in detail, accompanied by necessary explanations and proofs. Finally, an example of a Taxi-graph on a circle is provided, and a detailed analysis is conducted based on this example.

Keywords

Taxicab Geometry, Taxicab Circle, Graph Theory, Taxi-graph Circle

1. Giriş

1.1. Taksicab Geometri

20. yüzyıl başlarında Hermann Minkowski, Öklidyen geometride kullanılan uzaklığın gerçek dünyada tam anlamıyla kullanılamadığını fark etmiştir ve Taksicab uzaklık kavramını ortaya atmıştır. 1967'deki çalışmalarında bunu göstermeye çalışmıştır. Sonraki çalışmalarda ise K. Menger, analitik düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı, Taksicab düzlemde inşa etmiştir (Ekici ve ark., 2012).

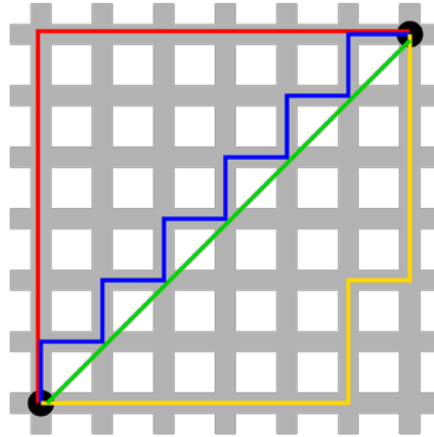
Taksicab geometrinin hayatımızdaki en önemli kullanım alanları: Yapay Zekâ Uygulamaları ve Şehir ve Bölge Planlamadır.

Tanım 1.1.1. Taksicab uzaklığı, Öklidyen uzayındaki her koordinat eksenine paralel doğru parçalarının (yatay ve dikey doğru parçaları) uzunlukları toplamı olarak tanımlayabiliriz (Ekici ve ark., 2012).

Taksicab geometrisindeki uzaklık fonksiyonu şu şekilde tanımlanır: $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ noktaları verilsin.

E^2 de standart $d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ Öklid metriği yerine $d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ metriği kullanarak Taksicab geometriyi tanımlarız (Krause 1986).

Şekil 1.1.1'de iki nokta arasında Taksicab düzlemde uzaklık ve Öklidyen düzlemde uzaklık verilmiştir. Yeşil çizgi, iki nokta arasındaki Öklidyen uzaklığı vermektedir. Mavi, sarı ve kırmızı çizgiler de iki nokta arasındaki Taksicab uzaklığı verir.



Şekil 1.1.1. Taksicab Uzaklık

1.2. Graf Teorinin Tarihçesi

18. yüzyılın ortalarında Leonhard Euler tarafından yazılan 'Königsberg'in Yedi Köprüsü' adlı makale ile graf teori literatüre girmiştir. Euler, yedi köprü problemini çözerken somut bir örneği soyut bir modellemeye çevirerek graf teorisinin temellerini atmıştır.

Pregel nehirlerinden dolayı Königsberg şehri dört karaya ayrılmaktadır. Bu dört karayı birbirine bağlayan yedi köprü bulunmaktadır. 'Herhangi bir karadan başlayarak ve yedi köprü sadece birer kez kullanılarak aynı kara parçasına (noktaya) dönülebilir mi?' sorusu araştırılmıştır. Şekil 1.2.1.'de Königsberg şehri gösterilmektedir.



Şekil 1.2.1. Königsberg Şehri

Euler, bu problemi incelerken graf teorisinin temellerini oluşturmuştur. Problemi incelerken daha rahat modellemek için kara parçalarını birer nokta, köprüleri de kenar olarak göstermiştir. Euler bu şekil üzerindeki incelemelerinden sonra, herhangi bir karadan başlayarak ve köprülerin sadece birer kez kullanılarak, başladığı kara parçasına dönülemeyeceğini ispatlamıştır. Böyle bir gezinti mümkün değildir (Altunbaş 2018).

Tanım 1.2.1. Bir Graf, düğüm (nokta) olarak adlandırılan noktalar ve bu noktaları birleştiren kenarlardan oluşan yapıdır. Boş olmayan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ noktalar (düğümler) kümesi ve sonlu $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ kenarlar kümesinden meydana gelir. $G = (V(G), E(G))$ şeklinde gösterilir. Daha kısa ifadeyle $G = (V, E)$ ya da G şeklinde gösterilebilir (Demir 2021).

Tanım 1.2.2. Bir grafta herhangi iki kenar ortak noktaya sahipse buna bitişik kenarlar denir. Herhangi bir G grafı için $v_1 \in V$ noktasına bağlı kenar sayısı, v_1 noktasının derecesini verir ve $d(v_1)$ şeklinde gösterilir. Bir grafta minimum dereceli nokta, derecesi en küçük olan noktadır ve $\delta(G)$ ile gösterilir. Maksimum dereceli nokta, derecesi en büyük olan noktadır ve $\Delta(G)$ ile gösterilir (West 2005, Sunar 2021).

$v \in V$ için $d(v) = 0$ ise v noktasına izole nokta,

$u \in V$ için $d(u) = 1$ ise u noktasına sarkık nokta denir (West 2005, Sunar 2021).

