Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Cilt 22, Sayı 2, 2013, Sayfa 175- 194

MARKOWİTZ KARESEL PROGRAMLAMA İLE PORTFÖY SEÇİMİ: İMKB 30 ENDEKSİNDE RİSKLİ PORTFÖYLERİN SEÇİMİ

Ramazan ABAY*

ÖZET

Yatırım dünyasının pek çok alanında olduğu gibi portföy seçimi ve risk yönetiminde de kararların verilmesi ve uygulamaya geçirilmesi zorlu ve uzun süreçleri gerektirmektedir. Yatırımcıların ve karar vericilerin isteklerine uygun olan portföylerin oluşturulmasında karşımıza sınırsız sayıda ve karmaşık yapıda olasılık çıkmaktadır. Bu projede Markowitz programlama ile portföy seçim modelinin İMKB 30 endeksinde yer alan hisse senetleri üzerinde uygulamaları yapılmıştır. Öncelikle kuadratik programlama Markowitz portföy seçim modeli ile İMKB 30 hisselerinin 2005 yılındaki 12 aylık getiri değerleri kullanılarak beklenen getiri ve varyans – kovaryans matrisi oluşturulmuş ve model çözümlemesi yapılmıştır. Daha sonra standart kuadratik programlama modeli kullanılarak İMKB30 endeksi ile aynı getiriye sahip daha düşük riskli portföyler bulunmuştur. Son olarak da İMKB30 endeks değeri ile aynı riske sahip fakat daha yüksek getiriye sahip portföyler bulunmuştur. Portföy oluştururken risk ve getiri oranları hesaplanarak hangi ürünlerin portföye hangi oranlarda gireceği ya da hangi ürünlerin portföyden çıkarılacağı tespit edilmiştir.
Bu çalışma ile karmaşık matematiksel altyapısı olan portföy seçim modellerinin programlar kullanılarak hızlı ve verimli bir şekilde çözülebileceği gösterilmiş, yatırımcıların karar vermesine yardımcı olacak senaryolar ortaya çıkarılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Portföy Optimizasyonu; Sermaye Piyasaları; Portföy Seçimi.

ABSTRACT

Decision making and to put into practice has a hard and long process in portfolio selection and risk menagement like any other area in investment world. Tehere are lots of probability for selection the most suitable portfolio fitting that satisfy the investors and decision makers criterias. In this project, Markowitz portfolio selection model is applied to the ISE 30 companies stocks. First of all, Markowitz portfolio selection model, which is the for of quadratic programming, was modified to compose a portfolio which which has the same risk-return strucure with tht ISE 30 index and using 12 months return values of ISE 30 companies during January 2005 – December 2005, expected return and variance – covariance martrices were obtained and the model was solved. Then, using standart quadratic programming model, portfolio weights which have the same return level with ISE 30 index but have higher return than ISE 30 index

* Doç.Dr., İstanbul Arel Üniversitesi, İİBF Muhasebe – Finansman ABD, abaytr@gmail.com

were determined. Finally, portfolio weights which have the same risk level with ISE 30 index but have higher return than ISE 30 index were determined.
As a result of, in this study it is shown that, complex portfolio selection models that have complex mathematical structure can be solved fastly and efficiently using computer programs and scenarios are obtained for the purpose of helping investor's decisions.

Keywords: Portfolio Optimization; Capital Markets ; Portfolio Selection.

Giriş

Portföy yöneticilerinin ve yatırımcıların amacı, ellerinde bulundurdukları hisse senedi, devlet tahvili ve diğer değerli varlıkların getirilerini maximum düzeye çıkarmaktır. Ağırlıklı olarak hisse senetlerinden oluşan portföylerde, varlıkların getirilerini en üst düzeye çıkarırken aynı anda risk faktörünü de minimum düzeyde tutabilmek hayati öneme sahiptir. Bu işlemi gerçekleştirebilmenin yolu, varlıkların bulunduğu portföyün etkin bir şekilde oluşturulması, yönetilmesi ve gerektiğinde önemli değişiklerin yapılabilmesinden geçmektedir. Bu işlemde ana hedef; hangi varlıkların hangi oranlarda portföyde yer alacağının saptanması ve risk getiri dengesinin ne şekilde kurulacağına karar verilmesidir.

Hisse senedi piyasalarında hisse senetlerinin belli oranlarla ve belli formüllerle bir araya getirilmeleri ile endeksler oluşturulmaktadır. Pek çok yatırımcı ve yönetici endeksin sahip olduğu getiri – risk düzeyinde risk alarak getiri elde etmek istemektedir. Bunu yapabilmek için borsada işlem gören çok sayıda hisse senedi içinden seçim yapmak zorundadırlar.

Çalışmada Markowitz portföy seçim modeli ve uygulamaları ile ilgili literatür, İMKB 30 endekse dahil hisse senetleri ve endeks üzerindeki uygulamalar, toplanan veriler ile modelin oluşturulması, çözümlemelerin yapılarak portföylerin ve etkin sınırın oluşturulması üzerinde durulmuştur.

Literatür İncelemesi

Portföy oluşturulmasına imkan sağlayan pek çok yöntem ilgili literatürde yerini almış durumdadır. Yapılan portföy yönetim mekanizmalarının pek çoğunda geleneksel yöntemler kullanılır ve rasgele çeşitlendirmeler yapılarak portföyün riski azaltılmaya çalışılır. Modern Portföy yaklaşımında ise ortalama-varyans modeliyle portföy çeşitlendirilmesine gidilir. 1952 yılında il defa yayınlanan Markowitz'in ortalama-varyans optimizasyonu modern portföy teorisinin başlangıcı olarak kabul edilir. N adet beklenen getiri ve n(n+1) adet varyans- kovaryans hesaplamak analiz sürecinin en zor bölümlerinden biridir. Bu nedenle faktör modelleri geliştirilmiştir. (Sharpe 1970, Cohen ve Pogue 1967, Rosenberg 1974). Ayrıca senaryo modelleri (Markowitz ve Perold 1981a) ve çoklu grup modelleri (Elton ve Gruber 1973) üzerinde çalışılan konular olmuştur. Roy (1952) ise portföyü oluşturan menkul değerlerin getirilerinin varyansı ile portföyün getirilerinin varyansı arasındaki ilişkiyi ortaya koyarak Markowitz'inkine benzer bir ortalama-varyans etkin sınırı geliştirmiştir. (Rubinstein, 2002:1042).

Markowitz'in portföy seçim modeli, pratikte işlevlik kazanabilmesi için gerçek hayat koşullarına uyarlanmıştır. Bu alanda ayrıca Pogue2nin (1970) işlem maliyetleri, kısa satışlar borçlanma politikaları ve vergileri de kapsayan çalışması, modelin gerçek hayata aktarılmasına yardımcı olmuştur. Francis'in (1978) bankaların aktif-pasif yönetimind portföy analizini incelediği makalesi de, Markowitz portföy analizinin banka sistemi içinde uygulanabilirliği üzerine bir çalışma olmuştur.

Bunun yanında Tobin(1958), Sharpe (1964) Litner(1965) gibi pek çok biliim adamı da modele katkılarda bulunmuş yeni yaklaşımlar ortaya koymuştur. Brennan/1971) ödünç alma ve verme oranları konusunda, Turnbull(1977) vergi ve enflasyon konusunda çalışmıştır. Ayrıca Sharpe'in (1963) geliştirdiği Tek indeks modeli ve ve Perold'un (1984) geliştirdiği çoklu endeks modelleri, menkul kıymetlerin sayıları arttığında ortay açıkan zorlukların aşılmasında kullanılmıştır.

Portföy Oluşturma Problemi

Portföy oluşturma sürecinde karar verirken çok fazla sayıda veri içinden modelleme aracılığı ile karar vericinin karar verme sürecini hızlandıran pek çok yöntem mevcuttur. Bu projede de kısıtlara sahip portföy seçim probleminin çözümü için sistemler geliştirilmiş ve senaryoların oluşturulmasına olanak sağlayacak çıktılar ortaya konulmuştur. Böylece yöneticiler ve yatırımcılar istedikleri kriterlere uygun portföyleri kolayca oluşturabilmekte ve değişikleri uygulanacak senaryolar aracılığı ile uygulama alanı bulabilmektedirler.

