

## Metal Şekillendirmenin Sonlu Eleman Yöntemiyle Sayısal Benzetimi

A.Erman TEKKAYA

Y.Doç.Dr.,  
Makina Mühendisliği Bölümü,  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi,  
Ankara

Metal şekillendirmenin bir üretim seçeneği olarak öneminin artması, bu konuda etkin kuramsal çözümleme yöntemlerinin gereksinimini doğurmuştur. Bu bildirinin ilk bölümünde, metal şekillendirme işleminin sayısal benzetimini amaçlayan bir sonlu elemanlar yaklaşımının temelleri tanıtılacaktır. Yöntem hayali yer değiştirmeleri ilkesinin zamana göre olan değişim şekline dayanmakta ve her türlü doğrusal olmayan kinematik öğeleri içermektedir. Malzemenin elastik-plastik şekil değişimini tanımlayan genelleştirilmiş Prandtl-Reuss bağıntıları kullanılmıştır. Bildirinin ikinci bölümünde ise, bu şekilde geliştirilen sonlu elemanlar yönteminin değerlendirilmesi verilmiştir. Bu amaçla gerek kuramsal gerekse deneysel karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu karşılaştırmalardan elde edilen uyum tatminkardır.

### GİRİŞ

Üretim sektöründe metal şekillendirme işlemleri giderek önem kazanmaktadır. Talaşlı üretim yöntemleriyle elde edilen birçok parçalar bugün metal şekillendirme yöntemleri ile yapılabilmektedir. Bu yöntemle yapılan üretimin üç önemli üstünlüğü vardır:

1. Talaş kaldırılmadığından, malzemeden büyük kazanç sağlanmaktadır. Bu özellikle pahalı ve yüksek kaliteli metallerde (örneğin: tantal,titan,vs.) önem kazanmaktadır.
2. Üretim verimi çok yüksektir. Dakikada 60-80 parça üretimi günümüz teknolojisinde olağan sayılan bir verimdir.
3. Üretilen parçalar dayanım ve yorulma ömürleri açısından çok olumlu özellikler taşımaktadırlar. Bu olgu malzemenin üretim sırasında pekleşmesinden ve talaşlı üretim yöntemlerinde olduğu gibi, yüzeylerinin zedelenmemesinden kaynaklanmaktadır.

Tüm bu olumlu yanlarına rağmen metal şekillendirme teknolojisi, halen uzun yılları kapsayan deneyimlerin sahibi uzmanlaşmış kişiler tarafından üretilebilmektedir. Türkiye'de bu konuda (özellikle

"soğuk iş" diye anılan oda sıcaklığında yapılan metal şekillendirme işlemlerinde) bir teknoloji- "üretimine" ulaşılmamış olması da yukarıda değinilen nedenden kaynaklanmaktadır. Zira bu tür teknolojilerde deneyim kazanarak uzmanlaşmak büyük yatırımlar ve zaman isteyen bir olgudur.

Bu sorunun temelinde, yakın bir geçmişe kadar, metal şekillendirme işlemlerinin çözümlemesinde ve planlamasında sonuç alıcı kuramsal hesaplama yöntemlerinin eksikliği bulunmaktadır. Bu eksiklik, metal şekillendirmeyi tanımlayan sürekli ortam mekaniği ve malzeme kanunları uygulandığında, bir insan tarafından çözülemeyecek kadar çok, karmaşık ve zor matematiksel işlemlerin doğmasından oluşmuştur. Ancak bilgisayarların ve bunlara uyarlanmış sayısal yöntemlerin gelişmesi ile söz edilen problemin çözülme umudu belirmiştir. Hatta 1986 yılında satışına başlanan yeni nesil, çok hızlı çalışan (~ 3 Gigaflop işlem hızlı) bilgisayarların sayesinde bazı endüstriyel uygulamalara güncel teknoloji içinde olanak sağlanmıştır.

1965'lerden başlayarak, metal şekillendirmeyi incelemek için geliştirilen değişik sayısal yöntemler içinde en başarılısı Sonlu-Elemanlar-Yöntemi (SEY) olmuştur.Günümüzde SEY ile bir metal şekillendirme

işleminin tümüyle gerçeğe uygun sayısal benzetimi ("process-simulation") mümkündür. SEY'in gelişmesini içeren kapsamlı bir çalışma daha önce yayınlanmıştı [1].

Bu bildirinin amacı, yazar tarafından geliştirilen bir SEY uygulamasının tanıtılmasıdır. Aşağıdaki bölümde bu uygulamanın kuramsal temelleri, bunu takip eden bölümde ise elde edilen yazılımın değerlendirilmesi sunulacaktır.

## SONLU ELEMAN YÖNTEMİNİN (SEY) KURAMSAL TEMELLERİ

Geliştirilen SEY'in kuramsal temelleri üç bölümde işlenecektir:

**Mekanik Temeller:** Bu bölümde yöntemin çıkış noktası olan değişim denklemi elde edilecektir.

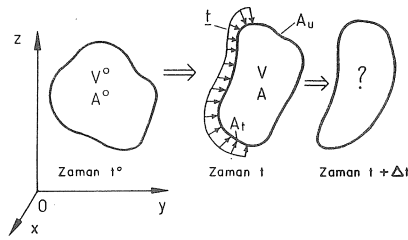
**Malzeme Kanunu:** Değişim ilkesinde kullanılacak malzeme denklemleri tanıtılacaktır.

**Sayısal Çözüm:** İlk iki bölümden ortaya çıkan matematiksel denklemlerin sayısal çözümü tanıtılacaktır.

Tüm çalışmada, her türlü ısı etkileri ihmal edilmiş ve şekillendirme işleminin normal oda sıcaklığında yapıldığı ("soğuk iş") varsayılmaktadır.

### Mekanik Temeller

Bir cismin  $t^0$  ve  $t$  zamanlarındaki başlangıç ve son konumları Şekil 1'de gösterilmiştir. Burada,  $A$ , cismin yüzey alanı,  $V$ , cismin hacmi,  $\mathbf{t}$  vektörü<sup>1</sup> cismin  $A_t$  alanında etki eden dış kuvvet (birim alan üzerine düşen) ve  $A_u$  cismin yüzeyinde yer değiştirmelerin bilindiği alandır. Cismin bu iki konumu arasındaki tüm konumların bilindiği varsayılmaktadır.



Şekil 1 Bir cismin şekil değiştirme kinematığı

<sup>1</sup> Bu bildiride kullanılan matematiksel yazılım şekli diyadiktir. Buna göre koyu basılmış küçük bir harf, örneğin  $\mathbf{t}$  bir vektörü temsil etmektedir; koyu basılmış büyük bir harf, örneğin  $\mathbf{T}$ , bir ikinci derece tensörünü temsil etmektedir. Einstein'in tensörel notasyonu ile verilen diyadlar

$$\mathbf{T} = T_{ij} \quad \text{ve} \quad \mathbf{t} = t_i \quad i, j = 1, 2, 3$$

şekillerini almaktadırlar. Diyadik yazılım şeklinin Einstein'in tensörel notasyonuna kıyasla üstünlüğü, karmaşık bağlantıların daha basit şekilde ifade edilebilmesi ve bu bağlantıların aynı zamanda konvektif koordinat sistemleri içinde geçerliliklerini korumalarıdır.