Tanım 1.2.3. Bir G grafında herhangi iki nokta arasında birden fazla kenar mevcutsa katlı (çoklu) kenar denir. Bir G grafında uç noktaları aynı olan bir kenar mevcutsa bu kenara ilmek kenar denir (Vasudev 2006, Sunar 2021). Şekil 1.2.2.'de ilmek kenar ve katlı kenar gösterilmektedir.



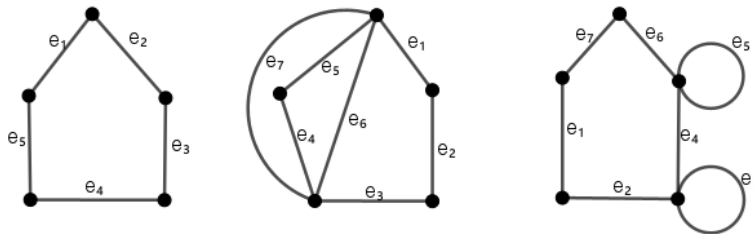
Şekil 1.2.2. G Grafında İlmek Kenar ve Katlı Kenar

Tanım 1.2.4. Bir G grafında u ve v noktaları arasındaki yol $P(u, v)$ biçiminde gösterilir. $P(u, v) = P(v, u)$ dir. Ayrıca $P(u, v)$ yol uzunluğu bu yolu oluşturan kenar sayısıdır ve $|P(u, v)|$ biçiminde gösterilir. n uzunluklu bir yol grafı P_n ile gösterilir ve $(n + 1)$ noktadan (düğümden) oluşur (Şentürk 2024).

Tanım 1.2.5. G , bağlantılı bir graf olmak üzere G grafına ait $|P(u, v)|$ gösterimi u ve v noktaları arasındaki yolun uzunluğunu verir. Bu uzunlukların minimumu ise $d(u, v)$ biçiminde gösterilir (Chartrand and Lesniak 2005, Akbaş 2019).

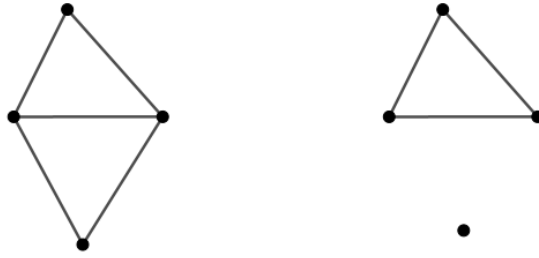
Tanım 1.2.6. $G = (V, E)$ bağlantılı bir graf olmak üzere v noktasının açıklığı $v_1 \in V$ için $e(v_1) = \max \{d(v_1, v_2) : v \in V\}$ (maksimum uzaklık) sonucunda bulunur. G grafında minimum açıklık değerine yarıçap denir, $rad(G)$ biçiminde gösterilir. G grafında maksimum açıklık değerine çap denir, $diam(G)$ biçiminde gösterilir (West 2005, Sunar 2021).

Tanım 1.2.7. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, katlı kenar ve ilmek bulundurmuyorsa $G = (V, E)$ grafına basit graf denir. Eğer $G = (V, E)$ grafı ilmek bulunduruyorsa pseudo graf denir, $G = (V, E)$ grafı katlı kenar bulunduruyorsa çoklu graf (multi graf) denir, Şekil 1.2.3.'te gösterilmiştir (Vasudev 2006, Sunar 2021).



Şekil 1.2.3. Basit Graf, Çoklu Graf ve Pseudo Graf

Tanım 1.2.8. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, G grafindaki herhangi iki nokta (düğümler) arasında bir yol mevcutsa bu grafa bağlantılı ya da bağlı graf denir. Eğer en az iki nokta(düğümler) çifti arasında bir yol mevcut değilse bağlantısız graf adı verilir, Şekil 1.2.4.'te gösterilmiştir. (Ana 2021).



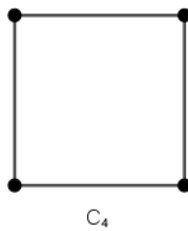
Şekil 1.2.4. Bağlantılı ve Bağlantısız Graf Şekilleri

Tanım 1.2.9. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, G grafindaki tüm noktaların derecesi eşit ise buna düzenli (regular) graf adı verilir. Tüm noktaların derecesi r ise bu grafa r -düzenli (r -regular) graf adı verilir, Şekil 1.2.5.'te regular grafa örnekler verilmiştir (West 2005, Sunar 2021).



Şekil 1.2.5. Regular Graf Örnekleri

Tanım 1.2.10. Bir yol grafinin iki uç noktasını bir kenar ile birleştirerek elde edilen grafa devir (cycle) graf adı verilir, n noktalı (n kenarlı) bir graf C_n biçiminde gösterilir. Devir graflar 2-regülerdir. C_n devir grafindan bir kenar çıkarılırsa P_{n-1} yol grafi oluşur, Şekil 1.2.6.'da C_4 devir graf örneği verilmiştir (Ana 2021).



