



Taxicab Geometride Graf Uygulamaları Cansel AYCAN¹, Hatice Nur KOÇ^{*2}, Makbule KIZILHAN³

¹Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 20160, Denizli, TÜRKİYE

²Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 20160, Denizli, TÜRKİYE

³Pamukkale Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 20160, Denizli, TÜRKİYE

¹(ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9893-5642>)

²(ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-6023-7853>)

³(ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-0282-6072>)

(Alınış / Received: 21.01.2025, Kabul / Accepted: 28.01.2025, Online Yayınlanma / Published Online: 31.01.2025)

*İlgili yazar ve danışmanı : hkocc182@gmail.com , c_avcan@pau.edu.tr

Öz: Bu çalışmada öncelikle, şehir ve bölge planlamasında önemli bir yere sahip olan Taxicab geometri tanıtılmıştır. Taxicab geometrinin kullanım alanlarından bahsedilmiştir. Daha sonra düğüm noktaları ve kenar yapılarıyla farklı alanlarda kullanılan Graf teorisi ele alınmıştır. Taxicab geometri ve Graf teorisinin birleşimi üzerine bugüne kadar bir çalışma yapılmamış olması, bu araştırmanın özgün yanını oluşturmaktadır. Çalışmanın temel amacı, Taxicab geometride yer alan temel geometrik yapıların Graf teorisi ile birleştirilerek yeniden tanımlanması ve şekillendirilmesidir. Makalemizde çember ve parabol için önce Taxicab yapısını daha sonra ise Graf yapısını inceledik. Bu yaklaşım, her iki disiplinin bir araya getirilmesiyle, geometrik ve mekânsal analizlerde yeni tasarımlar ve uygulamalara olanak sağlamayı hedeflemektedir.

Anahtar Kelimeler: Taxicab geometri, Taxicab metriği, Graf teori

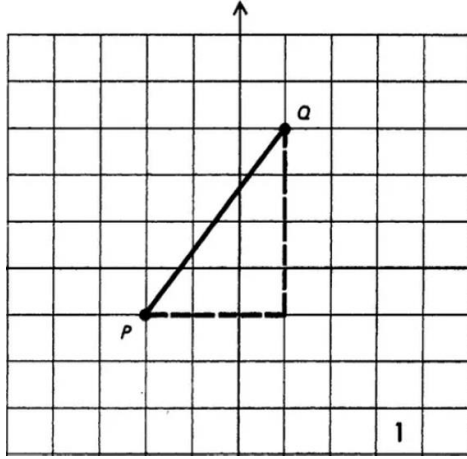
Graph Applications in Taxicab Geometry

Abstract: This study first introduces Taxicab geometry, which holds a significant place in urban and regional planning. The applications of Taxicab geometry are discussed. Subsequently, Graph Theory, known for its use in various fields with its node and edge structures, is examined. The originality of this research lies in the fact that no prior study has explored the combination of Taxicab geometry and Graph Theory. The main objective of the study is to redefine and reshape the fundamental geometric structures in Taxicab geometry by integrating them with Graph Theory. In our article, we analyzed the Taxicab structure and then the Graph structure for circles and parabolas. This approach aims to enable new designs and applications in geometric and spatial analysis by combining these two disciplines.

Keywords: Taxicab Geometry, Taxicab Metric, Graph Theory

Örnek 1

$P = (2, -1)$, $Q = (1, 3)$ noktaları verilsin. P ve Q arasındaki en kısa uzaklık PQ Öklid metriğine göre hesaplanmış olsaydı, bu uzaklığın hipotenüsü yardımıyla 5 olarak hesaplardık. Taxicab metriğine göre ise bu uzaklık 7 birim çıkmaktadır (Krause, 1986).