Herhangi bir endeksin risk- getiri yapısını yansıtan hisse senetlerinden oluşan portföyün belirlenmesi için Markowitz portföy seçim modeli kullanılabilir(Tomáš A, Soňa B and Ivo J. 2012). Bu model, optimal portföye sahip olmak için portföyde yer alan hisse senetlerinin getiri ve risklerine göre seçim yapabilmek için geliştirilmiştir. Markowitz'in 1952 yılında yılında makalesinde ilk defa yayınlayıp, daha sonra kitap haline getirilen ortalama varyans – kovaryans optimizasyonu Modern Portföy Teorisinin başlangıcı olarak kabul edilir. Üzeinden 50 yıldan daha fazla süre geçmesine rağmen yatırım portföylerinin oluşturulmasında halen en kullanışlı ve popüler sayısal yöntem Markowitz'in ortalama varyans modelidir (Radovan Chalupka and Juraj Kopecsni. 2009). Bu metodoloji uygulamada ve teoride halen geliştirimey edevam etmektedir. Geliştirmeler gerçek hayatı daha iyi ifade eden yeni kısıtların eklenmesi şeklinde ve bunun yanı sıra, optimizasyon ve simetrik olmayan risklerin modele eklenmesiyle uygumla alanı bulmaktadır.

Yatırım Ortamı

Menkul kıymetler borsalarında işlem gören hisse senedi getirilerinin önceden tahmin edilemeyişi finans kuramı temellerinden biridir. 1950'li yıllarda Harry Markowitz ile başlayan modern finans teorisi, izleyen bilim adamlarının katkısıyla ilerlemiş ve hisse senedi fiyatlarının rastgele oluştuğunu öne süren 'Random Walk, Rassal Yürüyüş' hipotezi ile genel kabul görmüş bir hal almıştır. 1960' lardan sonra hızla gelişen finans teorileri beraberinde yeni kavramlar ve yöntemler getirmiş, Sermaye Varlıklarını Fiyatlama Modeli, CAPM (Capital Asset Pricing Model), Etkin Piyasalar Hipotezi, ve Black-Scholes Modeli gibi pek çok yaklaşım uygulamaya geçirilmiştir(Antoine And Bertille. 2012**)**. Finansal varlıklara sahip olan kişi o varlıktan kaynaklanan haklara sahip olabileceği gibi, o varlık nedeniyle belirli risklerin tamamını ya da bir bölümünü de taşımaktadır. Finansal araçlar yatırımcıları risklerden koruyabilirler. Arz ve talebin karşılaştığı finansal pazarlarda risk ve portföy yönetimi gibi daha bir çok yöntem ve analiz kullanılarak riski azaltırken getiriyi artırma yoluna gidilmektedir.

Borsalar

Menkul Kıymet Borsaları hisse senedi ve tahvil gibi uzun vadeli yatırım araçlarının alınıp satıldığı pazarlardır. Bu piyasalarda borç verenlerle borç alanlar karşı karşıya gelerek işlemlerini gerçekleştirme imkanı bulurlar. En önemli özelliklerinden biri de ülkelerin ekonomik gelişmesine önemli katkılarının olmasıdır. Menkul kıymet borsaları ile halkın tasarrufları şirketlere sermaye olarak aktarılmaktadır. Yüksek riskli ve kısa vadeli krediler yerine, şirketler açısından çok daha düşük riskle uzun vadeli kaynak sağlanmaktadır.

Portföy, Risk ve Getiri

Gerek ABD'de ve gerekse diğer gelişmiş finans piyasalarında yapılan bir çok bilimsel çalışma göstermiştir ki kendilerini çok başarılı portföy yöneticisi olarak öne süren portföy veya fon yöneticilerinin yönettikleri fonların çoğu endeksin çok altında bir performans getirmiştir (Disatnik David and Katz Saggi, 2012).
Modern portföy kuramın kurucusu Harry Markowitz'in yaklaşımını genel çerçevesi; bir yatırımcının bugün sahip olduğu belirli bir tutardaki parayı çeşitli menkul değerlere yatırarak bir dönem tutması oluşturmaktadır (Un-Jul Tu Jun, Zhou Guofu.(2011). Bu yaklaşım, yatırımcının olası portföylerden seçeceği menkul değerlerden oluşan bir portföye dayanmaktadır. Portföy seçim problemi olarak da adlandırılabilmektedir.
Portföydeki hisse senedi sayısı arttıkça firma riski önemli ölçüde azalmaktadır. Buna karşılık binlerce menkul değere de yatırım yapılsa toplam risk belli bir düzeyin, yani pazar riskinin altına inmeyecektir. Pazar riski çeşitleme yapılarak ortadan kaldırılamamaktadır.

Portföy çeşitlemesi aralarında mükemmel dereceden daha düşük bir derecede korelasyon olan menkul değerlerden oluşmaktadır. Portföy getirisi basitçe portföydeki menkul değerlerin getirilerinin ağırlıklı ortalamasından hesap edildiği için çeşitlemek için hiçbir zaman portföyün getirisini arttırmayacaktır. Buna karşılık portföy getirilerinin değişkenliğini azaltacağı için portföy riskine olumlu katkılarda bulunacaktır. Genel olarak menkul değerler arasındaki korelasyon azaldıkça, çeşitlemenin başarısı artacaktır. Yapılan araştırmalar göstermiştir ki iyi bir şekilde çeşitlendirilmiş portföylerin getirisi pazar ortalamasına, yani pazar endeksine yaklaşmaktadır.

Bazı araştırmacılar değişik sektördeki hisse senetlerine yatırım yapıldığında, sektörler arasındaki korelasyonun daha düşük olması söz konusu olacağından, rasgele bir çeşitlemeden daha düşük tutarda risk elde edilebileceğini öne sürmüşlerdir(Jorion P, 1986). Ancak yapılan ampirik çalışmalar böyle bir sonuca ulaşamamıştır. Bu çalışmalar sektörler arasındaki korelasyonun beklenilenin aksine oldukça yüksek olduğunu belirlemişler; bir sektördeki olumlu veya olumsuz değişmenin diğer sektörleri kolaylıkla etkilediğini tespit etmişlerdir.

Lorie ve Fisher yaptıkları çalışmalarda 8, 16, 32 ve 128 NYSE şirketini önce rasgele daha sonra sektörlere göre portföy oluşturarak değerlendirmişler ve şu sonuçlara ulaşmışlardır:

Sektörler arası çeşitleme rasgele çeşitlemeden daha iyi değildir.

Portföydeki 8 hisse senedinin üzerindeki menkul kıymetler portföy riskini çok fazla azaltmamaktadır.

Bazı yatırımcılar çeşitleme yaparken hatalar yaparak, çeşitlemeden elde edilebilecek faydalardan yeterince yararlanamamaktadır. Bu durumlar şöyle ortaya çıkmaktadır:

Çok fazla hisse senedine yatırım yaparak portföyü sağlıklı bir şekilde yönetememek ,

Çok fazla hisse senedi ile ilgilenerek, yeterli bilgiye ulaşmadan gereğinden fazla hisse senedi satın almak,

Çok fazla hisse senedi ile ilgilenmek, aşırı araştırma gideri ve zaman harcamak,

Sık sık hisse senedi değiştirerek işlem komisyonlarının artmasına neden olmak.

Gerçek piyasa koşullarında portföy yöneticileri ve yatırımcılar yüzlerce farklı menkul kıymet arasından seçim yapmak zorundadırlar. Bu kadar portföy arasından en iyi risk getiri ilişkisine sahip, diğer bir deyişle etkin portföyleri belirlemek için Markowitz tarafından geliştirilen portföy teorisinden yaralanılacaktır. Literatürde etkin portföyleri birleştiren etkin sınır adı verilmektedir. Yatırımcının hangi portföyü seçeceği , alabileceği risk ile ilgilidir. Yatırımcı optimal portföyünü;

Kendinse değişen risk düzeylerinde maksimum beklenen getiriyi sunan portföy kümelerinden,

b.Kendisine değişen beklenen getiri düzeylerinde, minimum risk sunan portföy kümeleri arasından seçecektir.

Optimal Portföy

Optimal portföyün seçiminde yatırımcıların kayıtsızlık eğrileri ile etkin sınırda yer alan etkin sınırda yer alan portföyleri bir araya getirmek gerekmektedir. Yatırımcı kendine en fazla faydayı sağlayacak kayıtsızlık eğrisi üzerinde olan portföyü seçecektir. Modeldeki pek çok değişkene farklı değerler atayarak, çok fazla sayıda simülasyonlar gerçekleştirmek ve çıktılar almak mümkün olabilmektedir. Simülasyon, gerçekte var olan bir sistemi gözlemlemek için yapılacak en iyi şeydir. Bilgisayar modellerini çalıştırmak suretiyle sistemin davranış şekilleri hakkında geçerli bilgilerin toplanmasında etkin sonuçlara varılabilmektedir. Toplanan bu veriler ışığında daha sonra farklı sistem ya da portföy tasarımları gerçekleştirilebilinir. Fakat simülasyon bir optimizasyon tekniği değildir, daha çok modellenen sistemin performans ölçülerini tahmin etmede kullanılan bir yöntemdir. Simülasyon çıktısının tahmini rasgele örnekleme temeline dayanır. Gerçek durum gözlemlendiği zaman da aynı şey yapılır. Fakat bu ifade simülasyon çıktısının rasgele değişimlere maruz kaldığı anlamına gelmemektedir. Bu yüzden de herhangi bir istatistiksel deneyde olduğu gibi simülasyonda da istatistiksel yorum testlerinin kullanılması gereklidir.