Şekil 1.2.6. Devir Graf Örneği

2. Taksicab Çemberde Graf Uygulaması

Tanım 2.1.1. Taksicab düzlemde sabit bir noktaya uzaklıkları eşit olan noktaların kümesinin oluşturduğu geometrik yere Taksicab çember denir. Taksicab düzlemde sabit nokta $M(x_1, y_1)$ çemberin merkezini oluşturur, r ise yarıçapını oluşturur (Akça ve Kaya, 1997; Thompson ve Dray, 2000).

Taksicab çemberin genel denklemi:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \mid |x - x_1| + |y - y_1| = r; x, y \in \mathbb{R}\} \text{ şeklindedir (Akça ve Kaya, 1997).}$$

Tanım 2.1.2. Taksi çemberinin graf modelini $C(V, E)$ ile gösterelim. $C(V, E)$ grafi oluşturulurken $(x_1, x_2, y_1, y_2, r \in \mathbb{Z})$ olmak üzere, $\{(x, y) \mid |x - x_1| + |y - y_1| = r; x, y \in \mathbb{R}\} \cap \{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ arakesit kümesi Taksi-graf çemberinin köşe noktalarını verir. Bu arakesit ile elde edilen nokta kümesi $V(C) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_i\}$ şeklinde gösterilir. $C(V, E)$ grafinda, noktalar (düğümler) arasında kalan doğru parçaları grafin kenarlarını oluşturur, kenar kümesi $E(C) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_i\}$ şeklinde gösterilir.

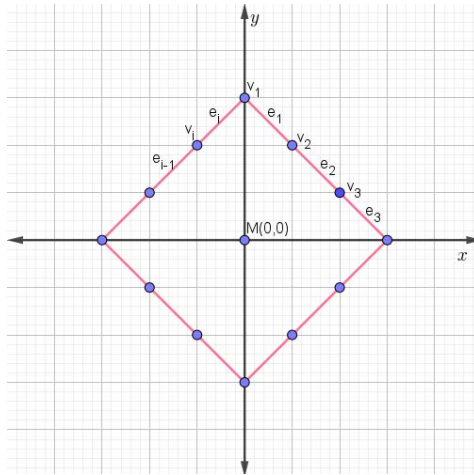
Tanım 2.1.3. Taksicab düzlemde kullandığımız genel denklem üzerindeki uzaklık formülü ile Tanım 2.1.2.'de verilen graf modeli üzerindeki köşe noktalarının arakesit kümelerini oluşturduktan ve graf şeklinde kenar, köşe çıkarma - ekleme işlemlerinden sonra sadece bu arakesit kümelerini yani köşe noktaları içeren Taksicab uzaklık, Taksi-grafın uzaklık formülünü oluşturur. Dikey ve yatay kenarların uzaklıkları toplamı, Taksi-graftaki herhangi iki köşe arasındaki uzaklığı verir. Taksi-graf şeklinde herhangi iki nokta $v_1(x_1, y_1)$ ve $v_2(x_2, y_2)$ olsun. d_{TG} Taksi-grafta uzaklığı göstermek üzere $v_1(x_1, y_1)$ ve $v_2(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki Taksicab uzaklık, $d_{TG} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.1.1. Tanım 2.1.3.'te verilen Taksi-grafta uzaklık fonksiyonu $d_{TG} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ bir metriktir.

İspat d_{TG} Taksi-grafta uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığını göstermemiz gerekir. Taksi-grafta uzaklık fonksiyonu simetrik mi, pozitif tanımlı mı ve üçgen eşitsizliğini sağlıyor mu göstereceğiz. $v_1(x_1, y_1)$ ve $v_2(x_2, y_2)$ Taksi-graf şeklinde herhangi iki köşe olmak üzere,

- i. $\forall v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}$ için,
 $|x_1 - x_2| \geq 0$ ve $|y_1 - y_2| \geq 0$ olduğundan
 $d_{TG}(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$ dır. Ayrıca
 $d_{TG}(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$
 $\Rightarrow |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$
 $\Rightarrow x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$
 $\Rightarrow v_1 = v_2$ olur.
- ii. $\forall v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}$ için,
 $d_{TG}(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
 $\Rightarrow |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$
 $\Rightarrow d_{TG}(v_2, v_1)$ olur.
- iii. $\forall v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2), v_3(x_3, y_3) \in \mathbb{Z}$ için,
 $d_{TG}(v_1, v_3) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$
 $\Rightarrow |x_1 + x_2 - x_2 - x_3| + |y_1 + y_2 - y_2 - y_3|$
 $\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|$
 $\leq d_{TG}(v_1, v_2) + d_{TG}(v_2, v_3)$

→ Bu durumda d_{TG} Taksi-grafta uzaklık fonksiyonun bir metrik olduğu ispatlanmıştır.