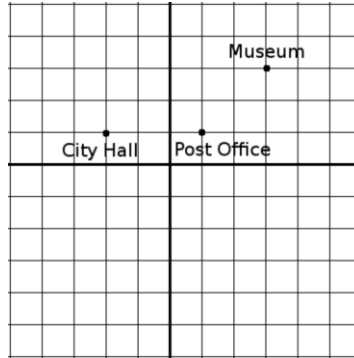


Öklid metriği $\rightarrow 3^2 + 4^2 = 25$ yani PQ arası 5 birim

Taxicab metriği $\rightarrow 3$ birim + 4 birim = 7 birim

Örnek 2

Taxicab geometri, Öklid geometrisinden daha kullanışlı bir modeldir. Postaneden müzeye olan Öklid mesafesinin $\sqrt{8}$ blok, postaneden belediye binasına olan Öklid mesafesinin $\sqrt{9} = 3$ blok olduğu bilgisinden sadece bir kuş faydalanabilir. Bu bilgi, caddelerde veya kaldırımlarda seyahat etmek zorunda kalan bir kişi için yararlı değildir. İnsanlar için taksi mesafesi gerçek mesafedir. Müzenin Postaneye, Belediye Binasından daha yakın olduğu insanlar için doğru değildir (Krause, 1986).

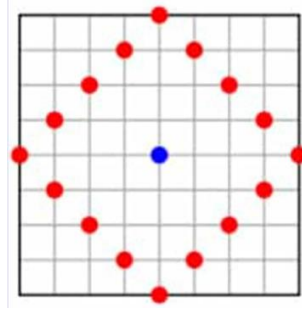


2. Bazı Geometrik Figürlerin Taxicab Uzaklığı

2.1. Taxicab Çember

Tanım 2.1.1. Taxicab düzleminde alınan sabit bir noktaya sabit bir uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu geometrik yere Taxicab çemberi adı verilir. Bu tanımı özel olarak özel olarak $M = (0, 0)$ noktasını sabit nokta olarak seçip, bu noktaya sabit, 1 birim uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olarak ele alırsak buna Taxicab birim çemberi denir (Yavuz, 2006).

$$\zeta = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1, x, y \in \mathbb{R}\}$$



Şekil 2.1.1. Taxicab Çember

2.2. Taxicab Elips

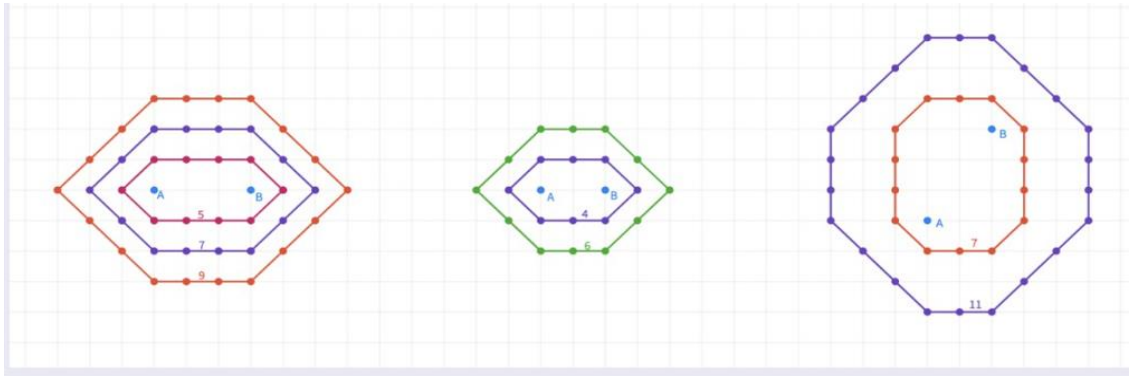
Tanım 2.2.1. Analitik düzlemde, sabit iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit $2a$ birim olan noktaların geometrik yerine elips denir. $F_1(x_1, y_1)$ ve $F_2(x_2, y_2)$ sabit noktalarına odak noktaları denir. Böylece elipsin tanımı

$$E = \{P(x, y) | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

olarak verilir. Burada d Öklidyen anlamda uzaklık fonksiyonudur.