Amaç cismin  $t + \Delta t$  zamanındaki konumunu (ve tabii ki şeklini) bulmaktır. Bu amaca ulaşmak için son konum göz önüne alınacaktır. Bu konumdaki denge denklemleri hayali yer değiştirmeleri ilkesi tarafından verilmektedir:

$$\int_V \mathbf{T} : \delta(\mathbf{u}\nabla) dV = \int_A \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA \quad (1)$$

Burada  $\mathbf{T}$ , Cauchy-gerilme tensörü,  $\mathbf{u}$ , yer değiştirmeleri vektörü, ":" skalar diyadik çarpım<sup>2</sup>, "." vektöriyel çarpım<sup>2</sup> ve  $\delta$  hayali değişimdir. Denklem (1)'de kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Ayrıca,  $A_u$  yüzeyi için  $\delta \mathbf{u} = 0$  sağlanmaktadır.

Cismin  $t + \Delta t$  zamanındaki konum ve şekli hakkında bilgi edinebilmek için denklem (1) ile verilen bağıntının zamana göre değişimi bulunmalıdır. Bu amaç içinde, denklem (2)'nin  $t^0$  zamanına yani zamanla değişmeyen sabit bir konuma aktarılması gerekiyor. Gerekli kinematik bağlantılarla

$$\int_{V^0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{F}^T dV^0 = \int_{A^0} \mathbf{t}^0 \cdot \delta \mathbf{x} dA^0 \quad (2)$$

elde edilir. Burada,  $\mathbf{S}$ , 1. Piola-Kirchhoff gerilme tensörü,  $\mathbf{F}$ , deformasyon gradyanı ve  $\mathbf{x}$ , cismin bir noktasının konum vektörüdür. Bu denklemin zaman-değişim şeklinden Hill'in [2] denklemi elde edilebilir.

Şekil-değişim-işi eşdeğeri bir gerilme ve şekil tensörü çifti kullanılarak denklem (2)'den

$$\int_{V^0} \mathbf{H} : \delta \mathbf{E} dV^0 = \int_{A^0} \mathbf{t}^0 \cdot \delta \mathbf{x} dA^0 \quad (3)$$

bulunabilir. Yukarıda,  $\mathbf{H}$ , 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörü ve  $\mathbf{E}$ , Green-Lagrange şekil değiştirme tensörüdür. Bu denklem geometrik doğrusal olmayan elastik yaklaşımlarının temelini teşkil eder (bkz. örneğin [3]). Malzeme dünyasında zamana göre türev alınırsa

$$\int_{V^0} (\dot{\mathbf{H}} : \delta \mathbf{E} + \mathbf{H} : \delta \dot{\mathbf{E}}) dV^0 = \int_{A^0} \dot{\mathbf{t}}^0 \cdot \delta \mathbf{x} dA^0 \quad (4)$$

bağıntısı yazılabilir. Parantez içindeki ikinci terim, " $\mathbf{H} : \mathbf{E}$ "'nın zamana göre değişiminin konvektif kısmıdır. Kinematik bağlantılarla

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{J} [\mathbf{F}^{-1} \cdot \{\mathbf{T}(\mathbf{I}:\mathbf{L}) + \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T}\} \cdot (\mathbf{F})^T] \quad (5)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Burada,  $\mathbf{J}$ , Jacobi-determinantı,  $\mathbf{I}$ , birim tensörü,  $\mathbf{L}$ , hız gradyanı tensörü,  $\mathbf{D}$ , şekil değiştirme hızı tensörü ve  $\mathbf{W}$  dönme hızı tensörüdür. Denklem (5)'de " $\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T}$ " terimi rijit cisim dönüşlerini ve " $\mathbf{T}(\mathbf{I}:\mathbf{L}) - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$ "

<sup>2</sup> Yani:  $\mathbf{T} : \mathbf{A} = T_{ij} A_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$   
 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = T_{im} B_{mj} \quad i, j, m = 1, 2, 3$   
 $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = t_i b_i \quad i = 1, 2, 3$

terimi başka bir konvektif ögeyi temsil etmektedirler. Büyük parantez içinde bulunan terim ise Cauchy gerilme tensörünün Truesdell zaman değişimini,  $\dot{T}$ , simgelemektedir. Demek ki

$$\hat{T} = \dot{T} + T(I:L) + T.W - W.T - D.T - T.D \quad (6)$$

Denklem (5), (6) ve

$$2\delta\dot{E} = \delta F^I . L . F + F^I . L . \delta F \quad (7)$$

bağıntısı yardımıyla ve hayali bir zamana bölerek, denklem (4)'den

$$\int_{V^0} J[\hat{T}:\delta L + T:(\delta L^I . L)]dV^0 = \int_{A^0} \dot{t}^0 . \delta v \, dA^0 \quad (8)$$

elde edilir ( $v$ -vektörü cismin herhangi bir noktasının hızıdır). Bu denklem hayali hızlar ilkesinin zamana göre olan türevinin eksiksiz ve doğru olan şeklidir; hiç bir konvektif veya dönel terim ihmal edilmemiştir.

Denklem (8) SEY kapsamında ayrıştırıldığında, simetrik olmayan katılık matrisleri oluşmaktadır. Bu sorunun üstesinden gelmek için yenilemeli Lagrange yaklaşımı, yani cismin  $t^0$  ve  $t$  zamanlarındaki konumlarının bir an için çakıştırılması, kullanılabilir. Bu durumda

$$x^0 = x, \quad J = 1, \quad A^0 = A, \quad V^0 = V, \quad t^0 = t \quad \text{ancak} \quad t^0 \neq \dot{t} \quad (9)$$

olur ve denklem (8)

$$\int_V [\dot{G}:\delta D - 2(D.T):\delta D + T:(\delta L . L)]dV = \int_A \dot{t}^0 . \delta v \, dA \quad (10)$$

halini alır. Burada,  $\dot{G}^*$ , Kirchhoff gerilme tensörünün Jaumann zaman değişimini tanımlamaktadır ve Cauchy gerilme tensörünün Jaumann zaman değişimi ( $\dot{T}^*$ ) ile şöyle ifade edilebilir:

$$\dot{G}^* = \dot{J}\dot{T} + J\dot{T} = \dot{G} - W.G + G.W \quad (11)$$

Denklem (10) McMeeking ve Rice [4] tarafından da, Hill'in [2] denkleminden hareket ederek, verilmiştir.

Sonuç olarak, bilinen sınır şartları ve

$$\mathbb{L} \rightarrow \dot{G}^* = \mathbb{L}^{-1} : D \quad (12)$$

şeklinde uygun bir malzeme kanunu ile denklem (10)'dan aranan hız dağılımı  $v$  çözümlenir,  $\Delta t$  zaman dilimi içinde integre edildikten sonra, cismin  $t + \Delta t$  zamanındaki konumu ve şekli kolayca bulunabilir. Denklem (12)'deki dördüncü derece tensörü,  $\mathbb{L}^{-1}$ , malzeme tensörüdür ve aşağıdaki bölümde tanımlanacaktır.

Bu çalışmada kullanılan, büyük şekil değiştirme-

leri için geçerli olan, değişim ilkesi (denklem (10)) ile yaygın olup, ancak çok küçük şekil değiştirmeleri için geçerli olan değişim ilkesinin karşılaştırılması açık bir şekilde [5]'de verilmiştir.