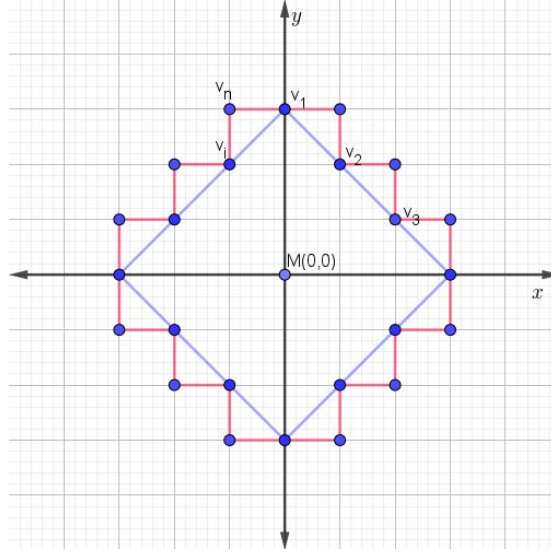
Şekil 2.1.1. Taksicab Çemberde $C(V, E)$ Grafı

$C(V, E)$ Taksi-grafında; graf metriği ile Taksi-metriği eşdeğer kılabiliriz. Bunu yapmamızın ana amacı Taksicab geometride oluşturduğumuz graf modellerinin, graf özellikleri ve graf çeşitleri ile daha bütünlüklü ve anlamlı olarak ifade edilebilmeleri içindir.

Örneğin Taksicab geometrisinde oluşan yapılarda çapraz kenar kullanılsa bile, önceki kısımda açıkladığımız gibi metrik olarak ölçümü farklıdır. Çapraz kenarlar graf yapılarda da kullanılabilir ancak metrik graf teorisinde de farklı idi. Taksi-graf yapısını oluştururken bütünlüklü tek bir geometrik modellemekten bahsettiğimize göre, metrik kavramımızı, oluşan graf yapısı üzerinde tek bir tanımda birleştirmemiz gerekir. Tanım 2.1.3.'te bu metriği d_{TG} şeklinde gösterdik. Bu metriği kullanarak $C(V, E)$ Taksi-graf yapısını uzaklık, açılım, graf çeşitleri gibi özellikleri ile daha detaylı inceleyebilmek için bazı köşe ve kenar çıkarma - ekleme işlemleri yapmalıyız. Öncelikle, Şekil 2.1.1.'de Taksicab çemberde $C(V, E)$ grafında bütün kenarlar çapraz kenar olduğu için Şekil 2.1.2.'de gösterildiği gibi çapraz doğrulardaki tüm kenarları çıkarmamız gerekir çünkü oluşturulan metriğe uygun kenarlar elde etmeliyiz, köşeler aynı kalır. Bu köşelere 1 br uzaklıkta olan yeni

köşeler eklenir. Oluşan yeni köşelerde, en yakın iki köşe arası 1 br uzaklıkta olacak biçimde yeni kenarlar eklenir. Bu durumda oluşan graf $i < n$, $i, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

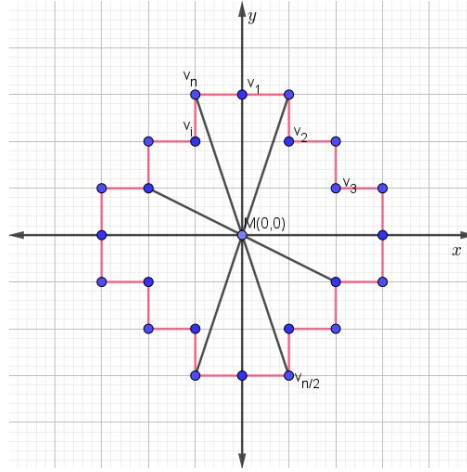
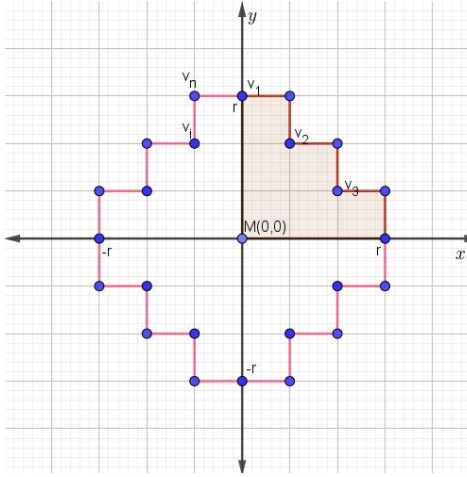
$C + \{v_1v_{i+1}, v_{i+1}v_2, v_2v_{i+2}, v_{i+2}v_3, v_3v_{i+3}, \dots, v_iv_n, v_nv_1\} - \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_i\} = C^*$ biçiminde gösterilir. Kenar ve köşe ekleme - çıkarma işlemlerinden sonra oluşan yeni grafa $C^*(V, E)$ grafi diyelim Şekil 2.1.2.'de gösterilmektedir.