Portföylerde Risk Ve Getiri Hesapları

Risk gelecekteki olayların tamamen tahmin edilememesinden doğan, buna ilişkin yapılan belirli bir olasılık tahminidir. İki çeşit portföy riski söz konusudur(Jorion P, 1986). Bunlardan ilki;
- Sistematik risk; kaçınılamayan riski ifade eder.
Diğeri;
- Sistematik olmayan risk; menkul kıymete özgü, kaçınılabilir risktir.
Sistematik risk kaynakları içerisinde;
1- Satın alma Gücü Riski,
2- Faiz Oranı Riski,
3- Piyasa Riski,
4- Politik Risk,
5- Kur Riski yer alır.
Sistematik olmayan risk kaynakları ise;
1- Finansal Risk,
2- Yönetim Riski
3- İş ve Endüstri Riskidir.

Görüldüğü üzere yatırımcıların karşılaştığı toplam risk bu iki ana kalemden oluşur.

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \, . \, \sigma_m^2 + \sigma_e^2$$

σ_i^2 = Yatırım yapılan menkul kıymetin toplam riski (kovaryans)
β_i^2 = Menkul kıymetin sistematik riske karşı duyarlılığı betanın karesi
σ_m^2 = Piyasa riski - sistematik risk (kovaryans)
σ_e^2 = Sistematik olmayan risk (kovaryans)

Menkul kıymetlerin yatırımcılara genelde iki tür getiri sağladığı bilinir. Bunlardan ilki, o menkul kıymetin pazardaki fiyatının değişiminin neden olduğu sermaye kazancı, diğeri ise, hisse senedi için dividant (kar payı), sabit getirili menkul kıymetler için ise faiz getirisidir.

Getiri

Yatırımlar için hesaplanacak getiri tek dönemlik ye da çok dönemlik olmak üzere iki kısma ayrılabilir.

Tek Dönemlik Getiri Oranı

Yatırımcının servet artış hızını gösteriyor olması nedeniyle tek dönemlik getiri hesaplaması önemlidir.
Bu oran;
Getiri oranı = Dönem Sonu Değer – Dönem Başı Değer
Dönem başı değer olarak hesaplanır.

Çok Dönemli Ortalama Getiri

Her dönem için bulunan getiri oranlarının ortalamasının alınması ile hesaplanır. Bu aritmetik
ortalama da olabilir geometrik ortalama da olabilir. İlkinde, her dönem için elde edilen getiriler toplanıp dönem sayısına bölünür. İkincisinde, hesaplanan dönem getirilerinin çarpımları, toplam dönem sayısı ile kökü alınarak bulunur.

Beklenen Getiri, Varyans ve Standart Sapma

Öncelikle beklenen getirinin nasıl hesaplanacağına bakmakta fayda vardır. Beklenen getiri hesaplanırken, herhangi bir menkul kıymetin olası getirilerinin ağırlıklı ortalaması kullanılır.

$$\text{Beklenen Getiri} = E(r) = P_1 \,.\, r_1 + P_2 \,.\, r_2 + \ldots + P_n \,.\, r_n$$

Beklenen getiriler bu şekilde hesaplanabilir. Bunun yanında getirinin ayrılmaz bir parçası olan riskin hesaplanmasına da bakmak gerekmektedir. Riskin ölçülmesi için en çok kullanılan yöntem varyans hesabıdır. Varyans, her bir olası getirinin beklenen getiriden sapmasının karesinin getiri oranının bağlı olduğu olasılıkla çarpımının toplamına eşittir. Formül olarak ifade edersek;

$$\text{Varyans} = \text{Var}(r) = P_1 [\, r_1 - E(r_1) \,]^2 + P_2 [\, r_2 - E(r_2) \,]^2 + \ldots\ldots\ldots + P_n [\, r_n - E(r_n) \,]^2$$

Varyansın karekökü standart sapmadır. Dolayısıyla standart sapma da riskin bir ölçüsüdür.

$$\text{Standart sapma} = \sigma_r = \sqrt{\text{Var}(r)}$$

Kovaryans

Kovaryans iki rassal değişken arasında istatistiği bir ölçüdür (Mackinlay A.C, Pastor L. , 000). Kovaryans iki değişkenin birlikte hareketinin ye da değişiminin yönünü gösterir.
Kovaryans (+) => hisse senetlerinin getirileri ayni yönde hareket eder.
Kovaryans (-) => hisse senetlerinin getirileri zit yönde hareket eder.
Kovaryans (0) => hisse senetleri arasında herhangi bir dogrusal ilişki yoktur.
Formüle edildiginde;

Cov (ra , rb) = Pi [ra – E (ra)] [rb – E (rb)] + P2 [ra – E (ra)] [rb – E (rb)] +.......... + Pn [ra – E (ra)] [rb – E (rb)]
ra , rb = (a) ve (b) hisse senetlerinin Pi olasılığına bağlı getirileri
E(ra), E(rb) = (a) ve (b) hisse senetlerinin beklenen getirileri

Korelasyon

Korelasyon iki değişkenin birlikte hareket etme derecesini gösterir(Graham Bornholt., 2013) . Korelasyon katsayısı ± 1arasinda değer alır. Ayni yönde tam

korelasyon olduğunda korelasyon (+1) dır. Farklı yönde tam korelasyon olduğunda değer (-1) olur.
Korelasyon katsayısı = $Cor_{a, b}$ = Cov (a, b) / $\sigma_a . \sigma_b$

Değişim Katsayısı

Değişim katsayısı, bir birimlik getiri için alınan riskin ölçüsüdür. Birden fazla hisse senedinde, beklenen getiri ve risk düzeyleri arasında tercih gerektiğinde yardımcı olur.
Değişim katsayısı = σ / E (r) dır.

Matematiksel portföy seçim modelleri

Portföy oluşturmaktaki amaç asgari risk alarak, azami getiriyi elde etmektedir. Bunun için yatırımcılar, tek bir hisse senedi tutmak yerine, daha fazla sayıda hisse senedi ye da fidansal enstrümandan oluşan portföyler oluştururlar. Portföye alınan hisse senedi sayısı kadar bu hisse senetlerinin birbiriyle olan ilişkisi de önemlidir. Örneğin, fiyatları ayni yönde hareket eden iki hisse senedini ayni anda portföye koymanın marjinal faydası yüksek değildir. Oysa,ters yönde hareket eden, diğer bir deyişle negatif korelasyona sahip olan, iki hisse senedinin ayni anda portföyde bulunması portföyün riskini ciddi biçimde azaltacaktır. Getirileri arasında tam pozitif korelasyon (korelasyon = +1) bulunmayan menkul kıymetlerin bir portföyde toplanması ile, beklenen getiride bir düşme olmaksızın, sistematik olmayan risk azaltılabilmektedir. Riski azaltabilmek için modern portföy teorisinin temel varsayımları olan;
• Sermaye piyasaları etkindir. Piyasa etkinliği, fiyatları etkileyebilecek tüm bilgilerin, hızlı ve doğru bir biçimde, fiyatlara yansıyacak olması, diğer bir ifadeyle herhangi bir anda piyasanın dengede bulunması anlamına gelir. Örneğin, etkin bir piyasada geçmiş fiyatlara bakarak geleceğe yönelik fiyat tahmini yapmak (teknik analiz) mümkün olmamalıdır. Ancak, hiçbir piyasanın tam anlamıyla etkin olmadığı unutulmamalıdır.
• Yatırımcıların temel amacı her dönemde beklenen faydalarını maksimize etmektir.
Fayda refahın bir fonksiyonudur. Refah arttıkça, fayda da artar. Ancak, artış hızı, diğer bir deyişle marjinal fayda, azalır.
• Yatırımcılar, portföy riskinin tahmininde, beklenen getirilerin değişkenliğini baz alırlar.
Riskin ölçütü beklenen getirinin standart sapması, ye da standart sapmanın karesi, varyansıdır.
• Yatırımcılar, yatırım kararlarını verirken, yalnızca yatırımın beklenen getirisi ve riskini göz önünde bulundururlar.
• Yatırımcılar riskten kaçınırlar. diğer bir ifadeyle, yatırımcılar ayni risk düzeyindeki iki farklı yatırım alternatifinden beklenen getirisi daha yüksek olanını tercih ederler; ya da, beklenen getirisi ayni düzeyde olan iki farklı yatırım alternatifinden riski daha düşük olanını tercih ederler.