Tanım 2.2.2. Düzlemde iki sabit odak noktası $F_1(x_1, y_1)$ ve $F_2(x_2, y_2)$ olsun. Bir $P(x, y)$ noktası, şu şartı sağlıyorsa, bu nokta Taxicab elipsinin bir parçasıdır (Gray vd., 1997; Janssen, 2007):

$$d_T(P, F_1) + d_T(P, F_2) = 2a \rightarrow |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a$$



Şekil 2.2.1. Taxicab Elips

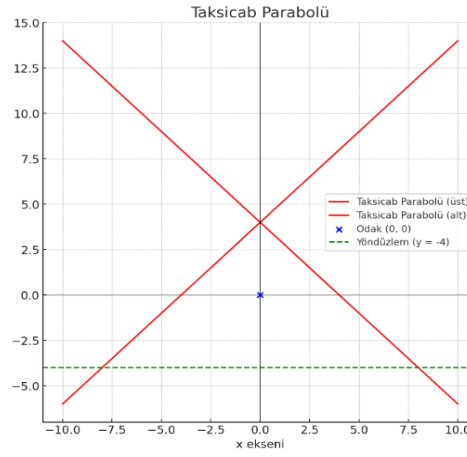
2.3. Taxicab Parabol

Tanım 2.3.1. Bir düzlemde bulunan sabit bir L doğrusu ve sabit bir F noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesinin oluşturduğu şekle parabol denir (Hacısalıhoğlu, 1990).

Tanım 2.3.2. Taxicab geometrisinde bir parabol, bir odak noktası ve bir doğruya (yöndüzlem) olan taksi mesafelerinin eşit olduğu noktalar kümesi olarak tanımlanır. Matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir:

Odak noktası $F(h, k)$ ve doğrutmanı $y = c$ olmak üzere, bir noktadan odak noktasına olan taksi mesafesi ile bu noktadan doğruya olan taksi mesafesi eşittir:

$$|x - h| + |y - k| = |y - c|$$



Şekil 2.3.1 Taksicab Parabolü

2.4. Taksicab Hiperbol

Tanım 2.4.1. Analitik düzlemde odak noktası olarak adlandırılan sabit iki noktaya uzaklıkları farkı mutlak değerce, sabit olan noktaların geometrik yerine hiperbol adı verilir (Kaya, 2002).

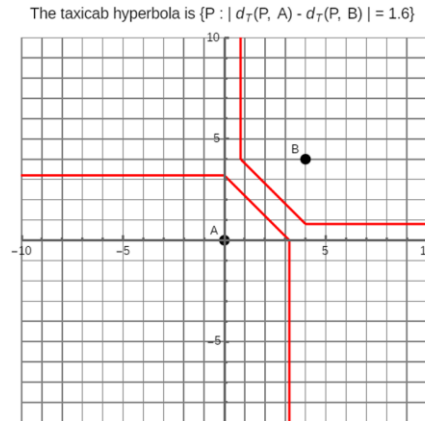
$$H = \{P(x, y) | d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a\}$$

Burada d Öklidyen anlamda uzaklık fonksiyonudur.

Tanım 2.4.2. Taksicab geometrisinde, iki nokta arasındaki mesafe şu şekilde tanımlanır:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

Taksicab hiperbol, bu mesafe fonksiyonuna göre sabit bir fark veren iki nokta kümesini tanımlar.



Şekil 2.4.1 Taksicab Hiperbol

3. Bazı Taksicab Figürlerinin Graf Yardımıyla Tanımlanması

3.1. Graf Teori Tanımları

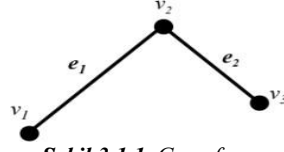
Bu bölümde bazı Taksicab figürlerinin Graf Teori yardımıyla nasıl tanımlanacağına değineceğiz. Öncelikli olarak graf için önemli birkaç tanımdan bahsedelim.

3.1.1 Tanım G grafi, nokta ve kenarlardan oluşan bir yapıdır. Şöyle ki, elemanları düğüm (nokta) olarak adlandırılan sonlu ve boş olmayan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ kümesi ile sonlu ve boş olmayan elemanları ise kenar olarak adlandırılan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ kümesinden oluşur.

$G = (V(G), E(G))$ şeklinde tanımlanır. Daha kısa bir gösterim ile $G = (V, E)$ ya da sadece G ile gösterilir. Bir grafi çizmek için düğüm(nokta) ile bu düğümler arasında geçişi sağlayan kenarlar gereklidir. Fakat bu düğüm ve kenarlar ile oluşturulabilecek graflar tek değildir (Demir, 2021).

3.1.2. Tanım Bir $G = (V, E)$ grafında, aşağıdaki özelliği sağlayan iki noktaya komşu denir.

- G grafına ait olan iki noktayı birleştiren en az bir kenar vardır. G grafından alınan bir v_i noktasına komşu olan tüm noktalara, v_i noktasının bir komşuluğu denir.



Şekil 3.1.1. G grafi

Şekil 3.1.1. deki graftaki komşulukları;

$$e_1 = v_1 v_2$$

$$e_2 = v_2 v_3$$

olduğundan v_1 ve v_2 noktaları ile v_2 ve v_3 noktaları komşudur. v_1 ile v_3 noktaları arasında bu noktaları birleştiren bir kenar bulunmadığından v_1 ile v_3 noktaları komşu değildir (Şentürk, 2024).

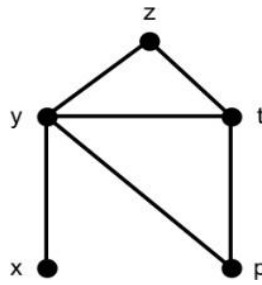
3.1.3. Tanım Bir grafta ortak noktaya sahip olan kenarlara bitişik kenarlar denir. Ayrıca herhangi bir $G = (V, E)$ grafında herhangi bir kenardan çizilebilen kenar sayısı, o noktanın derecesi olarak adlandırılır. Bu kenara v dersek $d(v)$ ile gösterilir. Bir grafın derecesi en küçük olan noktasına minimum dereceli nokta denir ve bir G grafının minimum dereceli noktasının derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir. Bir grafın derecesi en büyük olan noktasına maksimum dereceli nokta denir ve bir G grafının maksimum dereceli noktasının derecesi $\Delta(G)$ ile gösterilir. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Grafta bir noktanın derecesi 0 ise bu noktaya izole nokta denir. $u \in V$ için $d(u) = 1$ ise u ya sarkık nokta denir (West, 2001; Sunar, 2021).

3.1.4. Tanım Bir G grafına ait iki nokta arasına birden çok kenar çizilebiliyor ise, buna katlı kenarlar denir. G grafında bir kenarın uç noktaları aynı olursa bu kenar ilmek adını alır (Sunar, 2021; Vasudev, 2006).

3.1.5. Tanım Bir grafın nokta sayısı; $|V|$ ve kenar sayısı; $|E|$ şeklinde gösterilir ve bir G grafının nokta sayısı ve kenar sayısı sonlu ($|V| < \infty$ ve $|E| < \infty$) ise sonlu graf denir (Sunar, 2021; Vasudev, 2006).

3.1.6. Tanım Bir G grafında $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$ sonlu kenar dizisine yürüme(tur) denir. Bir yürüme(tur) $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ şeklinde de gösterilir. Burada önemli olan art arda gelen düğümler (noktalar) komşu olmalıdır. Bir yürümede(tur) çizilebilen kenarların hepsi birbirini tekrar etmiyor ise buna iz denir. Tüm noktaları farklı olan ize yol denir. Devir ise aşağıdaki komşuluğu sağlayan ize denir;

- En az bir kenar içerir.
- Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan izdir (Demir, 2021; Wilson, 1996).



Şekil 3.1.2. G Grafi

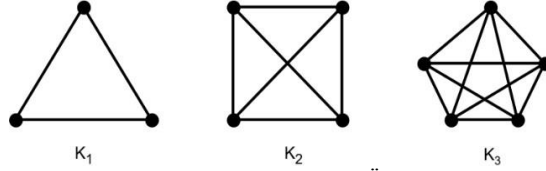
3.1.7. Tanım Graftaki her düğüm arası eşit uzaklıkta ise bu grafa eşit uzaklıklı veya sabit uzaklıklı graf denilmektedir (Şentürk, 2024).

3.1.8. Tanım Katlı kenar ve ilmek bulundurmeyen grafa basit graf denir. Eğer bir graf ilmek içeriyor ise buna yalancı graf (pseudo graf), denir. Eğer bir graf katlı kenar içeriyor ise buna da çoklu graf (multi graf) adı verilir (Sunar, 2021; Vasudev, 2006).



Şekil 3.1.3. Kenarlarına Göre Graf Çeşitleri (Basit Graf, Multi Graf, Yalancı Graf)

3.1.9. Tanım Bir grafın tam graf olması için, bu grafa alınan iki nokta arasında mutlaka bir kenar çizilebilmelidir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilip, bu grafa ait bir noktanın derecesi ise $(n - 1)$ dir (Demir, 2021). Tam grafların kenar sayısı $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ile bulunabilir (Şentürk, 2024).



Şekil 3.1.4. Tam Graf Örnekleri

3.1.10. Tanım Bir G grafında her iki düğüm arasında bir yol oluşuyorsa buna bağlantılı graf denir. Aksi halde ise bağlantısız graf adı verilir (Demir, 2021; Wilson, 1996).



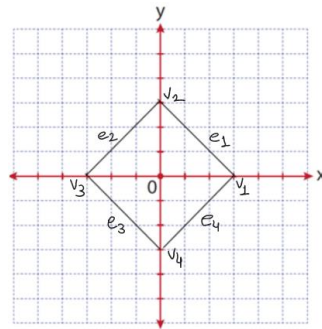
Şekil 3.1.5. Bağlantılı ve Bağlantısız Graf Örneği

3.1.11. Tanım G grafında bütün düğümlerin dereceleri eşit ise bu grafa düzenli (regüler) graf denir. Eğer $\forall v \in V$ için $d(v) = r$ ise grafa r -düzenli (r -regüler) graf denir (West, 2001; Sunar, 2021).



Şekil 3.1.6 Regüler Graf Örnekleri

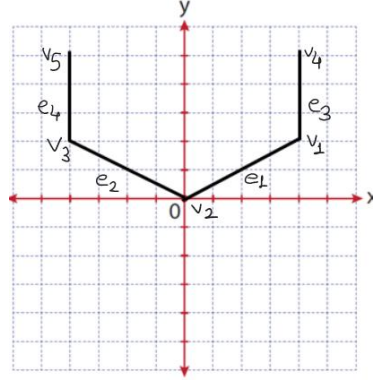
3.2. Taxicab Çemberinin Graf Modellemesi



- Köşeleri; $v_1(3,0)$, $v_2(0,3)$, $v_3(-3,0)$, $v_4(0,-3)$
- Kenarları; e_1, e_2, e_3, e_4
- Komşu köşeler; $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1$
- Köşelerin dereceleri; $d(v_1) = 2, d(v_2) = 2, d(v_3) = 2, d(v_4) = 2$
- G grafının boyutu (kenar sayısı); 4
- G grafının mertebesi ; 4

- Çember basit graftır.
 - Her nokta arası eşit uzaklıkta olduğu için sabit uzaklıklı graftır.
 - Herhangi iki nokta arasında yol mevcut olduğu için bağlantılı graftır.
- Örneğin;
- $$v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$$
- $$v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$$
- Yukarıda verdiğimiz yol örneği ile değerlendirdiğimizde bu bir devirli graftır.
 - Tam graf değildir çünkü v_1v_3 ve v_2v_4 kenarını içermez.

3.3. Taxicab Parabolün Graf Modellemesi



- Köşeleri; $v_1(4,2)$, $v_2(0,0)$, $v_3(-4,2)$, $v_4(4,5)$, $v_5(-4,5)$
 - Kenarları; e_1 , e_2 , e_3 , e_4
 - Komşu köşeler; v_1v_2 , v_2v_3 , v_3v_5 , v_4v_1
 - Köşelerin dereceleri; $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 1$, $d(v_5) = 1$
 - Bütün noktaların dereceleri eşit olmadığı için regüler graf değildir.
 - Matematikte çalıştığımız parabol eğrileri kapalı eğri grubunda değildir. Parabol sonsuzda noktaları olan bir eğridir. Bu nedenden dolayı parabolü devirli ve kapalı bir graf olarak tanımlayamayız
 - Yukarıdaki gösterilen parabol modeli üzerinde bir kapalı alt graf yapısı oluşturabiliriz. v_4 , v_5 noktalarını seçerek bu noktalardan sonra gelen açık kısmı hariç tutarak sadece v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 köşeleri ve e_1 , e_2 , e_3 , e_4 kenarları ile bir kapalı alt graf modeli oluşturarak sonlu bir parabol kesiti üzerinde çalışabiliriz.
 - Bu graf modeli ancak kapalı bir alt graf olarak tanımlanırsa basit graf olarak adlandırılabilir.
 - v_4 ve v_5 noktalarını eğri üzerinde istediğimiz konumda seçebildiğimiz için sabit uzunluklu graf diyemeyiz. Ancak özel bir kabul ile sabit uzunluklu grafa dönüştürebiliriz.,
 - Kapalı bir alt graf modeli ile yol oluşturabiliriz. Çember örneğinde olduğu gibi istediğimiz noktadan başlayamayız.
- Örneğin; $v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_5$
- $v_3 \rightarrow v_1$ veya $v_1 \rightarrow v_3$ yolunu eşleştiremediğimiz için tam graf olmaz.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada ilk olarak Graf teorisinin temel özellikleri sunulmuştur. Ayrıca Taxicab geometrinin tarihçesi, temel özellikleri ve kullanım alanları tanıtılmıştır. Özellikle Taxicab uzaklığı, Taxicab çemberi, elipsi, hiperbolü ve parabolü tanım ve grafikleri ile incelenmiştir. Daha sonra Taxicab geometride sunulan çember ve parabolü, Graf teorisinin temel özelliklerini kullanarak graf yapıların özellikleri ile yeniden biçimlendirdik. Bu çalışma araştırmacılar için daha anlaşılır olan temel iki geometrik yapı üzerinde yoğunlaşmıştır. Amacımız bu iki temel yapı ile bu iki konunun birleştirilebileceğini göstermek ve yaptığımız diğer çalışmaların temelini oluşturmaktır.

Teşekkür

Denizli İl Millî Eğitim Müdürlüğü ve editör Dr. Hatice TOZAK'a, Denizli ilinde öğrencilerin bilimsel araştırmalara katılımlarına yönelik dergi çıkarmasına vesile oldukları için teşekkür ederiz.

Etik Beyanı

Bu çalışmada, “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler” başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

Kaynakça

- [1] Demir, A. N. (2021). *Randic etki ve Laplacian etki enerjilerinin genelleştirilmesi* [Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi], Yök Tez Merkezi.
- [2] Eroğlu, H. H. (2015). *Grafteorinin cebirsel yapıları* [Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi], Yök Tez Merkezi..
- [3] Gray, A., Abbena, E., & Salamon, S. (1997). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Boca Raton, FL.
- [4] Hacısalihoğlu, H. H. (1990). *2 ve 3 boyutlu uzaylarda analitik geometri*. Gazi Üniversitesi Yayınları.
- [5] Janssen, C. (2007). *Taxicab geometry: Not the shortest ride across town (Exploring conics with a non-Euclidean metric)* [Yüksek Lisans Tezi, Iowa State University].
- [6] Kaya, R. (2002). *Analitik geometri*. Bilim Teknik Yayınevi.
- [7] Krause, E. (1986). *Taxicab geometry: An adventure in non-Euclidean geometry*. New York.
- [8] Sunar, R. (2021). *Lineer graflar üzerine* [Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi], Yök Tez Merkezi.
- [9] Şentürk, A. (2024). *Graf teoride bazı uygulamalar* [Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi], Yök Tez Merkezi.
- [10] Vasudev, C. (2006). *Graph theory with applications*. New Age International.
- [11] West, D. B. (2001). *Introduction to graph theory* (2nd ed.). Prentice Hall.
- [12] Wilson, R. J. (1996). *Introduction to graph theory* (4th ed.).
- [13] Yavuz, D. (2006). *Analitik geometri ve taxicab geometri üzerine* [Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi], Yök Tez Merkezi.