Şekil 2.1.2. Taksicab Çemberde $C^*(V, E)$ Grafi

$C^*(V, E)$ grafının özellikleri aşağıda incelenmiştir;

- Köşe noktaları: $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, \dots, v_n\}$
- Kenarları: $\{e_{i+1}, e_{i+2}, e_{i+3}, \dots, e_n\}$
- Komşu köşeler: $\{v_1v_{i+1}, v_{i+1}v_2, v_2v_{i+2}, v_{i+2}v_3, v_3v_{i+3}, \dots, v_iv_n, v_nv_1\}$
- Köşelerin dereceleri: $\{d(v_1) = 2, d(v_2) = 2, d(v_3) = 2, \dots, d(v_n) = 2\}$. Herhangi bir köşeye bağlı kenar sayısı yani köşelerin dereceleri her zaman 2'dir.
- Bütün köşelerin derecesi 2 olduğu için düzenli (regüler) graftır. 2-regüler(düzenli) graf da denir.
- Bütün köşelerin derecesi 2 olduğu için $d(v) = 0$ ve $d(v) = 1$ olan bir nokta bulundurmaz yani sarkık nokta ve izole nokta bulundurmaz.
- Herhangi iki nokta arasında en az bir yol mevcuttur. Bu durumda C^* grafi bağlantılı (bağlı) graftır.
- C^* grafi devir graftır.
- C^* grafının bütün köşelerinin derecesi çift ($d(v) = 2$) olduğu için Euler graftır.
- C^* grafında kenarlar herhangi bir yön belirtmediği için yönlü graf değildir.
- C^* grafının bütün noktaları ve kenarları bir sembol ile belirtildiği için etiketlenmiş graftır.
- Katlı kenar ve ilmek bulunduran kenar yoktur bu durumda C^* grafi basit graftır.
- Köşelerin ve kenarların oluşturduğu kümeler sonlu kümeler olduğu için C^* grafi sonlu graftır.
- Köşeler arasındaki uzaklıklardan bazıları aşağıda verilmiştir.
 $d_{TG}(v_1, v_2) = 2$, $d_{TG}(v_1, v_3) = 4$, $d_{TG}(v_2, v_3) = 2$, $d_{TG}(v_i, v_{i+1}) = 3$,
 $d_{TG}(v_4, v_6) = 4$, $d_{TG}(v_n, v_1) = 1$, $d_{TG}(v_i, v_1) = 2$, $d_{TG}(v_2, v_6) = 8$,
 $d_{TG}(v_2, v_8) = 12, \dots, d_{TG}(v_5, v_6) = 2$, $d_{TG}(v_1, v_7) = 12$, $d_{TG}(v_3, v_9) = 12$
- Taksicab düzlemde çemberin merkezini $O(0,0)$ noktasına koyduğumuzda, n : toplam köşe sayısını vermek üzere, v_n noktasının merkez noktaya göre simetrisini aldığımızda v_n noktasına en uzak noktayı yani açılımı verir. Bu da $v_{n/2}$ noktasıdır. Oluşan Taksicab çemberin graf modeli aynı zamanda simetrik bir şekil ve devir graf olduğu için her noktanın açılımı $\frac{n}{2}$ 'yi verir Şekil 2.1.3.'te gösterilmiştir.
- C^* grafının köşeler arasındaki en büyük açılımı çapı verir $\text{diam}(C^*) = \frac{n}{2}$ 'dir. En küçük açılım ise yarıçapı verir $\text{rad}(C^*) = \frac{n}{2}$ 'dir.

Şekil 2.1.3. $C^*(V,E)$ Grafında AçılımŞekil 2.1.4. $C^*(V,E)$ Graf Şeklinin Çevresi

- C^* graf şeklinin çevresi: herhangi bir Taksicab çemberin merkezi $O(0,0)$ noktasına yerleştirilirse Şekil 2.1.4.'teki gibi modelleme ortaya çıkar. I. bölgede dikey kenarların toplamı r , yatay kenarların toplamı r , bu durumda $r + r = 2r$ olur ve diğer bölgeler de $2r$ olduğu için Taksicab çemberin çevre uzunluğu $4 \cdot (2r) = 8r$ olur, Şekil 2.1.4'te gösterilmiştir.

Örnek 2.1.1. Merkezi $M(1,1)$ ve yarıçapı 2 br olan çemberi, Öklidyen çember ve Taksicab çember olarak gösterelim daha sonra Taksi-graf çember olarak inceleyelim.

$P = (x,y)$ olmak üzere,

$$|x - x_1| + |y - y_1| = r \Rightarrow |x - 1| + |y - 1| = 2$$

- $x \in (-\infty, 1), y \in (-\infty, 1) \Rightarrow -x + 1 - y + 1 = 2$
 $\Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow x + y = 0$

İncelenen tanım aralığında $y = -x$ doğrusu oluşmuştur.

- $x \in (-\infty, 1), y \in (1, \infty) \Rightarrow -x + 1 + y - 1 = 2$
 $\Rightarrow -x + y = 2$

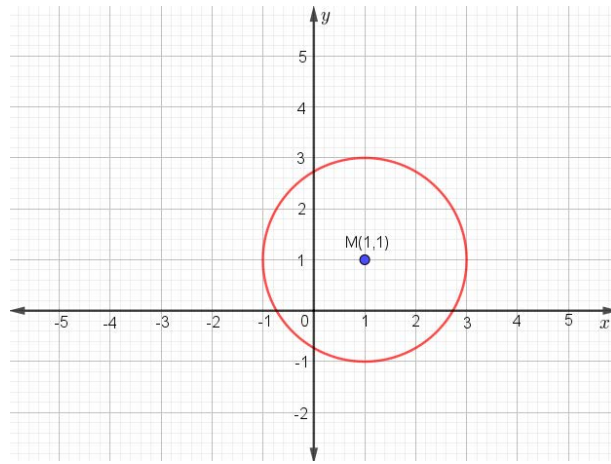
İncelenen tanım aralığında $y = x + 2$ doğrusu oluşmuştur.