Markowitz Ortalama-Varyans Modeli

Portföyün Beklenen Getirisi ve Portföy Getirisinin Standart Sapması
Portföyün beklenen getirisi aşağıdaki formülle ifade edilir(Bai Zhidong, Liu Huixia and Wong Wing-Keung; 2009).

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(r_i)$$

E(RP) : Portföyün beklenen getirisi
N : Portföydeki finansal varlık sayısı
wi : i finansal varlığının portföydeki ağırlığı
E(ri) : i finansal varlığının beklenen getirisi
Portföy getirisinin standart sapması ise aşağıdaki formülle ifade edilir.

$$\sigma(r_p) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma(r_i)\sigma(r_j)\rho_{r_i,r_j}}$$

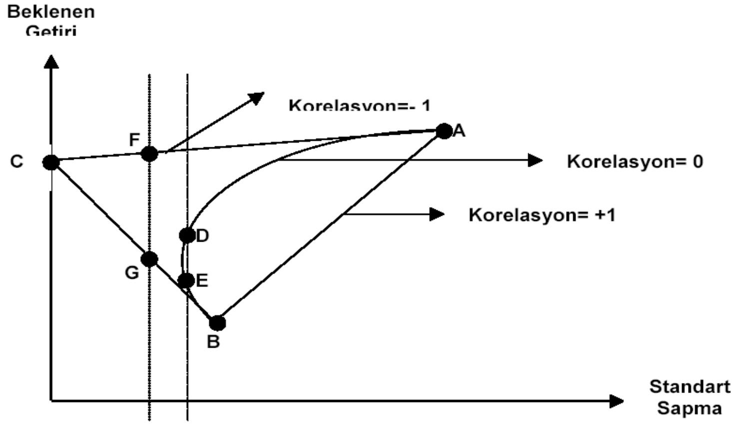
σ(RP) : Portföy getirisinin standart sapması
σ(ri) : i finansal varlığının getirisinin standart sapması
ρri,rj : i ve j finansal varlıklarının getirileri arasındaki korelasyon

İki finansal Varlık İçeren Portföyler

İki finansal varlık içeren bir portföyde, portföy getirisinin standart sapması formülü incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktadır.
• ρri,rj = -1 ve wi = σ(rj)/[σ(ri)+ σ(rj)] ise, portföy getirisinin standart sapması 0 olur. Diğer bir ifadeyle, çeşitlendirme sonucu portföy getirisinin riski tamamen ortadan kalkar.
• ρri,rj = +1 ise, çeşitlendirme ile riskin azaltılması mümkün değildir. Bu durumda portföy getirisinin standart sapması standart sapmaların ağırlıklı ortalamasına eşit olacaktır.

$$\sigma(r_p) = w_1\sigma(r_1) + w_2\sigma(r_2)$$

Finansal varlık getirileri arasındaki korelasyon –1 ve +1 arasında değiştiğinde, portföy getirisinin standart sapmasındaki görülmektedir.



Şekil 1 *Portföy korelasyonları*

Şekil 1'de A ve B noktaları portföyün tamamının A veya B finansal varlıklarından oluştuğu durumu göstermektedir. A ve B finansal varlıkları arasında tam pozitif korelasyon olduğu durumda (korelasyon katsayısı = +1), AB doğrusu, A ve B finansal varlıklarının portföy içindeki değişik ağırlıkları için, portföyün beklenen getirisini ve standart sapmasını göstermektedir. A ve B finansal varlıklarının getirileri arasındaki korelasyon katsayısı 0 olduğu durumda, A ve B finansal varlıklarının portföy içindeki değişik ağırlıkları için, beklenen getiri ve standart sapma arasındaki ilişki bir hiperbolle ifade edilmektedir. A ve B finansal varlıkları arasında tam negatif korelasyon olduğu durumda (korelasyon katsayısı = -1), AC ve BC doğruları, A ve B finansal varlıklarının portföy içindeki değişik ağırlıkları için, portföyün beklenen getirisini ve standart sapmasını göstermektedir.

Şekil.1'de, korelasyon katsayısının 0 ve –1 olduğu durumlarda, ayni risk düzeyi (standart sapma) için iki farklı beklenen getiri olabilmektedir. Örneğin, D ve E portföyleri ayni standart sapmaya sahip olmalarına rağmen, D portföyünün beklenen getirisi E portföyünün beklenen getirisinden yüksektir. Ayni durum F ve G portföyleri için de geçerlidir.

Etkin Portföy

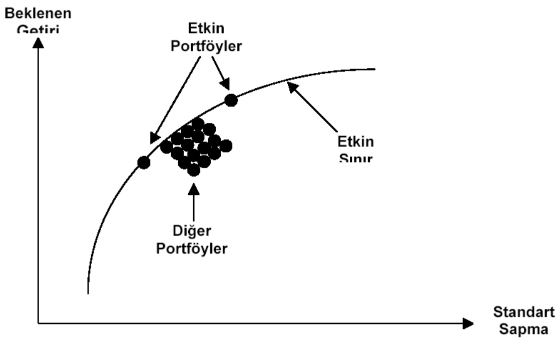
Markowitz'in etkin portföy tanımına göre, belirli bir risk (standart sapma) düzeyinde, en yüksek beklenen getiriye sahip portföy etkin portföydür. diğer bir ifadeyle, etkin portföy belirli bir beklenen getiri düzeyi için, en düşük riske (standart sapmaya) sahip portföydür.
Şekil 1'de, D ve F portföyleri etkin portföylerdir.

Etkin Sınır

N sayıda finansal varlık içeren bir piyasada, finansal varlıklara değişik ağırlıklar verilmesiyle, sınırsiz sayıda portföy oluşturulabilir. Her risk ve beklenen getiri düzeyi için etkin portföylerin birleştirilmesiyle oluşan eğriye etkin sınır denir. Markowitz'e göre portföy yöneticisinin amacı etkin sınır üzerindeki noktaları belirlemektir.

Etkin sınır üzerindeki noktalar portföylerden oluşmakla birlikte, etkin sınırın uç noktaları buna istisnadır. Piyasada en düşük riske sahip olan finansal varlıkla en yüksek getiriye sahip olan finansal varlık etkin sınırın uç noktalarını oluşturabilir.

Şekil.2'de görüldüğü üzere, etkin sınır beklenen getiri eksenine dışbükeydir. Standart sapma arttıkça, etkin sınırın eğimi azalmaktadır. diğer bir ifadeyle, daha fazla risk aldıkça beklenen getirideki marjinal artış azalmaktadır.



Şekil 2 *Etkin snır*

METRODOLOJİ VE YÖNTEM

Karesel programlama, Etkin Sınır ve Yatırımcının Fayda Fonksiyonu, Optimal Portföy ve Endeks modelleri metodolojik olarak verildikten sonra karesel programlama yöntemi ile uygulama yapılmıştır.

Karesel Programlama

Teoride, etkin sınırın elde edilebilmesi için sınırsız sayıda portföyün beklenen getiri-standart sapma grafiğine yerleştirilerek, her bir standart sapma değeri için en yüksek beklenen getiriyiye de her bir beklenen getiri değeri için en düşük standart sapmayı veren portföyün seçilmesi gerekmektedir. Pratikte, etkin sınırın elde edilebilmesi için karesel programlama kullanılmaktadır. Karesel programlama lineer olmayan bir yöneylem araştırması tekniğidir.

Karesel programlamada, amaç fonksiyonu olan portföy varyansı, belirli kısıtlamalar altında, minimize edilir. Örneğin, bu kısıtlamalar, portföyün beklenen getirisinin en az hedeflenen beklenen getiri kadar olması ve finansal varlıkların portföydeki ağırlıkları toplamının bire eşit olması olabilir. Buna göre karesel programlamanın amaç fonksiyonu ve kısıtlamaları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Amaç Fonksiyonu:

$$\min z = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma(r_i)\sigma(r_j)\rho_{r_i,r_j}$$

Kısıtlamalar:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i E(r_i) \geq \text{Hedeflenen Beklenen Getiri}$$

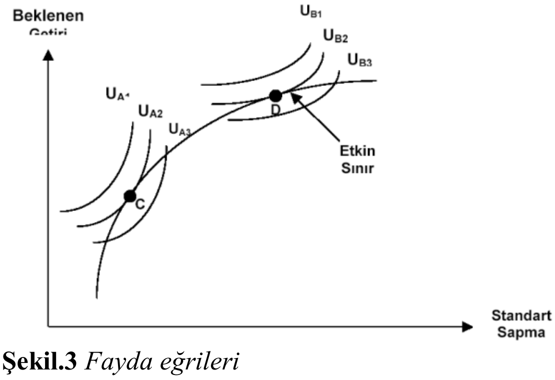
$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

Etkin Sınır ve Yatırımcının Fayda Fonksiyonu

Bir yatırımcının fayda eğrileri, ye da farksızlık eğrileri, o yatırımcının beklenen getiri ve risk tercihlerini gösterir. Bir fayda eğrisi üzerindeki farklı noktalar (risk ve getiri düzeyleri) için, yatırımcının fayda fonksiyonu ayni değeri verir.

Fayda eğrisi, etkin sınırla birlikte, etkin sınır üzerindeki portföylerden hangisinin yatırımcıya en uygun portföy olduğunu belirler. İki yatırımcının etkin sınır üzerinde ayni portföyü seçmesi, ancak, ayni fayda fonksiyonuna sahip olmalarıyla mümkündür.

Şekil.3 iki farklı yatırımcıya ait fayda eğrilerini göstermektedir. Şekilde görüldüğü üzere, fayda eğrileri beklenen getiri eksenine içbükeydir. Standart sapma arttıkça, fayda eğrilerinin eğimi artmaktadır. diğer bir ifadeyle, daha fazla risk aldıkça beklenen getirideki marjinal artış artmakta, yatırımcılar çok daha fazla getiri talep etmektedir. Şekil.3'deki fayda eğrilerinden UA1, UA2 ve UA3 fazlasıyla riskten kaçınan bir yatırımcıya aittir. eğimi oldukça fazla olan bu fayda eğrileri, yatırımcının daha yüksek getiri elde etmek için fazlaca risk almaya istekli olmadığını göstermektedir. UB1, UB1 ve UB3 fayda eğrilerine sahip olan yatırımcı ise ilk yatırımcıya göre daha az riskten kaçınmaktadır. Bu yatırımcı, daha yüksek getiri elde etmek için, ilk yatırımcıya göre, daha fazla riski tolere edebilir.



Şekil.3 *Fayda eğrileri*

Optimal Portföy

Bir yatırımcı için optimal portföy, etkin sınır üzerinde o yatırımcı için en yüksek faydayı sağlayan etkin portföydür. Optimal portföy, etkin sınır ile (etkin sınıra teğet geçen) fayda eğrisi arasındaki teğet noktasında bulunur.

Şekil.3'de C ve D portföyleri optimal portföylerdir. C portföyü fazlasıyla riskten kaçınan yatırımcının optimal portföyü, D portföyü daha az riskten kaçınan yatırımcının optimal portföyüdür. Dolayisi ile, C portföyünün riski ve beklenen getirisi, D portföyüne göre daha düşüktür.

Endeks Modelleri

Karesel programlama anlatılırken, etkin sınır oluşturma ye da optimal portföy seçim problemlerini bu yolla çözmenin, finansal varlık sayısı arttığında, pratikte ne denli zor olabileceği gösterilmişti.

William Sharpe tarafından geliştirilen tekli endeks modeli ve onu takip eden çoklu endeks modelleri, portföyün beklenen getirisi ve riskinin hesaplanması için gereken veri sayısını ciddi derecede azaltmıştır.

Tekli Endeks Modeli

Sharpe, finansal varlıklar ile piyasa arasında doğrusal bir ilişki olduğunu ve bu ilişkinin basit regresyon modeli ile ifade edilebilecegini öne sürmüştür.

$r_i = ai + b_i r_m + \varepsilon i$

$_{ri}$: finansal varlık getirisi

a_i : Regresyon sabiti

$_{bi}$: finansal varlık getirisinin piyasa getirisine olan hassasiyeti (sistematik riskin ölçüsü olan beta katsayısı)

r_m : Piyasa (endeks) getirisi

ε_i : Hata terimi (finansal varligin, piyasa getirisinden bagimsiz, sistematik olmayan riski)

Buna göre, portföyün beklenen getirisi ve sistematik riski aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i [a_i + b_i E(r_m)]$$

$$Sistematik\ Risk\,(Varyans) = \left(\sum_{i=1}^{N} w_i b_i \right)^2 \sigma^2(r_m)$$

Finansal varlıkları Fiyatlama Modeli tekli endeks modelinin uzantısıdır. Bu konu ve beta katsayısı ile ilgili ayrıntılı bilgi finansal varlıkları Fiyatlama Modeli bölümünde verilecektir.

Çoklu Endeks Modeli

Çoklu endeks modelinin tekli endeks modelinden farkı, finansal varlık getirilerini sadece piyasa getirisi ile değil, daha fazla sayıda değişkenle ilişkilendirmesidir. Bu değişkenler faiz ya da enflasyon gibi makro değişkenler olabilir. Değişkenlerin, istatistiksel anlamda, birbirinden bağımsız olması tercih edilir. Arbitraj Fiyatlama Modeli çoklu endeks modelinin uzantısıdır.

Programlama Modeli

Yatırım karalarının verilmesinde beklenen getiri ve risk iki temel faktördür. Getiri; bir yatırımdan belirli bir dönem içinde yapılan yatırıma karşılık elde edilen geliri göstermektedir. Risk ise bir olayın olma olasılığı ile ilgili bir kavramdır. Getiri hesaplamalarındaki temel zorluk; yatırım kararlarının geleceğe ilişkin verilmesidir. Gelecek söz konusu olduğunda belirsizlik ve risk öne çıkmakta ve yatırım kararları subjektif kararlara dayanmaktadır.

Yatırım kararları geleceğe dönük verildiğinden yalnızca getiri yerine beklenen değerden veya getiriden bahsetmek gerekmektedir. Bir yatırımın sadece beklenen getirisi değil aynı zamansa elde edilen getirilerin ortalamadan ne kadar farklı olduğuna bakmak gerekmektedir. Bu farklılık kabaca her bir getirinin ortalamadan farkına bakılarak alınır "$r_j – r$" . Ancak bu hesaplaman önemli sakıncalarından biri elde edilecek pozitif ve negatif değerlerin birbirlerini götürmesi sonucu anlamsız bir değer elde etme tehlikesidir. Bu problem iki şekilde aşılabilir. İlk olarak, ortalamalardan farklılık hesaplanırken , işaretlere bakılmadan sadece mutlak değerlerin alınması. İkincisi ise farkların karesini alarak negatif sonuçların ortadan kaldırılmasıdır. Genelde kullanılan yöntem ikincisidir.

Yatırımları değerlendirirken, daha yüksek getiri beklenirken, daha düşük risk aranmaktadır. Ancak iki yatırım projesini karşılaştırırken hangi projenin risk ve getiri ölçütlerini bir arada kullanarak tercih edebileceğini söyleyebilmek için başka bir ölçüte daha bakmak gerekmektedir.

Yatırımcıların çoğu aynı anda birden fazla menkul kıymete yatırım yapmaktadır. Bu yatırımcılar açısından herhangi bir menkul kıymetin fiyatının azalması ya da artması çok fazla önemli olmamaktadır. Yatırımcı açısından önemli olan portföy riski ve getirisidir. Aslında portföy oluşturmanın genel amacı: geleneksel portföy kuramına göre tüm yumurtaları aynı sepete koymamaktır.

Markowitz çeşitlemesi, portföy getirilerini azaltmadan riskini azaltmak amacıyla, mükemmel ve pozitif korelasyondan daha düşük korelasyona sahip varlıklardan portföy oluşturmaktadır. Markowitz çeşitlemesi, varlıkların birbirleri ile korelasyonlarını dikkate alarak yapılan analitik bir yöntemdir. Varlıklar arasındaki korelasyon azaldıkça portföy riski daha da azalacaktır.

Markowitz yaklaşımına göre bir portföyün varyansı şu şekilde hesaplanmaktadır;

$\sigma^2_p = \Sigma\, \Sigma\, w_i\, w_j \text{ Cov (ij)}$

Portföy riski ise bu formülün standart sapmasıdır ;

$\sigma_p = (\Sigma\, \Sigma\, w_i\, w_j \text{ Cov (ij)})^{1/2}$

σ_p = Portföy riski

w = Her bir menkul değerin portföydeki ağırlığı
Cov (ij) = Menkul kıymetler arasındaki kovaryans

Formüldeki çift toplam işareti; Σ Σ olası tüm kovaryans ilişkilerinin hesaplamaya dahil edildiğini göstermektedir. İkiden fazla hisse senedi olduğu durumlarda formülü açarak kullanmak pratik olmadığı için matriks açılımı ile formül kullanılabilmektedir.

Kullandığımız model hedeflenen beklenen getiri düzeyine karşılık gelen minimum riskli (minimum varyanslı) portföyü bulmaya çalışır. Amaç fonksiyonu, minimize edilecek portföyün varyansıdır;

Min. $\Sigma \Sigma x_i x_j \sigma_{ij}$

Bu ifadede N tane varlık için, σ_{ij} ; i ve j varlıkları arasındaki kovaryans değerini

,

x_i; karar değişkenlerini göstermek için kullanılmıştır.
İki temel kısıtımızdan birincisi; hedeflenen beklenen getiri düzeyi için;

$\Sigma x_i \mu_i \geq R$

μ_i ; i hisse sinin beklenen getirisi
R ; hedeflenen beklenen getiri düzeyi
İkinci temel kısıt ise, portföyü oluşturan hisse senetlerinin ağırlıkları toplamının 1 olmasıdır;

$\Sigma x_i = 1$

Bunlara ek olarak karar değişkenlerinin negatif olmama kısıtını da göz önünde bulundurmalıyız.

Tüm bu açıklamalar ve tanımlar ışığında modelin İMKB 30 endeksi ve endeksi oluşturan hisse senetleri içinden rasgele seçilen 20 tanesi üzerinde uygulaması yapılacaktır.

Modelin İmkb 30 Endekse ve 20 Hisse Senedine Uygulanması

Uygulama kısmında İMKB30 endeksini oluşturan 30 hisse senedi içinden seçilen 20 tanesi ve endeksin kendisi için risk – getiri yapıları belirlenerek çeşitli portföyler oluşturulacaktır. Çalışmanın başında portföylerin oluşturulması, risk – getiri hesaplamalarının yapılması ve modelin kurulması için gerekli olan veriler toplanmıştır: Markowitz karesel programlama modeli ile portföy oluşturmak için MS Excel programı içinde yer alan solver eklentisi kullanılmıştır. Aylık bazda getiriler ve modelin amaç fonksiyonunu oluşturan varyans-kovaryans matrisi ve model tablolarda verilmiştir.
İMKM 30 a dahil olan 20 hisse senedinin ve İMKB 30 eneksinin 2005 yılına ait aylık getirileri belirlenmiştir.

		AKBNK	AKGRT	ARCLK	DENİZ	DOHOL	EREGL	FİNBN	GARAN	İHLAS	İSCTR	İSGYO	KCHOL	MİGRS	SAHOL	SİSE	TCELL	TOASO	TUPRS	VESTL	YKBNK	İMKB 30
7	Ocak 05	-0.01	0.09	0.07	0.44	0.30	0.10	0.28	0.28	0.03	0.05	0.18	0.02	-0.10	0.10	0.08	-0.03	0.13	0.16	0.05	0.40	0.08
8	Şubat 05	-0.06	-0.02	-0.02	-0.05	-0.04	0.01	0.02	0.03	-0.05	0.09	-0.08	-0.04	-0.05	-0.08	0.00	-0.03	-0.12	0.06	-0.06	-0.08	0.02
9	Mart 05	-0.10	-0.14	-0.08	-0.10	-0.02	-0.05	0.03	-0.09	-0.12	-0.09	-0.10	-0.13	-0.03	-0.13	-0.13	0.01	-0.07	0.09	0.04	-0.04	-0.11
10	Nisan 05	0.04	-0.02	-0.17	0.08	-0.13	-0.08	0.14	-0.04	-0.18	-0.06	-0.12	-0.08	-0.03	-0.09	-0.13	-0.08	-0.24	-0.02	-0.07	-0.03	-0.04
11	Mayıs 05	0.04	0.08	0.18	0.18	0.02	0.06	0.27	0.05	0.15	-0.01	0.24	0.06	0.10	0.11	0.09	0.02	0.00	0.10	-0.06	-0.01	0.04
12	Haziran 05	0.10	0.11	0.12	0.24	0.09	0.08	0.22	0.11	-0.16	0.12	0.10	0.06	0.03	0.15	0.21	-0.01	0.21	0.10	0.07	0.02	0.09
13	Temmuz 05	0.10	0.11	0.03	0.06	0.12	0.14	0.00	0.11	0.06	0.10	-0.03	0.02	0.01	0.05	0.20	0.07	0.05	0.03	0.03	0.10	0.07
14	Ağustos 05	0.16	0.05	-0.02	0.02	0.03	0.11	0.22	0.02	-0.06	0.13	-0.01	0.17	0.09	0.09	0.00	0.03	0.00	0.12	-0.01	0.04	0.08
15	Eylül 05	0.07	0.27	-0.02	0.23	-0.01	0.20	0.03	0.08	0.06	0.17	0.26	-0.02	-0.02	0.18	-0.08	0.01	0.21	0.14	-0.05	-0.04	0.07
16	Ekim 05	-0.05	-0.12	0.05	-0.01	-0.12	-0.18	-0.11	0.00	-0.04	0.00	-0.06	-0.18	0.03	-0.08	-0.10	-0.02	-0.01	-0.08	-0.02	-0.10	-0.05
17	Kasım 05	0.23	0.18	0.12	0.18	0.22	0.22	0.34	0.12	0.02	0.15	0.07	0.32	0.13	0.23	0.16	0.16	0.10	0.07	0.04	0.12	0.17
18	Aralık 05	0.01	0.13	0.03	-0.03	0.04	-0.03	0.06	0.08	0.10	0.05	0.06	-0.07	-0.04	-0.06	0.01	-0.03	0.01	0.02	0.05	0.10	0.03
19																						varyans
20																						0.01
21	toplam	0.54	0.72	0.28	1.25	0.49	0.58	1.51	0.76	-0.18	0.70	0.51	0.12	0.12	0.46	0.30	0.09	0.27	0.78	0.00	0.47	0.55
22																						
23	BEKLENEN GETİRİ	0.04	0.06	0.02	0.10	0.04	0.05	0.13	0.06	-0.01	0.06	0.04	0.01	0.01	0.04	0.02	0.01	0.02	0.07	0.00	0.04	0.05

Tablo 1: İMKB 30 endeksi ve seçilen 20 hisse senedinin 2005 yılı aylık getiri değerleri ve endeksin varyansı.

Bu şekilde 20 hisse senedi ve endeks için toplam 12 şer aylık 252 getiri değeri elde edilmiştir ve Tablo 1 de gösterilmiştir.

Ortalama getiriler elde edildikten sonra 20 hisse senedine ait kovaryans değerleri bulunmuştur, Tablo 2. Kovaryans değerlerinin nasıl hesaplanacağına dair gerekli açıklamalar ve örneklemeler yukarda yapılmıştır, hesaplamalarda Excel kullanılmıştır.

		Sütun 1	Sütun 2	Sütun 3	Sütun 4	Sütun 5	Sütun 6	Sütun 7	Sütun 8	Sütun 9	Sütun 10	Sütun 11	Sütun 12	Sütun 13	Sütun 14	Sütun 15	Sütun 16	Sütun 17	Sütun 18	Sütun 19
7	Sütun 1	0.008318																		
8	Sütun 2	0.006895	0.012945																	
9	Sütun 3	0.002557	0.003636	0.00808																
10	Sütun 4	0.00444	0.009757	0.006008	0.021756															
11	Sütun 5	0.004534	0.00684	0.005795	0.011607	0.014307														
12	Sütun 6	0.007366	0.010649	0.003597	0.008903	0.009133	0.012797													
13	Sütun 7	0.007292	0.006235	0.005183	0.01218	0.010164	0.008194	0.017987												
14	Sütun 8	0.002471	0.00631	0.00441	0.010739	0.00912	0.005738	0.005425	0.00801											
15	Sütun 9	0.001243	0.006042	0.004931	0.003404	0.004302	0.004343	0.001079	0.004073	0.009828										
16	Sütun 10	0.004868	0.006965	0.002439	0.003953	0.004293	0.007093	0.002385	0.003836	0.002303	0.006536									
17	Sütun 11	0.003128	0.010579	0.007036	0.013777	0.007075	0.00832	0.007494	0.00701	0.008005	0.004217	0.015668								
18	Sütun 12	0.010391	0.008374	0.005565	0.007402	0.009775	0.011502	0.013942	0.004628	0.002693	0.006515	0.005582	0.017063							
19	Sütun 13	0.004303	0.001479	0.002852	-0.00042	0.000323	0.002456	0.003712	-0.00097	0.000964	0.001514	0.001119	0.006041	0.004443						
20	Sütun 14	0.008245	0.010825	0.006354	0.012577	0.009005	0.011569	0.010368	0.006564	0.004286	0.006901	0.011045	0.01226	0.003951	0.01373					
21	Sütun 15	0.006069	0.006638	0.007753	0.007832	0.009977	0.00803	0.007721	0.006923	0.003541	0.005174	0.005284	0.009729	0.002706	0.008694	0.013814				
22	Sütun 16	0.003399	0.002479	0.002397	0.00051	0.003431	0.004226	0.002635	0.000923	0.002069	0.002164	0.001353	0.005638	0.002649	0.003997	0.003484	0.003256			
23	Sütun 17	0.004609	0.009807	0.006846	0.011869	0.009184	0.009326	0.004618	0.007598	0.004327	0.006844	0.011671	0.006517	0.001193	0.011578	0.00815	0.002715	0.015496		
24	Sütun 18	0.001257	0.003562	0.001354	0.005472	0.004672	0.005286	0.005174	0.002735	0.001246	0.00202	0.005084	0.003966	-0.00015	0.004635	0.002239	0.000746	0.004366	0.004343	
25	Sütun 19	0.000739	0.000759	0.001417	0.001344	0.003889	0.001195	0.0013	0.001974	-0.00016	0.000708	0.000297	0.001366	-0.00028	0.001157	0.002935	0.000857	0.003133	0.000584	0.002424
26	Sütun 20	0.002428	0.00516	0.003266	0.012183	0.013413	0.005932	0.00931	0.009495	0.003836	0.00208	0.005722	0.006013	-0.0021	0.005676	0.006797	0.001039	0.006071	0.003958	0.003496

Tablo 2: Hisse senetlerinin kovaryans değerleri

Daha sonra kovaryans değerlerin transpozeleri hesaplanmış ve varyans - kovaryans matris hesaplanmıştır, Tablo 3.

5																				
6	0.008318	0.006895	0.002557	0.00444	0.004534	0.007366	0.007292	0.002471	0.001243	0.004868	0.003128	0.010391	0.004303	0.008245	0.006069	0.003399	0.004609	0.001257	0.000739	0.002428
7	0.006895	0.012945	0.003636	0.009757	0.00684	0.010649	0.006235	0.00631	0.006042	0.006965	0.010579	0.008374	0.001479	0.010825	0.006638	0.002479	0.009807	0.003562	0.000759	0.00516
8	0.002557	0.003636	0.00808	0.006008	0.005795	0.003597	0.005183	0.00441	0.004931	0.002439	0.007036	0.005565	0.002852	0.006354	0.007753	0.002397	0.006846	0.001354	0.001417	0.003266
9	0.00444	0.009757	0.006008	0.021756	0.011607	0.008903	0.01218	0.010739	0.003404	0.003953	0.013777	0.007402	-0.00042	0.012577	0.007832	0.00051	0.011869	0.005472	0.001344	0.012183
10	0.004534	0.00684	0.005795	0.011607	0.014307	0.009133	0.010164	0.00912	0.004302	0.004293	0.007075	0.009775	0.000323	0.009005	0.009977	0.003431	0.009184	0.004672	0.003889	0.013413
11	0.007366	0.010649	0.003597	0.008903	0.009133	0.012797	0.008194	0.005738	0.004343	0.007093	0.00832	0.011502	0.002456	0.011569	0.00803	0.004226	0.009326	0.005286	0.001195	0.005932
12	0.007292	0.006235	0.005183	0.01218	0.010164	0.008194	0.017987	0.005425	0.001079	0.002385	0.007494	0.013942	0.003712	0.010368	0.007721	0.002635	0.004618	0.005174	0.0013	0.00931
13	0.002471	0.00631	0.00441	0.010739	0.00912	0.005738	0.005425	0.00801	0.004073	0.003836	0.00701	0.004628	-0.00097	0.006564	0.006923	0.000923	0.007598	0.002735	0.001974	0.009495
14	0.001243	0.006042	0.004931	0.003404	0.004302	0.004343	0.001079	0.004073	0.009828	0.002303	0.008005	0.002693	0.000964	0.004286	0.003541	0.002069	0.004327	0.001246	-0.00016	0.003836
15	0.004868	0.006965	0.002439	0.003953	0.004293	0.007093	0.002385	0.003836	0.002303	0.006536	0.004217	0.006515	0.001514	0.006901	0.005174	0.002164	0.006844	0.00202	0.000708	0.00208
16	0.003128	0.010579	0.007036	0.013777	0.007075	0.00832	0.007494	0.00701	0.008005	0.004217	0.015668	0.005582	0.001119	0.011045	0.005284	0.001353	0.011671	0.005084	0.000297	0.005722
17	0.010391	0.008374	0.005565	0.007402	0.009775	0.011502	0.013942	0.004628	0.002693	0.006515	0.005582	0.017063	0.006041	0.01226	0.009729	0.005638	0.006517	0.003966	0.001366	0.006013
18	0.004303	0.001479	0.002852	-0.00042	0.000323	0.002456	0.003712	-0.00097	0.000964	0.001514	0.001119	0.006041	0.004443	0.003951	0.002706	0.002649	0.001193	-0.00015	-0.00028	-0.0021
19	0.008245	0.010825	0.006354	0.012577	0.009005	0.011569	0.010368	0.006564	0.004286	0.006901	0.011045	0.01226	0.003951	0.01373	0.008694	0.003997	0.011578	0.004635	0.001157	0.005676
20	0.006069	0.006638	0.007753	0.007832	0.009977	0.00803	0.007721	0.006923	0.003541	0.005174	0.005284	0.009729	0.002706	0.008694	0.013814	0.003484	0.00815	0.002239	0.002935	0.006797
21	0.003399	0.002479	0.002397	0.00051	0.003431	0.004226	0.002635	0.000923	0.002069	0.002164	0.001353	0.005638	0.002649	0.003997	0.003484	0.003256	0.002715	0.000746	0.000857	0.001039
22	0.004609	0.009807	0.006846	0.011869	0.009184	0.009326	0.004618	0.007598	0.004327	0.006844	0.011671	0.006517	0.001193	0.011578	0.00815	0.002715	0.015496	0.004366	0.003133	0.006071
23	0.001257	0.003562	0.001354	0.005472	0.004672	0.005286	0.005174	0.002735	0.001246	0.00202	0.005084	0.003966	-0.00015	0.004635	0.002239	0.000746	0.004366	0.004343	0.000584	0.003958
24	0.000739	0.000759	0.001417	0.001344	0.003889	0.001195	0.0013	0.001974	-0.00016	0.000708	0.000297	0.001366	-0.00028	0.001157	0.002935	0.000857	0.003133	0.000584	0.002424	0.003496
25	0.002428	0.00516	0.003266	0.012183	0.013413	0.005932	0.00931	0.009495	0.003836	0.00208	0.005722	0.006013	-0.0021	0.005676	0.006797	0.001039	0.006071	0.003958	0.003496	0.016026
26																				

27 **Tablo 3: Hisse senetlerine ait Varyans - Kovaryans Matrisi**

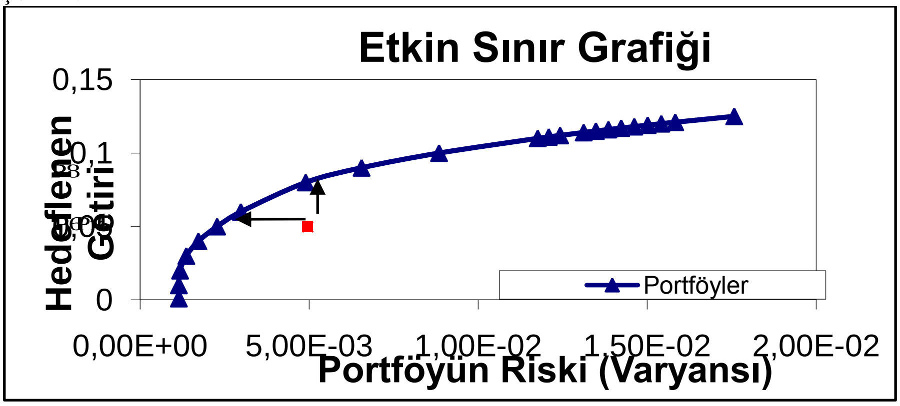
28

Bu matrisdeki değerler, LİNGO çözümleme programında kullanılacak değerler için temel teşkil etmektedir.

Bulunan değerler ile modelin çözümlenmesi sonucunda çok çeşitli oranlarda risk ve getiri değerlerine sahip portföyler (P1… P22) ile İMKB30 endeksi ile aynı risk ve getiri düzeyine sahip portföyler de elde edilmiştir (P6 ve P8), Tablo 4.

Portföy	Getiri	Risk
P1	0.001	1.14E-03
P2	0.01	1.14E-03
P3	0.02	1.18E-03
P4	0.03	1.36E-03
P5	0.04	1.72E-03
P6	0.05	2.27E-03
P7	0.06	2.97E-03
P8	0.08	4.90E-03
P9	0.09	6.55E-03
P10	0.1	8.84E-03
P11	0.11	1.18E-02
P12	0.111	1.21E-02
P13	0.112	1.24E-02
P14	0.114	1.31E-02
P15	0.115	1.35E-02
P16	0.116	1.39E-02
P17	0.117	1.42E-02
P18	0.118	1.46E-02
P19	0.119	1.50E-02
P20	0.12	1.54E-02
P21	0.121	1.58E-02
P22	0.125	1.76E-02
Px	0.0498	4.96E-03

Elde edilebilecek sınırsız sayıdaki portföyler içinden, İMKB 30 endeksi ile aynı risk – getiri oranına sahip portföyde içindeki hisse senetlerinin ağırlıkları verilmiştir. Hedeflenen Getiri ve Risk değerleri kullanılarak Etkin Sınır Grafiği oluşturulmuştur, Şekil 1.



Şekil 1 *Etkin sınır*

P6 portföyü oluşturan hisselerin ağırlıkları

AMT(1)	0.0000000E+00	0.1451892E-02
AMT(2)	0.0000000E+00	0.1472891E-02
AMT(3)	0.0000000E+00	0.1842190E-02
AMT(4)	0.0000000E+00	0.1309237E-02
AMT(5)	0.0000000E+00	0.3885478E-02
AMT(6)	0.0000000E+00	0.2809976E-02
AMT(7)	0.0000000E+00	0.3112624E-02
AMT(8)	0.0000000E+00	0.6453139E-03
AMT(9)	0.7298190E-01	-0.7242858E-05
AMT(10)	0.0000000E+00	0.3223067E-03
AMT(11)	0.0000000E+00	0.1693440E-02
AMT(12)	0.0000000E+00	0.4207183E-02
AMT(13)	0.2770218	0.4484974E-05
AMT(14)	0.0000000E+00	0.3347404E-02
AMT(15)	0.0000000E+00	0.3296319E-02
AMT(16)	0.0000000E+00	0.5607931E-03
AMT(17)	0.0000000E+00	0.3550381E-02
AMT(18)	0.1867718	0.0000000E+00
AMT(19)	0.4632245	0.0000000E+00
AMT(20)	0.0000000E+00	0.1840854E-02

Hisse 9 (İHLAS) : 0.073
Hisse 13 (MİGRS) : 0.277
Hisse 18 (TUPRS) : 0.187
Hisse 19 (VESTL) : 0.463
Toplam : 1

Örnek portföydeki gibi pek çok portföy içerdiği hisse senetleri ve ağırlıklarına göre farklı risk getiri yapısına sahip olacaktır.

Endeks ile aynı risk – getiri oranına sahip portföy en iyi portföy anlamına gelmemektedir. Karar alıcı kişiler ya da yatırımcılar, daha yüksek getiriye sahip olan portföyleri seçebilecekleri gibi, aynı getiri düzeyinde bulunup daha düşük risk değerine sahip portföy için de tercihte bulunabilmektedirler.

P6 portföyünde sadece 4 hisse senedi yer almıştır diğer 1 hisse senedinin portföydeki ağırlığı 0 dır.

Etkin sınır grafiği incelendiğinde İMKB 30 endeksi ile aynı risk – getiri yapısına sahip portföyün getirisi sabit kalmakla birlikte bu portföyden daha düşük bir risk değerine sahip portföy de saptanabilmiştir (P6). Diğer taraftan İMKB 30 endeks ile aynı risk – getiri yapısına sahip portföyün riski sabit kalmakla birlikte daha yüksek bir getiri oranına sahip portföy de tanımlanabilmiştir (P8).

Sonuç

Bu çalışmada Markowitz Modern Portföy Yönetimi'nde kullanılan etkin sınırın bulunması ve portföylerin oluşturulması yöntemi kullanılarak portföy seçim modelinin İMKB 30 a dahil hisse senetleri üzerine uygulamaları yapılmıştır. Teknolojideki ve yazılım dünyasındaki gelişmeler Markowitz modelinin uygulanma sahasını çok daha fazla genişletmiş ve kolay hale getirmiştir. Çok büyük ölçekteki portföy ve risk çözümlemeleri tüm piyasalar için uygulanabilir bir hale gelmiştir.

İlk bölümde programın kullanımı için ön hazırlık yapılmış, kısıtlar, sınır değerler gibi değişkenler modifiye edilmiştir. İMKB 30 endekse dahil 20 hisse senedinin 2005 yılı içindeki aylık getirileri hesaplanmış, ortalama getiriler ve varyans – kovaryans matrisi hesaplanmıştır. Portföy seçim modeli İMKB 30 endeksi ile aynı risk – getiri yapısına sahip portföylerin oluşturulması gerçekleştirilmiştir.

Daha sonra sınırsız sayıda oluşturulabilecek portföyler içinden, İMKB 30 endeksi ile aynı risk – getiri yapısına sahip portföy tespit edilmiş, sonra da risk aynı kalmak koşulu ile daha yüksek getirili portföyün olabileceği ya da endeks ile aynı getiri değerine sahip olmakla birlikte daha düşük risk yapısına sahip portföylerin oluşturulabileceği ispatlanmıştır.

Ortaya konulan portföyler ve modeller sayesinde özellikle sermaye piyasalarında portföy oluşturmak isteyen küçük yatırımcılar ya da büyük ölçekli portföy şirketlerindeki karar vericiler için üç farklı örnek portföy ve strateji sunularak örnek teşkil edilmiştir.

Çalışmaların devamında da farklı sayıda hisse senedi ve farklı dönemlerdeki getiri değerleri kullanılarak sonuçlardaki değişimler izlenebilir.

Referanslar

Ş.A.Baray – Ş.Esnaf, Yöneylem Araştırması,Literatür,İstanbul,(2000).

M.B.Karan, Yatırım Analizi ve Portföy Yönetimi,Gazi, Ankara (2001).

H.Markowitz, The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints. *Naval Res.Log.Quart.*,3, (1956).

W.F.Sharpe, Portfolio Theory and Capital Markets, M Graw Hill, New York (1970).

A.Ulucan, Markowitz kuadratik programlama ile portföy seçim modelinin, sermaye piyasasında endeks ile aynı Risk-Getiri yapısına sahip portföyün elde edilmesinde kullanımı, Hacettepe Üniversitesi İktisadi ve İlimler Fakültesi Dergisi, Cilt 20, sayı 2, 141-153,2002.

J.B. Williams, The theory of investment value, North Holland Publishing,Amsterdam); reprinted 1997 (Fraser Publihing, Burlington,VT).

Türkiye Sermaye Piyasası Aracı Kuruluşlar Birliği, Finans .

Markowitz H.(1952: Portfolio Selection, Journal Of Finance, Vol. 7, Pp. 77–91,.

Megginson W. (1996): A Historical Overview Of Research In Finance. *Journal Of Finance*, 39(2), 323-346.

Markowitz H. (1959 Portfolio Selection: Efficient Diversification Of Investments, John Wiley, New York, NY.

Markowitz M. (1991): Autobiography, The Nobel Prizes 1990, Editor Tore Frängsmyr, [Nobel Foundation], Stockholm.

John Burr Williams. (1938): The Theory Of Investment Value, Publiser Mas

Tomáš A Soňa B and Ivo J. (2012): "Time-Varying Betas of Banking Sectors", Finance a úvěr-*Czech Journal of Economics and Finance*, 62, no. 6, Page: 485

Radovan Chalupka and Juraj Kopecsni. (2009): "Modeling Bank Loan LGD of Corporate and SME Segments: A Case Study "Finance a úver – *Czech Journal of Economics and Finance*, 59, no. 4

Antoine And Bertille. (**2012).** "Portfolio Selection With Estimation Risk: A Test-Based Approach" *Journal Of Financial Econometrics,* Volume: **10** Issue: **1** Pages: **164-197**

Disatnik David and Katz Saggi. (2012): "Portfolio Optimization Using A Block Structure For The Covariance Matrix" *Journal Of Business Finance & Accounting* Volume: 39 Issue: 5-6 Pages: 806-843 , Un-Jul

Tu Jun, Zhou Guofu.(2011): " Markowitz Meets Talmud: A Combination Of Sophisticated And Naive Diversification Strategies, *Journal Of Financial Economics* Volume: 99 Issue: 1 Pages: 204-215 DOI, Jan

Jorion P, (1986): Bayes-Stein Estimation For Portfolio Analysis. *Journal Of Financial And Quantitative Analysis* 21, 279-292.

Mackinlay A.C, Pastor L. (2000). Asset Pricing Models: Implications For Expected Returns And Portfolio Selection. Review Of Financial Studies 13, 883-916.

Kan R, Zhou G. (2007): Optimal Portfolio Choice With Parameter Uncertainty. *Journal Of Financial And Quantitative Analysis* 42, 621-656.

Graham Bornholt. (2013) "The Failure Of The Capital Asset Pricing Model (Capm): An Update And Discussion", *A Journal Of Accounting, Finance And Business Studies*, ABACUS, Vol. 49, Supplement, Pages: 36-4, 3

Bai Zhidong, Liu Huixia and Wong Wing-Keung: (2009): "Enhancement Of The Applicability Of Markowitz's Portfolio Optimization By Utilizing Random Matrix Theory" *Mathematical Finance* Volume: 19 Issue: 4 Pages: 639-667 Published: Oct

Alexander Gordon J. (2009): "From Markowitz To Modern Risk Management" *European Journal Of Finance* Volume: 15 Issue: 5-6 Pages: 451-461 ,