### Malzeme Kanunu

Bu çalışmada Prandtl-Reuss malzeme kanununun genelleştirilmiş bir şekli kullanılmıştır. Prandtl-Reuss kanunları malzemenin saf elastik tepkisini tanımlayan Hooke kanunu ile malzemenin saf plastik tepkisini tanımlayan Lévy-Mises kanunlarının doğrusal bileşkesidir. Bu bileşimin temeli

$$D = D^E + D^P \quad (13)$$

bağıntısına dayanmaktadır. Burada  $D^E$ , toplam şekil değiştirme hızının elastik bölümü,  $D^P$ , ise plastik bölümüdür. Önemle belirtilmesi gereken bir husus, denklem (13) ile verilen bağıntının ancak yaklaşık olarak sağlandığıdır. Lubarda [6] tarafından gösterildiği gibi, denklem (13) ancak ve ancak

$$D^E \ll 1 \quad \text{ve} \quad W^E \ll 1 \quad (14)$$

sağlandığında geçerli olmaktadır. Metal şekillendirme ile yapılan üretimde kullanılan metal türündeki malzemeler denklem (14)'ü oldukça iyi sağladığından, denklem (13)'e dayalı bir malzeme kanununun kullanılmasındaki sakıncalar ortadan kalkmaktadır.

Klasik Prandtl-Reuss denklemlerinde  $D^E$  Hooke kanununun ile verilmiştir:

$$D^E = \dot{T}' / (2G) + (I:\dot{T}') / (9K) \quad (15)$$

Burada,  $T'$ , Cauchy gerilme tensörünün zamana göre olan değişiminin deviator bileşeni,  $G$ , kayma modülü ve  $K$  ise bulk modülüdür.

Denklem (13)'teki plastik birleşen  $D^P$  ise klasik Lévy-Mises denklemleri ile bulunur:

$$D^P = \frac{3}{2} \beta \frac{\dot{k}_f}{k_f (dk_f/d\phi)} T' \quad (16)$$

ile

$$\beta = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma}(T) = k_f(\phi) \quad \text{ve} \quad \dot{\sigma}(T) < 0 \quad \text{için} \\ & \text{veya, } \bar{\sigma}(T) < k_f(\phi) \quad \text{için} \\ 1 & \bar{\sigma}(T) = k_f(\phi) \quad \text{ve} \quad \dot{\sigma}(T) \geq 0 \quad \text{için} \end{cases} \quad (17)$$

Denklem (16) ve (17)'de  $k_f$ , basit çekme deneyindeki akma gerilmesi,  $\phi$ , basit çekme deneyindeki logaritmik şekil değişimi ve  $\bar{\sigma}(T)$ , etken von Mises gerilmesidir. Son iki bağıntıda plastik şekil değişimi sırasında hacim sabitliği, izotrop malzeme ve izotrop pekleşme varsayılmıştır. Denklem (17) von Mises plastik akma kriterini tanımlamaktadır.

Denklem (15) ve (16) denklem (13)'e konup, çıkan bağıntının tersimi alınır (bu tersim ilk defa Yamada et al. [7] tarafından yapılmıştır)

$$\dot{T} = 2G \left[ I + \frac{\nu}{1-2\nu} II - \beta \frac{T' T'}{\frac{2}{3} k_f^2 \left( 1 + \frac{1}{3G} k_f'(\varphi) \right)} \right] : D \quad (18)$$

elde edilir ( $\nu$  Poisson katsayısıdır)<sup>3</sup>. Bu klasik malzeme kanunu olup, çok küçük şekil değiştirmeleri için geçerlidir. Ancak genel bir şekil değişim büyüklüğü için bu kanun - objektiflik aksiyomu (bkz. Eringen [8]) dikkate alınarak-

$$\dot{T}^* = 2G \left[ I + \frac{\nu}{1-2\nu} II - \beta \frac{T' T'}{\frac{2}{3} k_f^2 \left( 1 + \frac{1}{3G} k_f'(\varphi) \right)} \right] : D \quad (19)$$

şeklinde genelleştirilebilir. Burada  $T^*$  denklem (11)'de kullanılan Cauchy gerilme tensörünün Jaumann zaman değişimidir. Plastik şekil değiştirerek yapılan üretim işlemlerindeki malzemelerin elastik şekil değişimlerinin küçüklüğü göz önünde bulundurularak, yani

$$J \approx 1 \quad \text{ve} \quad \dot{J} \ll 1, \quad (20)$$

denklem (11)'den denklem (19)'daki  $T^*$ 'nin iyi bir hassasiyetle  $G^*$  ile değiştirilebileceği anlaşılır. Böylece denklem (12)'de aranan malzeme tensörü

$$L^{-1} = 2G \left[ I + \frac{\nu}{1-2\nu} II - \beta \frac{T' T'}{\frac{2}{3} k_f^2 \left( 1 + \frac{1}{3G} k_f'(\varphi) \right)} \right] \quad (21)$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, problemin çözümü için gerekli tüm bağıntılar denklem (10), (12), (17) ve (21) ile verilmişlerdir. Ancak, bu denklem kümesinin kapalı analitik çözümü yoktur. Problemin sayısal yöntemler ile çözümü aşağıdaki bölümde incelenecektir.

### Sayısal Çözüm

Bölgesel Ritz-yöntemi yardımıyla denklem (10) bilinen yaklaşımlarla (bkz.[9,10]) ayrıştırılıp

$$[K_T] \{a\} = \{f^0\} \quad (22)$$

şeklindeki sonlu eleman yöntemi denklemleri bulunur. Burada,  $[K_T]$ , sistemin katılık matrisi,  $\{a\}$  vektörü, elemanların düğüm noktalarında aranan malzeme hızları ve  $\{f^0\}$ -vektörü de bu noktalardaki kuvvet hızlarını temsil etmektedir.  $[K_T]$  matrisinin açılımı [11]'de bulunabilir. Denklem (22) düğüm

<sup>3</sup>  $k_f'(\varphi)$  akma gerilmesinin ( $k_f$ 'in)  $\varphi$ 'e göre türevidir; Yani  $k_f'(\varphi) = dk_f/d\varphi$ 'dir.

noktalarındaki malzeme hızları cinsinden doğrusaldır. Ancak denklem (22) bir  $\Delta t$  zaman dilimi içinde uygulandığında, yani

$$[K_T^*] \{\Delta b\} = \{\Delta f^0\} \quad (23)$$

elde edildiğinde, ortaya yerdeğiştirme farkları ( $\Delta b$ ) cinsinden son derece doğrusal olmayan bir denklem kümesi çıkmaktadır, zira

$$[K_T^*] \{\Delta b\} = \int_{\Delta t} [K_T] \{a\} dt \quad (24)$$

olup, karmaşık bir şekilde  $\{\Delta b\}$ 'e bağlıdır. Söz konusu bağımlılığın iki kaynağı vardır: geometrik değişimler ve malzeme tepkisi. Bu iki kaynaktan doğan doğrusal olmayan bağımlılıklar ayrı sayısal yöntemlerle çözülmüştür:

**Malzeme tepkisinden doğan doğrusal olmayan kuvvet - yerdeğiştirme bağıntısının çözümü:** Bu amaç için orta-nokta-katılık-matrisi yöntemi uygulanmıştır (Şekil 2). Bu yöntem dögüsel bir karaktere sahip olup, ilk yenileme döngüsü için denklem (23)'de  $[K_T^*]$  yerine  $[K_T]$  kullanılarak, verilen bir  $\{\Delta f^0\}$ -kuvvet vektörü için bir yerdeğiştirme farkları vektörü  $\{\Delta b_1\}$  bulunur.  $\{\Delta b_1\}$  yardımıyla da gerilme farkları ( $\Delta T$  ve  $\Delta k_f$ ) elde edilir. Bu değerlerle

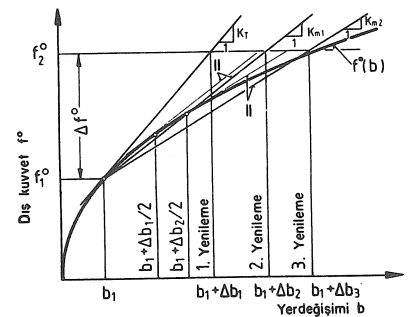
$$\{T\} = \{T_1\} + 0.5\{\Delta T\}$$

$$\{k_f\} = \{k_{f1}\} + 0.5\{\Delta k_{f1}\} \quad (25)$$

bulunup, katılık matrisi yeniden hesaplanarak  $[K_m]$  elde edilir.

$$[K_m] \{\Delta b\} = \{\Delta f^0\} \quad (26)$$

denklem kümesinin yerdeğiştirme farkları için yeniden çözülmesiyle de yeni bir  $\{\Delta b_2\}$  vektörü bulunur. Yeni yerdeğiştirme farklarından gerilme farkları, denklem (25) ile de yeni bir orta-nokta-



Şekil 2 Orta-nokta-katılık matrisi yöntemi

katılık-matrisi hesaplanır. Yakınsaklık kriteri olarak bu yenileme döngülerin adeti kullanılmıştır. Geniş bir araştırmamın [12] sonunda, döngü limiti 3-4 olarak tespit edilmiştir.

$\Delta T$  ve  $\Delta k_f$  gerilme farklarının hesaplanmasında, bir zaman dilimi içinde elastik tepkiden elastik-plastik tepkiye geçiş yapan elemanlar ile, elastik-plastik olarak akan elemanlardaki gerilme tensörünün - pekleşmeyi de göz önüne alarak - zaman dilimi sonunda malzemenin akma yüzeyi üzerinde bulunması zorunluluğuna özel bir itina gösterilmesi gerekmektedir. Bu önemli iki konunun incelenmesi [11]'de verilmiştir.

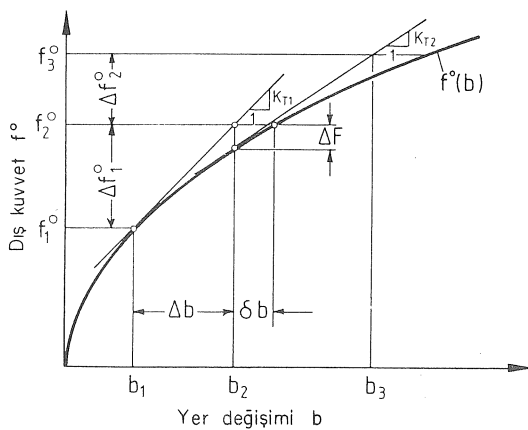
**Geometri değişiminden doğan doğrusal olmayan kuvvet-yerdeğiştirme bağıntısının çözümü:** Elastik-plastik şekil değişiminin sayısal çözümünde iki nedenden ötürü küçük zaman dilimlerinin kullanılması zorunluluğu vardır:

1. Malzeme kanunu zaman değişimi şeklindedir ve dolayısıyla malzemenin zamana göre teğetsel tepkisini tanımlar.

2. Metal şekillendirme işlemlerinde sınır koşulları - örneğin kalıpların yüzeyleri ile belirlenen koşullar - zamana son derece kuvvetli bir bağımlılık göstermektedirler. Bu süratle değişen sınır koşullarının doğru olarak çözüme aktarılması için küçük zaman dilimlerinin kullanılması kaçınılmazdır.

Yukarıdaki nedenlerle zaten verilmiş olan küçük zaman dilimlerinin kullanılması zorunluluğundan, geometri değişiminden doğan doğrusal olmayan kuvvet-yerdeğiştirme bağıntısının çözümünde faydalanılabilir. Çözüm yöntemi Şekil 3'de verilmiştir. Söz konusu olan yöntem geri-dönüşümlü Euler yöntemidir [3]. Bu yöntemin diğer bir adıda "kendini düzelten" yöntemdir [13]. Denklem (26)'da verilen  $\{\Delta f_0^o\}$  dış kuvvetleri için bulunan  $\{\Delta b\}$  yerdeğiştirme farkları vektörü ile cismin yeni konumu  $\{b_2\} = \{b_1\} + \{\Delta b\}$  diye hesaplanır. Cismin bu yeni konumu için

$$\{\Delta F\} = \{f^o\} - \int_V [B]^T \{T\} dV \quad (27)$$



Şekil 3 Geri-dönüşümlü Euler yöntemi

şeklinde denge-dışı kuvvet vektörü elde edilir. Burada [B] SEY çerçevesinde kullanılan iç değer biçim fonksiyonları matrisidir. Bu şekilde elde edilen  $\{\Delta F\}$  yardımıyla bundan sonraki zaman dilimi için

$$[K_m] \{\Delta b\} = \{\Delta f_0^o\} + \{\Delta F\} \quad (28)$$

yazılır. Zaman dilimlerinin küçüklüğü nedeniyle Şekil 3'de gösterilen  $\delta b$  hatası son derece küçük kalmaktadır. [14]'de de anlaşıldığı gibi, bu yöntem yaygın olarak kullanılan Newton-Raphson tipindeki çözüm yöntemlerinden söz konusu problemlerde 3-4 misli daha hızlı çalışmaktadır.

**Sonlu eleman yöntemi yazılımı:** Yukarıda verilen tüm mekanik ve sayısal temeller EPDAN (Elastik-Plastik Deformasyon Analizi) adlı yazılımda gerçekleştirilmiştir. EPDAN program sistemi grafik modülleri ile birlikte 10.000'inin üstünde işlem satırından oluşmakta ve FORTRAN 77 dilinde yazılmıştır. EPDAN'ın değerlendirilmesi aşağıdaki bölümde verilecektir.

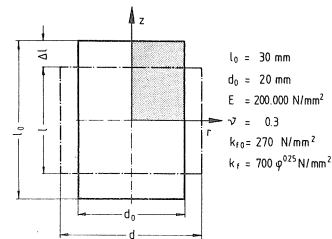
#### EPDAN PROGRAMININ DEĞERLENDİRİLMESİ

EPDAN programının değerlendirilmesi çeşitli kuramsal ve deneysel yöntemlerle yapılan karşılaştırmalar ile gerçekleştirilmiştir. Bu bölümde önce iki analitik ve bir sayısal karşılaştırmadan sonra deneysel bir karşılaştırma verilecektir.

#### Sürtünmesiz Yığıma İşleminde Analitik Çözüm ile Karşılaştırma

Eksenel simetriğe sahip sürtünmesiz yığıma işlemi ideal bir işlem olup, pratikte ancak Rastegaev tipi numunelerin [15] veya Teflon-floye [16] kullanılarak yaklaşık da olsa elde edilebilir. Sürtünme ve malzeme kaymalarının yokluğu kapalı analitik çözümlerin bulunabildiği homojen plastik şekil değiştirmeleri için temel şarttır. Bu nedenle sürtünmesiz yığıma işleminin analitik çözümü vardır ve EPDAN'ın ilk değerlendirmesi için iyi bir olanak sağlanmaktadır.

Şekil 4'de verilmiş olan problem için gerilme



Şekil 4 Bir silindirin sürtünmesiz yığılma işleminin verileri

<sup>4</sup> Şekil 4'de verilen verilerde  $k_{f0}$  malzemenin pekleşmeden önceki akma gerilmesidir.

tansörü T son andaki parça boyu l cinsinden analitik olarak

$$T_z = -k_f = -700\phi^{0.25} \text{ N/mm}^2; T_t = T_r = T_{rz} = 0 \quad (29)$$

ve

$$\phi = \ln(l_0/e) \quad (30)$$

olarak bulunur. Değişen parça boyu cinsinden parçanın yük altındaki şekli, o andaki hacmi, V, ile tam olarak tanımlanabilir:

$$V/V_0 = 1 + T_z/(3K) \quad (31)$$

Bu denklemde  $V_0$  parçanın başlangıç hacmidir. Parçanın yığılmadan sonraki  $l = 18$  mm boyu için, yani bir etken şekil değişimi  $\phi = 0.51$  için, şu değerler elde edilir:

$$T_z = -591.8 \text{ N/mm}^2; V/V_0 = \% 99.882 \quad (32)$$

Denklem (32)'de gözükten hacim kaybı, elastik şekil değiştirme payının sonucudur.

Aynı problem EPDAN ile de incelenmiştir. Bu amaçla 150 isoparametrik, dört düğüm noktalı yüzük elemanı kullanılmıştır. İşlemdeki simetri nedeniyle yalnız Şekil 4'de karartılmış olan kısım elemanlar ile donatılmıştır. Hesaplama adımı olarak  $\Delta z = -0.02$  mm, yani  $\Delta\phi = 0.0017$  kullanılmış ve toplam 300 zaman adımı atılmıştır. Elde edilen sonuçlar şöyledir:

$$T_z = -591.5 \text{ N/mm}^2; |T_r| \approx |T_t| \approx |T_{rz}| < 10^{-7};$$

$$V/V_0 = \% 99.816 \quad (33)$$

Denklem (32) ile (33) karşılaştırıldığında mükemmel bir uyum görülmektedir. Buna rağmen iki yöntemin verdiği sonuçlar arasındaki küçük farklar bile açıklanabilir:

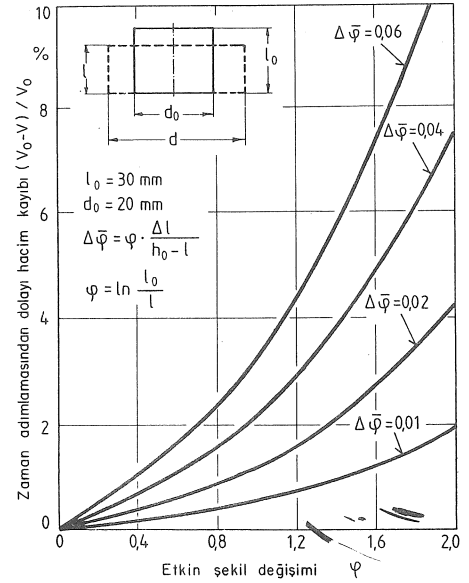
EPDAN ile yapılan hesapta çıkan % 0.066 hacim "kayı" zamansal adımlamanın etkisi ile açıklanabilir. Sürtünmesiz yığılma işlemi için  $(n + 1)$  zaman adımıdaki hacim

$$V_{n+1}/V_0 = [r^2(l_n - 0.75\Delta l_n^2/l_n - 0.25\Delta l_n^3/l_n^2) / (r_0^2 l_0)] \quad (34)$$

ve

$$r_n = r_{n+1} + 0.5r_{n-1} \Delta l/l_{n-1}; l_n = l_{n-1} - \Delta l \quad (35)$$

olduğu kolayca gösterilebilir [5]. Bu bağıntı kullanılan yaklaşımdan tamamen bağımsızdır ve yalnız zaman adımlamasından doğan yapay hacim kaybını



Şekil 5 Metal şekillendirme işlemlerinin sayısal çözümlemesinde zaman adımlamasından dolayı ortaya çıkan hacim kaybı hatasının etken şekil değiştirme değerleri cinsinden dökümü

vermektedir. Bu hacim kaybı değişik adım büyüklükleri için Şekil 5'de verilmiştir ve etken şekil değişimi parametre olarak kullanıldığından, diğer şekillendirme işlemlerinin sayısal benzetimindeki hacim kaybı hatasının bulunmasında da kullanılabilir.

Söz konusu örneğe dövrülürse,  $n = 299$  ile (34) ve (35)'den

$$V_{300}/V_0 = \% 99.933 \quad (36)$$

bulunur. Bu değer denklem (32) ile çarpılırsa

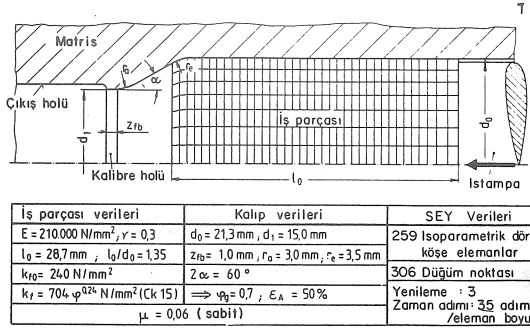
$$V^*/V_0 = \% 99.815 \quad (37)$$

elde edilir ve denklem (33) ile karşılaştırıldığında pratik olarak eşit olduğu görülür.  $T_z$  gerilmelerindeki küçük fark da aynı şekilde açıklanabilir.

#### Ekstrüzyonda Basitleştirilmiş Plastisite Kuramı ile Karşılaştırma

Basitleştirilmiş plastisite kuramı [17] kolay kullanımı nedeniyle yıllarca endüstride başarıyla uygulanmıştır. Bu kuram ile genellikle yalnız şekil verme kuvvetlerinin hesaplanabilmesi nedeniyle, burada ekstrüzyon işlemindeki baskı kuvvetleri karşılaştırılacaktır.

Şekil 6'da EPDAN ile yapılan benzetimlerin örnek verileri gösterilmektedir. Ekstrüzyon kuvvetinin basitleştirilmiş plastisite kuramı çerçevesinde hesaplanması Siebel'in [18] denklemi ile yapılmıştır:

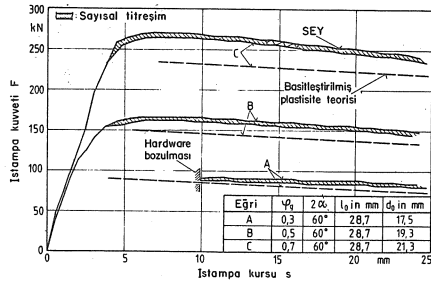


Şekil 6 EPDAN ile yapılan ekstrüzyon işleminin sayısal benzetiminde kullanılan örnek veriler ve eleman ağı

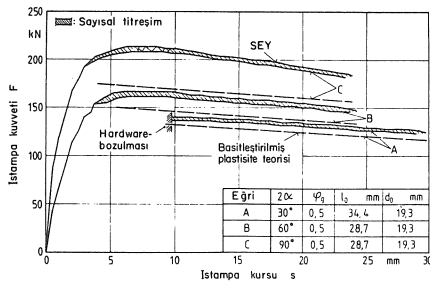
$$F = A_0 \cdot k_{fm} \cdot \varphi_g + \frac{2}{3} \hat{\alpha} \cdot k_{fd} \cdot A_0 + \pi \cdot d_0 \cdot l \cdot k_{f0} \cdot \mu + \frac{2k_{fm} \cdot \varphi_g \cdot \mu \cdot A_0}{\sin 2\alpha} \quad (38)$$

Burada  $F$ , istampa kuvveti,  $A_0$ , metal kütüğün kesit alanı,  $l$ , kütük uzunluğu,  $\varphi_g (= 2 \ln(d_0/d_1))$ , geometrik şekil değişimi,  $k_{df} (= k_{f0} + k_f)/2$ , akma gerilmelerinin aritmetik ortalaması ve  $k_{fm} (= (\int_{\varphi} k_f d\varphi)/\varphi)$ 'de integral ortalamasıdır.

Şekil 7 ve 8'de elde edilen sonuçlar geometrik şekil değişimine ( $\varphi_g$ ) ve matris dirsek açısına ( $2\alpha$ ) bağlı olarak verilmiştir.



Şekil 7 Ekstrüzyon işleminin istampa kuvveti-kursu eğrileri: SEY ile basitleştirilmiş plastisite kuramının karşılaştırılması (sabit kalıp dirsek açısı)



Şekil 8 Ekstrüzyon işleminin istampa kuvveti-kursu eğrileri: SEY ile basitleştirilmiş plastisite kuramının karşılaştırılması (sabit geometrik şekil değişimi)

İki şekilde de dikkati çeken dört nokta vardır:

1. artan geometrik şekil değişimi veya artan kalıp dirsek açısı değerleri için, iki yöntemle hesaplanmış kuvvetler arasındaki farkın artması,
2. iki yöntemle hesaplanmış kuvvet-yol-doğrularının değişik eğimlere sahip olması,
3. Pratikte görülen işlemin başlangıcındaki kuvvet zirvesinin bulunmaması,
4. ve nihayet, EPDAN ile hesaplanmış kuvvet eğrisindeki titreşimler.

İlk iki hususun nedenleri aynıdır ve Siebel'in denklemindeki (38) bir basitleştirmeden kaynaklanmaktadır. Denklem incelendiğinde, kalıp içi sürtünmeyi göz önüne alan " $\pi \cdot d_0 \cdot L \cdot k_{f0} \cdot \mu$ " teriminde parçanın kalıba uyguladığı basıncın  $k_{f0}$ 'e eşitlendiği görülmektedir. Yani, geometrik şekil değişimi veya dirsek açısı ne olursa olsun, parçanın kalıba uyguladığı basıncın  $k_f$  olduğu varsayılmaktadır. Oysa ki bu yanlıştır. EPDAN ile de yapılan hesaplar iç basıncın şekildedeki A eğrileri için  $k_{f0}$ 'dan küçük olduğunu, B eğrileri için  $k_{f0}$ 'a yakın olduğunu ve C eğrileri için de  $k_{f0}$ 'dan büyük olduğunu göstermiştir. Siebel'in denklemindeki  $k_{f0}$  gerçek iç basınç değerleri ile değiştirildiğinde, iki yöntem ile hesaplanan kuvvetler arasındaki fark % 10'un altına inmektedir. Ayrıca basit bir hesap ile de gösterilebileceği gibi, kuvvet-yol-doğrularının eğimi doğrudan doğruya iç basınca bağlı olduğundan, şekillerde görülen eğim farkı da aynı neden ile açıklanabilir.

Şekil 7 ve 8'de yapılan üçüncü gözlem, kuvvet zirvesinin yokluğu, işlemin EPDAN ile yapılan benzetimde sabit bir sürtünme katsayısının kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Bilindiği gibi, kuvvet zirvesi metal bloğun kalıbın iç yüzeyi boyunca kaymaya başladığı anda, sürtünme katsayısının düşmesinden meydana gelmektedir. Bu doğal olayın EPDAN ile sayısal benzetimi mümkün olmasına rağmen, basitleştirilmiş plastisite kuramında da kuvvet zirvesinin hesaplanamamasından dolayı, bu örnek çerçevesinde vazgeçilmiştir. Ancak boru ekstrüzyonu işleminin benzetiminde [19], özellikle malafa ve iş parçasının etkileşiminin incelenmesi açısından, kaymanın başlamasıyla sürtünme katsayısının düşüşü göz önüne alınmıştır.

Yapılan son gözlem, SEY ile elde edilen sonuçlarda titreşimlerin varolması, ayrıklaştırma yaklaşımına bağlanabilir. Zira, cismin hacimsel ayrıklaştırılması sınır koşullarında da bir ayrıklaştırmaya neden olmaktadır. Titreşimler incelendiğinde, titreşim periyodunun bir sonlu eleman genişliğine karşı geldiği görülebilir. Dolayısıyla, eleman ağıнын sıklaştırılması ile titreşimler azaltılabilir.

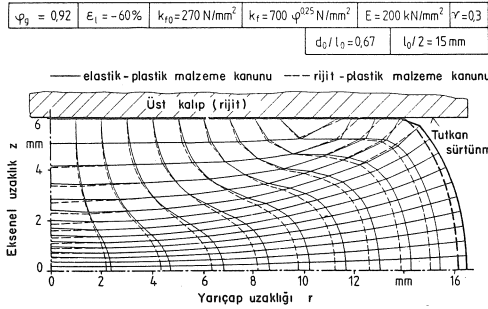
#### Rijit-Plastik Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Karşılaştırma

Roll [20] tarafından rijit plastik malzeme etkisine dayanan bir sonlu elemanlar yöntemi geliştirilmiştir. Roll'un programı bugüne dek başarıyla

metal şekillendirme işlemlerinin çözümlenmesinde kullanılmış ve deneysel gözlemler ile çok iyi uyum sağlamıştır. Rijit-plastik bir malzeme kanununun kullanılması nedeniyle, EPDAN ile karşılaştırmalar ancak akan malzeme bölgelerinde yapılabilmektedir<sup>5</sup>. Karşılaştırmalar üç şekil verme işleminde yapılmıştır:

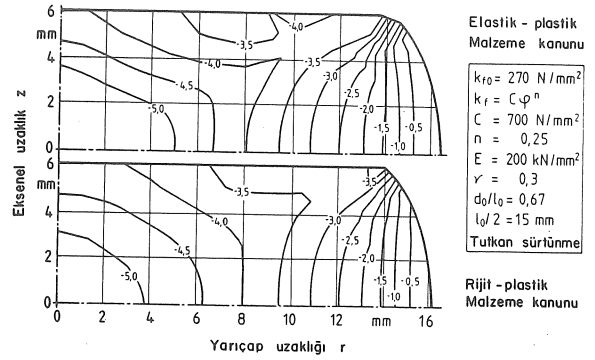
**Eksenel simetriğe sahip yığılma işlemi:** Yığılma takımı ile iş parçası arasındaki sürtünme tutkan olarak alınmıştır. Bu sürtünme tipi tamamıyla kinematik bir sınır koşulu olduğundan, sağlıklı bir karşılaştırma için son derece uygundur. İncelenen örnekte iş parçasının boyu % 60 oranında yığılma suretiyle kısaltılmış ve 30 mm'den 12 mm'ye indirilmiştir. Malzeme Alman Ck15 çeliğidir ve bu bildiriye tüm örneklerde kullanılan iş parçası malzemesine karşı gelmektedir. Sayısal benzetim için her iki programda da 150 izoparametrik dört düğüm noktalı yüzük elemanlar kullanılmıştır. Böylece EPDAN ile yapılan hesaplarda 352 serbestlik derecesi, rijit-plastik SEY ile yapılan hesaplarda da 502 serbestlik derecesi (352 deplasman + 150 hidrostatik basınç) vardı.

Şekil 9 % 60'lık bir boy kısaltmasından sonra malzemeyle birlikte şekil değiştirmiş sonlu eleman ağlarını göstermektedir. İki SEY ile hesaplanmış yeni eleman şekilleri oldukça iyi bir uyum göstermektedirler. İki çözüm arasındaki hacimsel fark % 4 olup Şekil 5 ile açıklanabilir: rijit-plastik yöntem ile yapılan hesaplarda kullanılan adım sayısı EPDAN'da kullanılan adım sayısının beşte biri olduğundan, EPDAN'ın çözümünde ortaya çıkan hacim kaybı hatası daha düşüktür.



Şekil 9 % 60'lık bir yığılma işleminden sonra şekil değiştirmiş sonlu eleman ağları: rijit-plastik ve elastik-plastik SEY benzetimlerinin karşılaştırılması

<sup>5</sup> Şekil değişimindeki plastik payın elastik paydan 1000 defaya yakın daha büyük olması nedeniyle, rijit-plastik malzeme kanununda elastik şekil değişimleri tamamıyla ihmal edilmektedirler. Böylece yöntemde doğrusal olmayan kinematik bağıntılar görülmeyip, yöntemin hesaplama sürati artmaktadır. Ancak bu kazanç uğruna elastik-plastik kanuna kıyasla şu dezavantajlar göze alınmaktadır: a) Rijit veya elastik malzeme bölgelerinde doğru bir çözüm bulmak mümkün değildir. Bu özellikle sürtünmenin var olduğu durumlarda kritik bir sorun haline gelmektedir. b) Kalıcı gerilmeler ve geri yaylanmaları gibi elastik orjinal olguların sayısal benzetimi mümkün değildir. Bu bildiriye, rijit-plastik veya elastik-plastik malzeme kanunundan hangisinin metal şekillendirme işlemlerinin benzetimi için daha uygun olduğu tartışılmasına girilmeyip, benzetimin amacına en uygun olan kanunun kullanılması gerektiğinin vurgulanması ile yetinilecektir.



Şekil 10 % 60'lık bir yığılma işleminden sonra iş parçası içindeki görel eksenel gerilmeler  $T_z/k_{f0}$ : rijit-plastik ve elastik-plastik SEY hesaplarının karşılaştırılması

Şekil 10'da aynı yığılma derecesi için cismin içindeki görel eksenel gerilmeler  $T_z/k_{f0}$  verilmiştir. Özellikle sabit-gerilme-eğrilerinin sık olduğu, yani gerilme değişimlerinin yüksek olduğu bölgelerde oldukça iyi bir uyum görülmektedir. İki yöntem arasındaki en büyük fark beklendiği gibi dört köşe elemanın üçgen eleman haline geldiği (bkz. Şekil 9) bölgededir. Bu bölge, iş parçasının yığılma yapılmadan önceki köşesini ( $r = 10 \text{ mm}$ ) kapsamaktadır. Bu şekilde şiddetli şekil değişimi gösteren sonlu elemanların katılık matrisleri Gauss yöntemiyle integre edilirken büyük hatalar vermektedirler. Dolayısıyla, bu çeşit elemanların içindeki ve çevresindeki sonuçlar dikkatle kabullenmelidir.

**Eksenel simetriğe sahip ekstrüzyon işlemi:** Karşılaştırma için iş parçasının kesit alanını % 50 ( $\varphi_g = 0,7$ ) oranında küçültten bir ekstrüzyon işlemi seçilmiştir. Kalıp dirsek açısı  $2\alpha = 60^\circ$  olarak alınmıştır. Problemin sürekli hal karakterinden faydalanarak, rijit-plastik SEY ile konumu kalıba göre sabit bir sonlu eleman ağı kullanılmıştır. Kontrol hacmine giren ve çıkan malzemenin elastik özellikleri önceden belli olmadığından, aynı tip bir eleman ağı EPDAN ile yapılan hesaplarda kullanılmamıştır. Burada yine malzeme ile birlikte şekil değiştiren bir eleman ağı kullanılmış ve ekstrüzyon işleminin, kütüğün kalıba konmasından başlanarak sürekli hal elde edilene dek sayısal benzetimi yapılmıştır.

Şekil 11'de şekil veren kalıp çevresinde iş parçasındaki görel eksenel gerilme ( $T_z/k_{f0}$ ) dağılımı verilmektedir. Şekilde ayrıca kesik çizgilerle elastik (veya rijit) ve elastik-plastik olarak tepki gösteren malzeme bölgeleri de ayrılmıştır. Doğal olarak, sağlıklı bir karşılaştırma ancak elastik-plastik olarak akan malzeme bölgelerinde yapılabilir. Bu bölgelerde - özellikle kalıbın dirsek altlarında - iki yöntemin verdiği çözüm oldukça iyi bir uyum göstermektedir. Ancak kalıbın çıkışındaki dirsek köşeleri çevresindeki çözümlerde farklılıklar ortaya çıkmaktadır. Bunların nedeni öncelikle iki çözümün elde edilmesinde kullanılan değişik sınır koşullarına bağlanabilir. Rijit-plastik SEY ile yapılan benzetimde keskin dirsek köşeleri kullanılırken, elastik-plastik





üretmiş çubuğun orta bölümü için, kesit alanı (A) boyunca aksel kalıcı gerilmeler çizilmiştir. Çubuğun çekirdeğinden (A = 0) 100 mm<sup>2</sup>'lik kesit alanına kadar olan ölçümler (kesiksiz çizgi) Sachs yöntemiyle elde edilmiştir. 130 mm<sup>2</sup> ile yüzey (A = 177 mm<sup>2</sup>) arasındaki ölçümler röntgen ışınları ile yapılmıştır. Ölçüm yapılamayan 100 mm<sup>2</sup> - 130 mm<sup>2</sup> arasındaki gerilme dağılımı tahmin edilmiştir. EPDAN ile elde edilen sonuçlar noktalı kesik bir çizgi ile aynı şekilde verilmiştir. Deneysel ölçümler ile kuramsal hesaplar arasındaki uyum oldukça tatminkardır. Özellikle ölçümlerin çok hassas olarak yapılabildiği yüzeye yakın bölgedeki uyum son derece tatminkardır. Parçanın çekirdek kısmında hesap ve ölçümlerin arasındaki farkın nispeten büyük olması, uygulanan Sachs-ölçüm-yöntemindeki hata kaynaklarının çokluğundan meydana gelmektedir. Günün teknolojisi ile bu hataların ortadan kaldırılması mümkün değildir.

EPDAN ile elde edilen kalıcı gerilme dağılımının statik bir kontrolünün de yapılması mümkündür. Zira kesit boyunca toplam kuvvetin sıfırlanması için, sürekli hal neticesinde

$$\int_A \sigma_z dA = 0 \quad (39)$$

olması yeterlidir. Şekil 14'de verilen  $\sigma_z$ -dağılımı için, baskı kuvveti -26.101 N, çekme kuvveti de 26.122 N olarak bulunabilir. Dolayısıyla statik denge hatası % 0.08'in altında kalmakta ve hesapların hassasiyetine iyi bir delil teşkil etmektedir.

## SONUÇ

Metal şekillendirme işlemlerinin sayısal benzetimini yapan bir sonlu elemanlar yöntemi tanıtmıştır. EPDAN adlı, bu amaçla yazılan bilgisayar programının değerlendirilmesi için bir dizi uygulamalar verilmiştir. Bu uygulamalardaki karşılaştırmalar gerek başka kuramsal çözümler ile, gerekse de deneysel ölçümler ile yapılmıştır.

Karşılaştırmaların ışığı altında EPDAN adlı SEY-programının gerçeklere uygun olarak şekillendirme işlemlerinin benzetimini yapabildiği kanıtlanmıştır. Bildirideki sayısal çözümler ile ilgili önemli bir konu, verilen sonuçların yalnızca birer örnek oluşudur. Yapılan bir sayısal benzetim sonunda, fiziksel işlem hakkındaki tüm bilgiler elde edilebilmektedir. Yani: şekil verme zamanı boyunca, herhangi bir an için, iş-parçasının geometrisi, var olan gerilme ve şekil değiştirme tensörleri, kalıp üzerine etki eden basınçlar ve tabii ki istampa kuvvetleri. Bunlarında ötesinde EPDAN'a eklenebilir program modülleri ile de, iş-parçasının işlem sırasındaki sıcaklık artımı, malzeme içindeki metalurjik değişimler ve hatta muhtemel çatlaklar dahi, işlem gerçekleşmeden bilgisayar ile hesaplanabilirler. Dolayısıyla SEY, metal şekillendirme endüstrisi için, teknoloji üretiminde önemli ve güçlü bir araç olarak kabul edilmelidir.

## TEŞEKKÜR

Yazar bu araştırmaya cömert mali desteğini esirgemeyen Volkswagenwerk Vakfına ("Stiftung Volkswagenwerk"), Hannover, F.Almanya teşekkürü bir borç bilir.

## FINITE ELEMENT SIMULATION OF METAL FORMING PROCESSES

The increasing importance of metal forming as a manufacturing process demands powerful theoretical tools of analysis. In this paper, firstly, the fundamentals of a finite element approach for the numerical simulation of metal forming processes are presented. The formulation is based on the rate form of the principle of virtual velocities by including all kinematic non-linearities. The constitutive equations are of a modified Prandtl-Reuss type, modeling the elastic-plastic behaviour of the material.

In the second part of the paper, the results of testing the so-developed finite element code are given. The tests are done both theoretically and experimentally. The comparisons yield satisfactory agreements.

## KAYNAKÇA

- 1 Roll, K. ve Tekkaya, A.E., Prozesssimulation in der Umformtechnik mit der Methode der Finiten Elemente- Stand und Entwicklungstendenzen. 1. Kısım: *Draht* 36 (1985) 5, 213-218, 2. Kısım: *Draht* 36 (1985) 6, 280-283.
- 2 Hill, R., Some Basic Principles in the Mechanics of Solids Without a Natural Time. *J. Mech. Phys. Solids*, 7 (1959), 209-225.
- 3 Ramm, E., Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite-Elemente. *Habilitationschrift*, Universitaet Stuttgart, 1976.
- 4 McMeeking, R.M. ve Rice, J.R., Finite-Element Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation. *Int. J. Solids Structures* 11 (1975), 601-616.
- 5 Tekkaya, A.E., Roll, K., Gerhardt, J., Herrmann, M. ve Du, G., Finite-Element-Simulation of Metal Forming Processes Using Two Different Material Laws. *Simulation of Metal Forming Processes by the Finite Element Method (SIMOP-I)*. Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1986, 50-85.
- 6 Lubarda, V.A., Elastic-Plastic Deformation at Finite Strain. *Ph.D.-Tezi*, Stanford University, 1980.
- 7 Yamada, Y., Yoshimura, N. ve Sakurai, T., Plastic Stress Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite-Element-Method. *Int. J. Mechanics*, 10 (1986), 343-354.
- 8 Eringen, A.C., *Mechanics of Continua*. John Wiley and Sons: New York, 1967.
- 9 Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*. McGraw Hill: London, 3. Baskı, 1977.
- 10 Gallagher, R.H., *Finite Element Analysis, Fundamentals*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- 11 Tekkaya, A.E., *Ermittlung von Eigenspannungen in der Kaltmassivumformung*. Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg New York/Tokyo, 1986.
- 12 Du, G., Untersuchung über die numerische Genauigkeit der Berechnungen von Problemen der Kaltmassivumformung mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente. *Diplom-Ingenieur Tezi* (Danışman: A.E.Tekkaya), Universitaet Stuttgart, 1985.

- 13 Yamada, Y., Wifī, A.S. ve Hirakawa, T., Analysis of Large Deformation and Stress in Metal Forming Processes by the Finite Element Method. **Metal Forming Plasticity**. Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg/New York, 1979, 158-176.
- 14 Wang, N.-M. ve Tang, S.C., Applications of the Finite-Element-Method to Sheet Metal Flanging Operations. **Simulation of Metal Forming Processes by the Finite-Element-Method**. Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1986, 279-306.
- 15 Nester, W. ve Pöhlandt, K., Ermittlung von Fließkurven in Verschiedenen Ausführungsform des Stauchversuches. **Rheologica Acta**, 21 (1985), 409-412.
16. Gunasekera, J.S., Mavranek, J. ve Littlejohn, M., The Effect of Specimen Size on Stress-Strain Behaviour in Compression. **J. Engineering Materials and Technology**, **Trans. ASME**, 104 (1982) 10, 274-279.
- 17 Lange, K., **Umformtechnik, Handbuch für Industrie und Wissenschaft**, Cilt 1 (Grundlagen), 2. Baskısı. Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg/New York/ Tokyo, 1984.
- 18 Lange, K., **Lehrbuch der Umformtechnik**, Cilt 2 (Massivumformung). Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg/New York, 1974.
- 19 Tekkaya, A.E. ve Gerhardt, J., Residual Stresses in Cold-Formed Workpieces. **Annals of the CIRP**, 34/1 (1985), 225-230.
- 20 Roll, K., **Einsatz numerischer Naehrungsverfahren bei der Berechnung von Verfahren der Kaltmassivumformung**. Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg/New York, 1982.
- 21 Tekkaya, A.E. ve Roll, K., Analysis of Metal Forming Processes by Different Finite Element Methods. **Numerical Methods for Nonlinear Problems**. Pineridge-Press: Swansea, 1984, 450-461.
- 22 Sachs, G., Der Nachweis innerer Spannungen in Stangen und Rohren. **Z. Metallkunde** 19 (1927) 9, 352-357.
- 23 Macherauch, E. ve Müller, P., Das  $\text{Sin}^2 4$ -Verfahren der röntgenographischen Spannungsmessung. **Z. angew. Physik**, 13 (1961), 305-312.
- 24 Horlacher, U., Experimentelle Ermittlung von Eigen-Spannungen in VVEP-Teilen. **Diplom-Ingenieur Tezi**, (Danşman: A.E. Tekkaya), Universitaat Stuttgart, 1984.