- $x \in (1, \infty), y \in (-\infty, 1) \Rightarrow x - 1 - y + 1 = 2$
 $\Rightarrow y = x - 2$

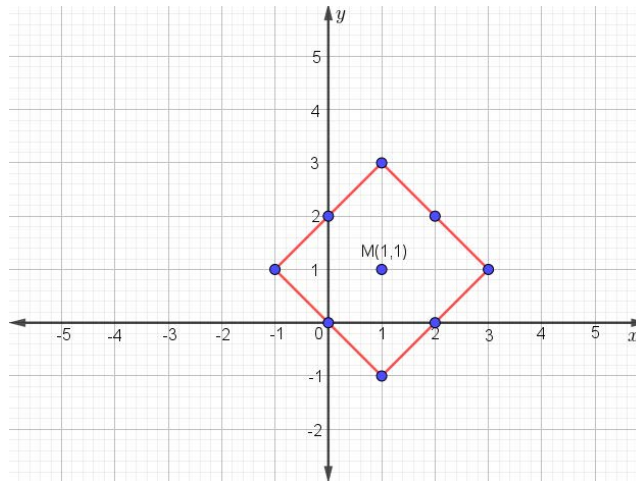
İncelenen tanım aralığında $y = x - 2$ doğrusu oluşmuştur.

- $x \in (1, \infty), y \in (1, \infty) \Rightarrow x - 1 + y - 1 = 2$
 $\Rightarrow x + y = 4$

İncelenen tanım aralığında $x + y = 4$ doğrusu oluşmuştur. Şekil 2.1.5. ve Şekil 2.1.6.'da merkezi $M(1,1)$ noktası ve yarıçapı 2 br olan Öklidyen çember ve Taksicab çember şekilleri verilmiştir.

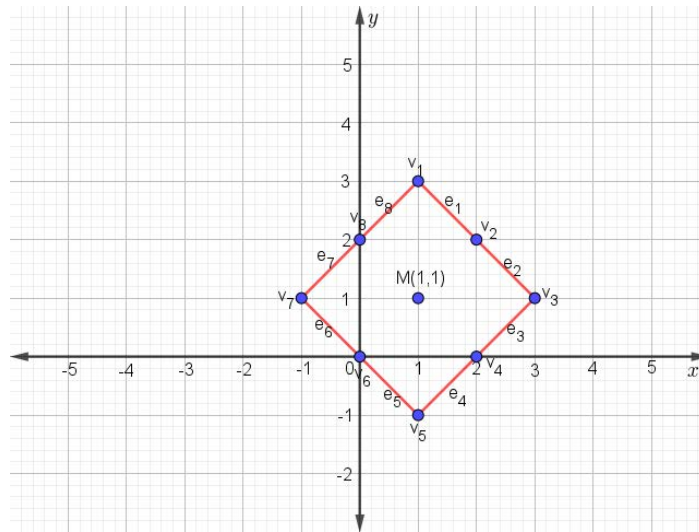


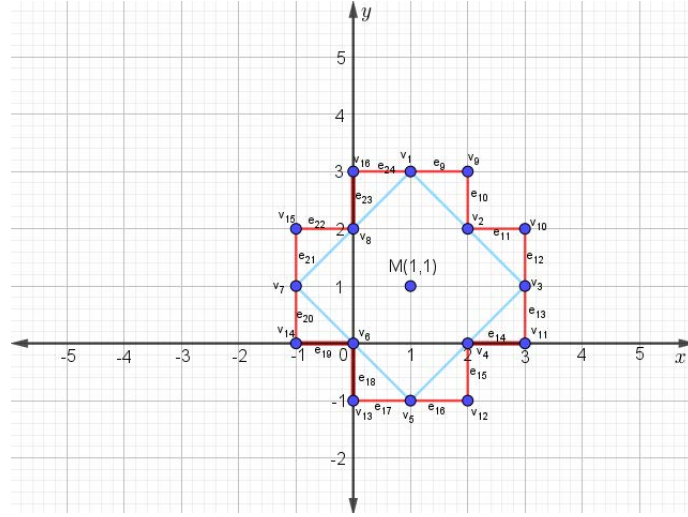
Şekil 2.1.5. Öklidyen Çember



Şekil 2.1.6. Taksicab Çember

$\mathcal{C}_T = \{(x, y) \mid |x - 1| + |y - 1| = 2\} \cap \{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}\}$ arakesit kümesi Taksicab düzlemdeki çemberin oluşturduğu grafın köşe noktalarını verir. $\mathcal{C}(V, E)$ grafında $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ kümesi köşe noktalarını, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ kümesi kenarları oluşturur Şekil 2.1.7.'de gösterilmiştir.

Şekil 2.1.7. Taksicab Çemberde $\mathcal{C}(V, E)$ Grafı



Şekil 2.1.8. Taksicab Çemberde $\mathcal{C}^*(V, E)$ Grafi

$\mathcal{C} + \{v_1v_9, v_9v_2, v_2v_{10}, v_{10}v_3, v_3v_{11}, v_{11}v_4, v_4v_{12}, v_{12}v_5, v_5v_{13}, v_{13}v_6, v_6v_{14}, v_{14}v_7, v_7v_{15}, v_{15}v_8, v_8v_{16}, v_{16}v_1\} - \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} = \mathcal{C}^*$ şeklinde gösterilir. Kenar ve köşe ekleme - çıkarma işlemlerinden sonra oluşan yeni grafa $\mathcal{C}^*(V, E)$ grafi diyelim Şekil 2.1.8.'de gösterilmiştir.

$\mathcal{C}^*$ grafinın özellikleri aşağıda incelenmiştir;

- Köşe noktaları:
 $\{v_1(1,3), v_2(2,2), v_3(3,1), v_4(2,0), v_5(1,-1), v_6(0,0), v_7(-1,1), v_8(0,2), v_9(2,3), v_{10}(3,2), v_{11}(3,0), v_{12}(2,-1), v_{13}(0,-1), v_{14}(-1,0), v_{15}(-1,2), v_{16}(0,3)\}$
- Kenarları: $\{e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}\}$
- Komşu köşeler:
 $\{v_1v_9, v_9v_2, v_2v_{10}, v_{10}v_3, v_3v_{11}, v_{11}v_4, v_4v_{12}, v_{12}v_5, v_5v_{13}, v_{13}v_6, v_6v_{14}, v_{14}v_7, v_7v_{15}, v_{15}v_8, v_8v_{16}, v_{16}v_1\}$
- Köşelerin dereceleri: $\{d(v_1) = 2, d(v_2) = 2, d(v_3) = 2, \dots, d(v_n) = 2\}$. Herhangi bir köşeye bağlı kenar sayısı yani köşelerin dereceleri her zaman 2'dir.
- Bütün köşelerin derecesi 2 olduğu için düzenli (regüler) graftır. 2-regüler(düzenli) graf da denir.
- Bütün köşelerin derecesi 2 olduğu için $d(v) = 0$ ve $d(v) = 1$ olan bir nokta bulundurmaz yani sarkık nokta ve izole nokta bulundurmaz.
- Herhangi iki nokta arasında en az bir yol mevcuttur. Bu durumda $\mathcal{C}^*$ grafi bağlantılı (bağlı) graftır.
- $\mathcal{C}^*$ grafi devir graftır.
- $\mathcal{C}^*$ grafinın bütün köşelerinin derecesi çift ($d(v) = 2$) olduğu için Euler graftır.
- $\mathcal{C}^*$ grafinda kenarlar herhangi bir yön belirtmediği için yönlü graf değildir.
- $\mathcal{C}^*$ grafinın bütün noktaları ve kenarları bir sembol ile belirtildiği için etiketlenmiş graftır.
- Katlı kenar ve ilmek bulunduran kenar yoktur bu durumda $\mathcal{C}^*$ grafi basit graftır.
- Köşelerin ve kenarların oluşturduğu kümeler sonlu kümeler olduğu için $\mathcal{C}^*$ grafi sonlu graftır.
- $\mathcal{C}^*$ grafinda köşeler arasındaki uzaklıklardan bazıları:
 $d_{TG}(v_1, v_2) = 2, d_{TG}(v_1, v_9) = 1, d_{TG}(v_1, v_3) = 4, d_{TG}(v_1, v_5) = 8,$
 $d_{TG}(v_{16}, v_1) = 1, d_{TG}(v_6, v_{15}) = 3, d_{TG}(v_7, v_{15}) = 1, d_{TG}(v_2, v_4) = 4,$
 $d_{TG}(v_2, v_5) = 6, d_{TG}(v_3, v_6) = 6, d_{TG}(v_1, v_6) = 6, d_{TG}(v_6, v_7) = 2,$
 $d_{TG}(v_{14}, v_{15}) = 2, d_{TG}(v_{14}, v_1) = 5, d_{TG}(v_4, v_5) = 2, d_{TG}(v_4, v_6) = 2$
- $\mathcal{C}^*$ grafinda her köşenin açılımı 8 br dir. Toplam köşe sayısı n olmak üzere, $n = 16, \frac{n}{2} = \frac{16}{2} = 8$ br dir.
 $e(v_1) = 8, e(v_2) = 8, e(v_3) = 8, e(v_4) = 8, e(v_5) = 8, e(v_6) = 8,$
 $e(v_7) = 8, e(v_8) = 8, e(v_9) = 8, e(v_{10}) = 8, e(v_{11}) = 8, e(v_{12}) = 8,$
 $e(v_{13}) = 8, e(v_{14}) = 8, e(v_{15}) = 8, e(v_{16}) = 8, e(v_{17}) = 8, e(v_{18}) = 8,$
 $e(v_{19}) = 8, e(v_{20}) = 8, e(v_{21}) = 8, e(v_{22}) = 8, e(v_{23}) = 8, e(v_{24}) = 8$
- $\mathcal{C}^*$ grafinın çevresi $M(1,1)$ noktası $O(0,0)$ noktasına yerleştirilir. I. bölgede $r = 2$ br, $2r = 4$ br dir. Tüm şeklin çevresi $4.4 = 16$ br olur.
- $\mathcal{C}^*$ grafinda köşeler arasındaki en büyük açılım çapı verir, $diam(\mathcal{C}^*) = 8$ br, en küçük açılım yarıçapı verir, $rad(\mathcal{C}^*) = 8$ br olur.
- $\mathcal{C}^*$ grafi aynı zamanda lineer graftır.

Teorem 2.1.2. Taksicab çemberde bütün doğrular 45° veya 135° lik açılarla oluşur.

İspat: Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r br olan Taksicab çemberin genel denklemi:

$$\mathcal{C}_T = \{(x, y) \mid |x - a| + |y - b| = r, x, y \in \mathbb{R}\} \text{ olmak üzere,}$$

- $x \in (-\infty, a), y \in (-\infty, b) \Rightarrow -x + a - y + b = r$
 $\Rightarrow -x - y = r - a - b$
 $\Rightarrow y = -x - r + a + b \Rightarrow m = -1$

İncelenen tanım aralığında $y = -x - r + a + b$ doğrusu oluşmuştur. Doğrunun eğimi $m = -1$ olduğu için 135° açıyla oluşur.

- $x \in (-\infty, a), y \in (b, \infty) \Rightarrow -x + a + y - b = r$
 $\Rightarrow -x + y = r - a + b$
 $\Rightarrow y = r - a + b + x \Rightarrow m = 1$

İncelenen tanım aralığında $y = x + r - a + b$ doğrusu oluşmuştur. Doğrunun eğimi $m = 1$ olduğu için 45° açıyla oluşur.

- $x \in (a, \infty), y \in (-\infty, b) \Rightarrow x - a - y + b = r$
 $\Rightarrow x - y = r - b + a$
 $\Rightarrow y = x - r + b - a \Rightarrow m = 1$

İncelenen tanım aralığında $y = x - r + b - a$ doğrusu oluşmuştur. Doğrunun eğimi $m = 1$ olduğu için 45° açıyla oluşur.

- $x \in (a, \infty), y \in (b, \infty) \Rightarrow x - a + y - b = r$
 $\Rightarrow x + y = r + a + b$
 $\Rightarrow y = -x + r + a + b \Rightarrow m = -1$

İncelenen tanım aralığında $y = -x + r + a + b$ doğrusu oluşmuştur. Doğrunun eğimi $m = -1$ olduğu için 135° açıyla oluşur.

↪ Doğruların eğimi $+1$ veya -1 olduğu için 45° veya 135° ’lik açıyla oluştukları ispatlanmıştır.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada ilk olarak Taksicab geometri ve Graf teorisinin tarihçesi ve tanımları verilmiştir. Graf teorisinin temel özellikleri sunulmuştur. Bazı graf çeşitleri açıklanmıştır. Taksicab düzlemde yapılan önceki çalışmalarda çember ele alınmıştı, fakat Taksicab çemberin graf teorisinde incelemesi yapılmamıştı. Graf teorisine Taksicab geometriyi birleştirebilmemiz için öncelikle Taksi-metrik ile graf metriği eşdeğer kılmamız gerekiyordu. Bunu yapmamızın ana amacı Taksicab geometride oluşturduğumuz graf yapılarında, graf özelliklerini ve graf çeşitlerini incelerken daha anlamlı ve bütünlük olarak ifade edebilmek içindir. Taksicab düzlemde sunulan çemberi, graf teorisinin temel özelliklerini kullanarak ve gerekli kenar ve köşe ekleme - çıkarma işlemlerinden sonra yeniden biçimlendirdik. Taksi-graf çemberin özellikleri incelendi. Taksicab çemberde doğruların kaç derecelik açılarla oluştuğunun teoremi verildi ispatı yapıldı. Bu çalışmanın araştırmacılar için yukarıda bahsettiğimiz şehir ve bölge planlama haricinde farklı alanlarda da yararlı olacağını düşünmekteyiz.

Teşekkür

Yüksek lisans eğitimim boyunca 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığına teşekkür ederim.

Etik Beyanı

Bu çalışmada, “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler” başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

Kaynakça

Krause, E.F. (1986), *Taxicab Geometry*, New York: Dover Publications.

Altunbaş, H. (2018). “Graf Teorisinin Bazı Uygulamaları ve Çapraz (Crossed) Çarpım Grafi”, Yüksek Lisans Tezi, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Karaman.

Demir, A. N. (2021). “Randic Etki ve Laplacian Etki Enerjilerinin Genelleştirilmesi”, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Konya.

Sunar, R. (2021). “Lineer Graflar Üzerine”, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bilgisayar Anabilim Dalı, Eskişehir.

Şentürk, A. (2024). “Graf Teoride Bazı Geometrik Uygulamalar”, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Denizli.

Akbaş, N. (2019). “Graf İşlemleri Altında Uzaklık Ölçümleri”, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İzmir.

Ana U. (2021). “Yönlü Graflar”, Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Akça, Z. (1995). “Taksi Trigonometri ve Uzay Taksi Geometrisinin Geliştirilmesi Üzerine”, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir.