© Beytulhikme Philosophy Circle
Beytulhikme Int J Phil 8 (1) 2018
Research Article: 61-77

Sayının Doğası ve Anlamı Üzerine

On the Nature and Meaning of Number

AYŞE KÖKCÜ
Çankırı Karatekin University

Received: 07.12.2017 | Accepted: 31.05.2018

Abstract: This article is about the understanding of the definition of the number concept and its content in the context of arithmeticisation of analysis and discussions on the basis of mathematics in the nineteenth century. The issue will be addressed historically first and then the proposals for solutions by mathematicians such as Dedekind, Cantor, Peano, as well as by Frege, a logician, will be examined. The discussions on the foundations of arithmetic in the 1870s gained intensity. For mathematics to be a consistent and reliable science free from contradictions, the concept of number, the cornerstone of arithmetic, had to be precisely defined. In this article, the answer to the question of what the concept of number is and what its meaning is will be discussed.

Keywords: The concept of number, foundations of arithmetic, philosophy of mathematics, Dedekind, Frege.

✉ Ayşe Kökcü
Çankırı Karatekin Üniversitesi Edebiyat Fakültesi Felsefe Bölümü
18100, Çankırı, Turkey | ceydayse@hotmail.com

Giriş

19. yüzyılda bilim ve teknolojideki gelişmeler gündelik hayatı etkiler hale gelmişti. İnsanlar bilimin her sorunun üstesinden gelebileceği inancıyla büyük bir hayranlık ve iyimserlik içindelerdi. Bu yüzyılın hâkim bilim anlayışı; pozitivizm ve determinizmdi. Matematiksel kesinliğe dayanan determinizme göre, matematikteki kuşkuların giderilmesi en önce halledilmesi gereken problemdi. Pozitivist yaklaşımın birçok bilim dalına fayda sağladığı söylenebilir. Biyoloji ve antropoloji bu bilimlerin başında gelir. Fakat aynı şey matematik için geçerli değildir. Matematikçiler, doğru bilgiye ulaşmada sezgi ve ispatı kullanıyorlardı. Sezgi, pozitivist anlayışa pek uygun görülmedi ve oyun dışı bırakıldı. İspatın pozitivizmin doğrulanabilirlik ilkesini karşılayabileceği düşünüldü. Ama bunun için de matematikteki tüm ispatlar çok kesin kurallar çerçevesinde düşünülmeliydi. Bu zamana kadar halledilememiş ne kadar muğlâk konu varsa tekrar ele alınıp bir kesinliğe kavuşturulmalıydı. Bu kıstaslara uymayan her ne varsa matematiğin dışında bırakılmalı, matematik metafizik öğelerden temizlenmeliydi. Eğer matematikçiler meşruiyet kazanmak istiyorlarsa, matematiksel nesneleri kesin bir biçimde tanımlayabilmeli ve şüpheye mahâl vermeyecek ispatlar sunmalıydılar.

Analiz hesabının sağlam bir temele oturtulamaması, Euclides dışı geometrilerin ortaya çıkışı, oransal olmayan (irrasyonel) sayıların açıklığa kavuşturulamaması gibi matematiğin henüz kendi içinde çözemediği problemler, matematiğin tutarlılığını iyice tartışmalı bir hale getirdi. 19. yüzyılın sonlarına doğru tartışmalar hararetlenerek daha önce görmezden gelinen sorular, daha fazla gizlenemedi. Matematik dünyasının cevaplamak zorunda olduğu belki de ilk soru, aritmetiğin en temel kavramı olan sayı üzerineydi. Sayı nedir? Anlamı nedir?

Analizin Aritmetikleştirilmesi ve Sayı Kavramı

Diferansiyel ve integral hesabı temel alan analiz, Newton (1643-1727) ve Leibniz (1646-1716) tarafından 17. yüzyılın ikinci çeyreğinde, dönemin fizik problemlerini çözebilmek amacıyla bulunmuştu. Bu problemlerden en önemlisi değişen bir hızın anlık değerinin ne olacağı idi. İkisi de bölünemeyecek kadar küçük parçaların varlığını kabul etmek zorundaydılar. Çünkü hesaplarında kullandıkları mantığa göre, ivmeli bir cismin hızının nasıl bulunacağı sorusu cevaplanırken, sonsuz küçük bir anda (anlık hızı) hızı şudur diyebiliyoruz. Ama burada kullanılan anlık hız kavramı aslında ne anlama geliyor? Kısaca şöyle cevaplayabiliriz. An dediğimiz şey, sıfıra karşılık gelen zamanı ifade ediyorsa, hızı hesaplarken belirli bir mesafeyi sıfıra bölersek sonsuzu elde ede etmiş oluruz.

Problem burada bitmiyor. Kalkülüs ile hesap yapabilmemiz için bölünemeyecek kadar küçük anlardan ve aralıklardan (mesafelerden) sonsuz tane olması gerekiyor. Peki sonsuz tane bölünemeyecek kadar küçük şeylerin toplamı da sonsuz olmaz mı? Ya da tersinden düşünelim. Bu sonsuz küçükler gerçekte var değillerse, sıfırdırlar. Bu durumda da sıfırların toplamı (ne kadar çok olurlarsa olsunlar) sıfır olmaz mı?

Kalkülüsün bizi sürüklediği ikilem, Zeno'nun paradoksunda olduğu gibi süreklilik kavramıdır. Sürekliliği kabul ettiğimizde sonsuzlarla, aksini iddia ettiğimiz takdirde de kesiklilikle, yani süreksizlik problemiyle karşılaşıyoruz (Everdell, 2012: 67).

Diğer taraftan matematikçiler bu problemlere takılıp kalmadılar. Yollarına devam ederek analiz binasını teoremler ve ispatlarla yükseltebildikleri kadar yükselttiler. 19. yüzyıla gelindiğinde ise analizle başlayan eleştiriler, matematiğin tüm alanlarına yayıldı ve bu durum matematiğin temellerinin tekrar gözden geçirilerek sorgulanmasına yol açtı. Dönemin matematikçileri tarafından analizin sağlam temeller üzerine oturtulması amacıyla, geometri dışarıda bırakıldı. Analizin sadece cebir ve aritmetikten türetilen özellikler üzerine inşa edilmesi yolu mantıklı bulundu (Burton, 2017: 606). Başta d'Alembert (1717-1783) olmak üzere birçok matematikçi, analizin mantıksal alt yapısının "limit" usulüyle açıklanabileceğine inandı. Limite olan inanç çok fazlaydı. Fakat, limitin tam olarak ne olduğu tanımlanmamıştı. Sadece sözel tanımlar mevcuttu ve bunlar ikna edici derecede yeterli gözükmüyordu.

Bu noktada karşımıza üretkenliği ile bir efsane olan Augustin Louis Cauchy (1789-1857) çıkıyor. Cauchy kabul edilebilir bir limit teorisi geliştirdi ve yanıt bekleyen birçok soruyu cevaplamış oldu. Şüphesiz analizin mantıksal temellerini sağlamlaştırmaya çalışan ilk matematikçi Cauchy değildi. Cauchy'den önce Lagrange (1736-1813) analizi, Taylor serileri ile açıklamaya çalıştı. Lagrange'a göre her hangi bir fonksiyon,

$$f(x+h) = f(x) + ph + q\frac{h^2}{2!} + r\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

şeklinde sonsuz bir Taylor serisi olarak yazılabiliyordu. Bu ifadede p, q, r... x'in yeni fonksiyonlarıdır ama f'den türetilenlerden farklıdır.

$$\frac{\mathrm{f(x+h)} - \mathrm{f(x)}}{h} = p + v$$

Lagrange yukarıdaki ifadede, h sıfıra giderken v'yi de sıfıra götürür. Ve böylece f'nin x'e göre türevi bulunur. Lagrange böyle bir yaklaşım sayesinde analizin; tüm sonsuz küçük hesaplardan, limit ve türev kavramından kurtarılabilir ve sonlu miktarda cebirsel işleme indirgenebilir olduğu sonucuna ulaştı (Burton, 2017: 607). Böylece Lagrange analizi, kuvvet serileri yönteminin doğruluğuna dayandırmış oldu. Maalesef çok geçmeden Lagrange'ın yönteminin yanlışları ortaya çıkmaya başladı. Fonksiyonların Taylor serisi olarak açılması problem yarattı. Çünkü her fonksiyon Taylor serisi açılımına izin vermiyordu. Ayrıca limit kavramını hallettiğini düşünürken yakınsaklık hakkında geçerli bir tanım ortaya koyamamıştı.

Lagrange'ın çalışmalarını takdir eden Cauchy, analiz için sağlam bir temel oluşturma vazifesini devraldı. Lagrange'ın seri açılımlarının yanlışlığının farkında olan Cauchy, d'Alembert'in limit kavramını kullanmayı tercih etti ve limiti aritmetiksel olarak ele aldı. Geometriyi, vektörleri ve sonsuz küçükler kavramlarını bir tarafa bırakarak, bunların yerine sayı, değişken ve fonksiyon kavramlarına yer verdi. Cauchy'e göre limit: "Bir değişkene verilen ardışık değerler, istenilenden biraz daha farklı olarak sonlandırılmak amacıyla sabit bir değere belirsiz bir şekilde yaklaştığında, son değer diğerlerinin limiti olarak adlandırılır." (Burton, 2017: 608). Cauchy'nin tanımında göze çarpan ilk şey, limitin tamamen aritmetiksel olarak tanımlanmasıdır.

Cauchy ayrıca süreklilik, türevlenebilir olma ve belirli integral gibi analizin temel kavramlarını, formal bir kesinlilikle tanımladı. Cauchy bu minvalde sonsuz küçük sayıları daha önceki matematikçilerden farklı olarak, bağımsız değişkenler şeklinde ele alıyordu. Cauchy'den önceki matematikçiler ise sonsuz küçük sayıları, çok küçük sabit sayılar olarak görüyorlardı.

Cauchy kriterlerinin belirli sayı dizileri üzerinde etkin bir şekilde işe yaradığı kabul edilse de, dizinin limitinin varlığı konusu muğlâklığını koruyordu. Bunu açıklığa kavuşturmanın yolu, kullanılan sayı tipinin ne olduğunun belirtilmesiydi. Cauchy gerçek sayıların (reel sayılar) ne olduğunu sezgisel olarak bildiğini varsayıyordu. Bu varsayımla hareket ederek oransal olmayan sayıların belirli oransal sayı (rasyonel) dizilerinin limiti olarak düşünülebileceğini iddia etti (Katz, 1993: 658). Yani Cauchy'e göre oransal olmayan sayılar a priori olarak vardı ve bunun kanıtlanmasına ihtiyaç yoktu.

19. Yüzyılda Analizi Aritmetikleştirme Çabaları

19. yüzyılın ortalarında birçok matematikçi oransal olmayan sayıların a priori olarak ele alınması yaklaşımını eleştirdi. Oransal olmayan sayıların tam olarak ne olduğu tartışılmaya başlandı. Analizin aritmetikleştirilmesindeki en büyük problem, açık bir "gerçek sayılar" tanımının yapılamamasıydı. Dedekind'e (1831-1916) göre çözüm, teoremlerin aritmetik tarzda kurulmasıdır. Teoremleri aritmetik tarzda kurabilmek için aritmetiğin tutarlılığının sağlam delillere dayandırılarak ispatlanması gerekir. Böylece aritmetik usullerdeki gerçek kökeni keşfedersek, sürekliliğin de gerçek bir tanımını yapabiliriz (Katz, 1993: 658).

Aslında cevabını aradığımız soru bir doğru üzerinde tam olarak nelerin olduğu, ya da olmadığıdır. Diferansiyel hesap sürekli büyüklüklerle uğraşır, fakat sürekliliğin hiçbir yerde açıklaması verilmez. Dedekind bu noktadan hareketle sürekliliğin tanımını aritmetik bir tarzda güvence altına almak maksadıyla, bu konudaki ilk adımı, oransal sayılar kümesinin özelliklerini düzene sokmaya çalışarak gerçekleştirdi. Dedekind'de göre sayılar üç çeşitti ve bunların bileşimi gerçek sayıları oluşturuyordu. Tam sayılar, a/b şeklinde yazılabilen; oransal sayılar ve oransal olmayan sayılar. Tam sayılarda bir sorun yoktu. Birbiri ardınca yazılan ve herkesçe mâlum olan ...-2, -1, 0, 1, 2, 3,... gibi bir sonsuz sayı dizisiydi. Oransal sayılar da tam sayıların arasına dağılmış kesirlerdi. Fakat oransal olmayan sayılara gelince durum değişiyordu. Onların varlığından bahsetmek o kadar kolay değildi. Çünkü oransal olmayan sayılar; tam sayıların ve oransal sayıların arasında yerini tam tespit edemediğimiz küçük hayaletler gibiydiler.

Dedekind'in analiz dersleri vermeye başladığı 1858 yılında oransal olmayan sayıların varlığının ispatı konusunda bir çözüm bulduğu söylenir (Stewart, 2017: 271). Dedekind bu konudaki fikirlerini ancak 1872 yılında *Stetigkeit und İrrationale Zahlen* (Süreklilik ve İrrasyonel Sayılar) adlı 21 sayfalık makalesinde yayınlayabildi (Dedekind, 1901). Bu makaleye kadar kimse oransal olmayan sayıların (a priori) kendiliğinden doğru kabul edilen özelliklerinin, kanıtlanmasını gerekli görmemişti (Stewart, 2017: 272). İki köklü sayının çarpımının yine köklü bir sayı olduğunun gösterilmesi, yani ($\sqrt{2}$. $\sqrt{5}$= $\sqrt{10}$) gibi.

Dedekind bu eserinde gerçek sayılardaki mantıksal boşlukları giderebilmek için sonradan 'Dedekind kesimi' denilen bir yöntem önerdi. Pisagor'dan bu yana bilinen oransal olmayan sayılar için, 1872 yılına kadar kayda değer matematiksel bir açıklama getirilememişti. Oransal olmayan sayılar ondalık yakınsamalar olarak varlardı. Mesela en çok bilinen oransal olmayan sayı olan Π sayısının, ancak 707 basamağına yakınsanarak kesin kabul ediliyordu. Dedekind 2500 yıllık bir geleneği bozdu. Alışılmışın dışına çıkıp oransal olmayan sayıları Dedekind kesimiyle tanımlayarak matematikteki ilk 'modernist' oldu. Dedekind'e göre gerçek sayıları elde etmek için oransal sayı sistemi kullanılabilirdi. Böylece oransal olmayan sayıların sağlaması gereken özellikleri, oransal sayılar kullanılarak göstermenin bir yolu bulunmuş olurdu. Akabinde işlem tersinden düşünülerek oransal sayıların sağladığı özellikler, oransal olmayan sayıların bir tanımı olarak yorumlanırdı (Stewart, 2017: 272).

Dedekind kesimi kısaca şöyle açıklanabilir. Öncelikle eğer a>b ve b>c ise a>c olur. İkinci olarak eğer a≠c ise a ile c arasında sonsuz oransal sayı bulunur. Üçüncü olarak herhangi bir a sayısı gerçek sayı kümesini A_1 ve A_2 şeklinde iki kısma ayırır. A_1'de a'dan küçük sayılar, A_2'de a'dan büyük sayılar bulunur. a sayısı bu iki kısımdan birine bağlanır. A_1'deki sayıların hepsi A_2'deki sayılardan daha küçük olur.

Örneğin $\sqrt{5}$ sayısı oransal olmayan bir sayıdır ve tam olarak bir kesir şeklinde yazılamasa da, oransal sayılara istenildiği kadar yaklaşabilir. Bu sayının konumunu belirleyebilmek için Dedekind kesimini uygulayalım. $\sqrt{5}$ sayısı oransal sayılar kümesini, $\sqrt{5}$'den küçük ve büyük olmak üzere iki parçaya ayırır. Fakat bunu yaparken $\sqrt{5}$'i de kullanmış olduk. Yani varlığını henüz göstermediğimiz bir sayıyı. Bu noktada $\sqrt{5}$'i kullanma problemini nasıl çözebiliriz? Dedekind'in yaklaşımıyla düşünelim. $\sqrt{5}$'den büyük sayılar kesinlikle pozitiftir, çünkü kareleri 5'den büyüktür. Diğer tüm oransal sayılar da $\sqrt{5}$'den küçüktür. $\sqrt{5}$'i kullanmadan açık bir şekilde iki oransal sayı kümesini tanımlamış olduk. Böylece $\sqrt{5}$'in konumunu onu kullanmadan tespit edebildik.

Oransal sayıları doğru üzerindeki noktalara benzeten Dedekind, Antik Yunanlılardan farklı bir şeyi fark etti.[1] Dedekind'in dikkatini çeken şey; birbiriyle çakışmayan noktalardan oluşan L doğrusu üzerinde bulunan noktalar kümesinin, oransal sayılar kümesinden çok daha fazla noktaya sahip olmasıydı (Katz, 1993: 659). Fakat bir problem daha vardı. Aritmetikteki sayı kavramını tanımlamak için geometrik bir nesne kullanmak doğru olmazdı. Bu sorunu şimdilik bir tarafa bırakalım.

Dedekind 1888 yılında *Was Sind und Was Sollen die Zahlen?* (Sayı Nedir, Anlamı Nedir?) adlı bir çalışma yayınladı Burada da gerçek sayı sisteminin içerdiği mantıksal boşluklardan bahsetti (Dedekind, 1901: 14-18). Dedekind'e göre aritmetik, mantığın bir parçası olarak ele alınmalı ve sayı kavramı açıklanırken zamanın ve uzayın kavramlarından ve sezgilerinden bağımsız düşünülmelidir. Yani sayılar, insan zihninin özgür yaratımlarıdır; şeylerin farkını daha kolay ve daha keskin bir şekilde anlamak için bir araç olarak hizmet ederler (Joyce, 2005: 31).

En nihayetinde Dedekind, oransal sayılar varsa, gerçek sayılarında olması gerektiği sonucuna ulaştı. Dedekind dikkatleri gerçek sayılardan oransal sayılara çekmişti. Fakat şimdi de başka bir sorun vardı. Oransal sayıların var olduğunu nereden biliyoruz? Buna çözüm olarak, oransal sayıları tamsayıların var olduğunu kabul ederek tanımlayabiliriz. Buna karşılık yeni bir problem ortaya çıkıyor, tam sayıların var olduğunu nereden biliyoruz? Tam sayılar, doğal sayıların negatif işaretli kümesini de kapsadığı için düğüm, doğal sayıların varlığının ispatıyla çözülebilir görünmektedir.

Dedekind'in sayılar üzerine en çok fikir alış verişi yaptığı arkadaşı,

1 Antik Yunan'da sayı kavramı Pisagorcular tarafından ele alındı ve fiziki evren tam sayılarla ifade edildi. Böylece dünya, matematik dil kullanılarak tasvir edilmiş oldu. Ardından Pisagorcuların süreksiz sayılar üzerine kurulu evrenine Zenon'un paradokslarıyla itirazı neticesinde çıkan bunalım, süreksiz sayı anlayışının terk edilip, sürekliliği sağladığı düşünülen geometrik niceliğe geçişle atlatılmaya çalışıldı.

ünlü sonsuz kümeler (infinite sets) ve sonlu ötesi sayılar transfinite numbers) teorisinin sahibi Georg Ferdinand Cantor (1845-1918) idi. Cantor, Dedekind'in makalesinin yayınlandığı tarihte, yani 1872'de bir makale yayınladı.[2] Bu makalede oransal olmayan sayıların kesin formülasyonunu günümüzde Cauchy dizileri olarak anılan kavram vasıtasıyla geliştirdiğini iddia etti. 1870'li yıllarda Dedekind, Weierstrass (1815-1897) ve Cantor'un oransal olmayan sayılarla ilgili cebir ve mantık kaidelerini kullanarak birbirlerinden bağımsız teoriler geliştirdiklerini görüyoruz. Hepsinin gayesi aritmetiğin temellerini sağlam bir zemine oturtmaktı.

Önceleri sayılar teorisi ile ilgilense de Cantor'un çalışmaları Dedekind ile tanıştıktan sonra yön değiştirdi. Dedekind, sonsuz küme tanımını daha önce bahsettiğimiz "Süreklilik ve İrrasyonel Sayılar" adlı makalesinde 1872'de ilk kez kullanmıştı (Boyer, 2015: 610). Sonraki çalışmalarında bu tanımı geliştirdi. Dedekind'in mantıksal açıklamalarından etkilenen Cantor yazdığı makalelerinde, sonsuzluğu ve sonsuz kümeleri matematiksel bir ciddiyetle inceledi ve sonsuz büyüklüklerin kendi aralarında bir aritmetiği olduğunu sonucuna vardı (Stewart, 2017: 281).

Matematiksel nesnelerde, özellikle de sayılarda sonsuzluk kaçınılmaz bir kavramdır. Örneğin en büyük tam sayı nedir, sorusuna cevap olarak bildiğimiz en büyük sayıyı bile söylesek, onun bir fazlası bizim sayımızdan büyük olur. Öyleyse tamsayılar sonsuz çokluklardır. Ya da mantıksal denkliği olan başka bir ifadeyle, en büyük tamsayı yoktur. Böylece sonsuzluk kavramı aslında tamamlanmamış bir süreci ifade eder.

Almanca 'menge' kelimesine karşılık gelen küme kavramının Cantor'un 1885 yılında *Acta Mathematica* adlı dergide yayınladığı makalesinde tanımı şöyleydi: "Sezgi ya da düşüncemizin belli ve fark edilebilir nesnelerinin bütün olarak M'de toplanmasıdır. Bu nesnelere M'nin elemanları adı verilir." (Cantor, 1885: 105).

Cantor'un kümelerle ilgili kafasına takılan en önemli soru; tüm sonsuz kümelerin eleman sayılarının eşit olup olmadığıydı. Sonsuzluk kavramıyla ilk ilgilenenler arasında, Galileo vardır. Galileo, sonsuz bir kümenin parçasının, sonsuz bir küme kadar çok elemana sahip olabileceğini, 1632

[2] Makale, "Ueber die Ausdehnung eines Satzes der lehre den trigonometrischen Reihen" adıyla trigonometrik seriler kuramında bir teoremin uzantısı hakkında yazılmıştır (Cantor, 1872).

yılında yayınlanan eseri *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*'da ifade etmişti. Galileo'nin örneğinde doğal sayılar ve doğal sayıların karelerinden oluşan iki küme vardır. Bu iki kümenin elemanları hesaplanır, sayı kadar sayının karesi bulunur. Hangi kümenin daha geniş olduğu tartışılır. Fakat Galileo bir sonuca ulaşamadığı için bu konuda çalışmaktan vazgeçmiştir (Burton, 2017: 679). Cantor, Galileo'dan farklı bir yaklaşımla "daha çok" ifadesini, iki küme arasındaki birebir eşleme gerektirir, şeklinde yorumladı.

Cantor'un teorisi birebir eşlenebilirlik kavramıyla çalışıyordu. Yani bir kümeye ait elemanların diğer bir kümeye ait elemanlarla tek tek eşleştirilmesi sonucu iki kümede de açıkta eleman kalmaması demekti. Sonlu kümelerde bunu uygulamak kolaydı. Fakat sonsuz elemana sahip kümelerde de uygulanabilir miydi? Bunu anlamak için çift sayılardan oluşan kümeyi, doğal sayılar kümesiyle bire bir eşlersek ne olur görelim:

Çift Sayılar Kümesi (A kümesi dersek)	2	4	6	8	10...
Doğal Sayılar Kümesi (B kümesi dersek)	0	1	2	3	4...

Cantor'a göre çift sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesinin eleman sayıları aynı görünmektedir. Buradan hareketle oransal sayılar kümesinin de doğal sayılar kümesi ile aynı eleman sayısına sahip olduğu sonucuna varılabilir. Yani birbirlerine denktirler (A ~ B). Bu aşamada Cantor, arkadaşı Dedekind'in 1872 tarihli makalesinde açtığı yoldan devam eder. Cantor 1874 yılında yayınladığı *On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers* adlı makalesinde; keyfi bir L doğrusu üzerindeki ayrı ayrı noktalardan oluşan kümenin oransal sayılar kümesinden sonsuz olarak daha zengin olduğunu söyler (Burton, 2017: 684). Bu aslında sayılabilir kümeler arasında kurulan birebir ve örten özelliğinin sonucudur.

Altı çizilmesi gereken husus; yukarıda anlatılan eşlemenin sonsuz kümelerin aynı kuvvete sahip olabildikleri halde, birbirlerine denk olmadıklarıdır. Cantor bu konu ile ilgili iki ispat vermiştir. Birincisi 1874 yılında, diğeri ise 1891 yılındadır. 1891 yılında bu konuda verdiği ispat, Cantor'un köşegen kanıtlaması olarak bilinen yöntemdir.[3] Burada Cantor,

[3] Teorem: Gerçek sayılar kümesi sayılamaz.
İspat: Varsayalım ki gerçek sayılar kümesi sayılabilir olsun. 0 ve 1 arasında sayılabilen gerçek sayılar kümesi $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ olsun. Her a_i'nin sonsuz bir ondalık açılımı vardır. a_i'nin ondalık açılımları $0, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$, olmak üzere $0 \leq a_{ij} \leq 1$ olsun.

gerçek sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesinin birebir eşlenemeyeceğini gösterir. Cantor, sonsuz aritmetiğini, daha geniş bir program olan Mengenlehre'nin (Kümelerin Teorisinin) bir parçası olarak sunar. Cantor'un ulaştığı nokta birçok matematikçi tarafından şiddetli bir şekilde eleştirilse de, diğer taraftan Hilbert gibi büyük matematikçilerin takdirini kazanır. Hilbert (1862-1943) Cantor'u takdirini "*Cantor'un yarattığı cennetten bizi kimse atamaz*" sözüyle ifade eder (Stewart, 2017: 280).

Peano ve Aritmetiğin Temelleri

İtalyan matematikçi Guiseppe Peano (1858-1932) aritmetik ve sayılar konusunda öncüllerinden farklı düşünür. Peano tamsayıların var olup olmadığı ile ilgilenmez. Bunun yerine Peano, aritmetiği aksiyomatik bir yapıya kavuşturmayı tercih etti. Peano aritmetiği, üç temel terime ("sayı", "sıfır", "...izleyen") ve aralarındaki kuralları belirleyen beş postulata dayanan aksiyomatik bir yapı şeklinde kurdu. Peano'nun postulatları şöyledir:

1. Sıfır bir sayıdır.
2. Her n sayısını takip eden başka bir n+1 sayısı vardır.
3. Ardılı eşit olan iki sayı birbirine eşittir.
4. Sıfır hiçbir sayının ardılı değildir.
5. Eğer bir küme sıfır sayısını ve bu kümedeki her sayının ardılını kapsıyorsa, bu küme doğal sayılar kümesini kapsar.

Peano böylece doğal sayılar kümesini kurmuş oldu. Fakat bu postulatları gerekçelendirme çabasına girmedi. Bunun yanı sıra Peano'yla beraber aritmetik artık biçimsel sembolizmin yalın koşullarıyla ifade edilir bir nitelik kazandı. Peano'ya göre gerçek matematik sezgilere dayanan bir

---

$$
\begin{array}{l}
a_1 = 0,\ a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots, \\
a_2 = 0,\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots, \\
a_3 = 0,\ a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots, \\
. \\
. \\
. \\
a_i = 0,\ a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots a_{in}\ldots, \\
. \\
. \\
.
\end{array}
$$

Bu liste içerisinde olmayan, $0< b < 1$ olacak şekilde bir b gerçek sayısı oluşturmayı amaçlayalım. Verilen bir i değeri için eğer köşegen sayısı olan $a_{ii} = 1$ ise $b_i= 2$ yazalım. Eğer $a_{ii} \neq 1$ ise $b_i = 1$ yazalım. $b_i \neq a_{ii}$ olduğundan a_i de listelenen hiçbir sayıya eşit olmayan yeni bir b sayısı tanımlanır (Burton, 2017, 688).

çalışma olamazdı, bunun aksine biçimsel bir yapıda, kendi içinde yeterli ve mantıksal bir yapıda olmalıydı (Yıldırım, 2016: 81). Peki aksiyomatik bir yapıya sahip olan bu sistem sayıların varlığını veya tam olarak ne olduklarını açıklayabiliyor muydu? Maalesef soruya olumlu bir cevap verilemiyordu.

Mantıkçı pozitivistlerin aksine sezgisel bir yaklaşımla sayıların varlığını anlaşılır kılabilmek için gördüğümüz, dokunduğumuz, kısacası duygularımızla kavrayabildiğimiz nesnelerle ilişkilendirmeye çalışabiliriz. Beş kaşık, beş armut, beş çekmece dediğimiz zaman akla yatan şeylerden bahsetmiş oluruz. Ancak beş sayısı bir nesne değildir. Beş sayısının kavramsal bir kurgu olduğunu iddia edebiliriz. Gündelik hayatımızda beş sayısı ile karşılaşmayız. Beş sayısıyla beş sembolü aynı değildir. Bir kâğıda ekmek yazmakla, üstünde dumanı tüten ekmek aynı şey değildir. Lâkin Peano sayıların ne olduğunu bilmese de onların nasıl davrandığını biliyordu.

Frege'nin Aritmetiğe Yaklaşımı

Bu aşamada karşımıza matematik felsefesinin en önemli isimlerinden birisi çıkar; mantıkçı ve matematikçi Gottlob Frege (1848-1925). Matematik felsefesinde mantıkçılık ekolünün başını çeken Frege de aritmetiği, çağdaşı Peano gibi temellendirme çabasında bulundu. Frege 1879 yılında yayınladığı *Begriffschrift* (Kavram Yazısı) adlı kitapta kendinden önce hiç kimsenin kullanmadığı bir mantık dili geliştirdi (Frege, 1969). Sembollerden oluşan bu mantık dilinin icat edeni Frege olduğu için O'na çok basit gelse de, başka kimse tarafından kullanılmadı. Frege'nin Peano gibi aritmetiği mantıksal çıkarsamalar yoluyla temellendirmeye çalıştığını söylemek mümkündür. Fakat Frege'nin çalışması her açıdan oldukça farklıydı. En büyük dezavantajı kullandığı oldukça anlaşılmaz ve kapalı mantık diliydi. Bu sayede Frege'nin çalışmalarının tanınması ve anlaşılması uzun zaman aldı.

Frege'nin Peano'dan ayrıldığı noktalardan biri, sayı kavramının varlık problemini ön planda tutmasıydı. Frege'ye göre sayı; sadece bir yığın, bir şey dizisi ya da bir yığına ait bir özellik değildi. Yani sayma işleminin sonucunda ulaştığımız sayı hakkında bildirimde bulunduğumuzda, aslında bir kavram hakkında bildirimde bulunmuş oluyorduk (Frege, 1979: 253). Frege'ye göre sayı, kavramsal olarak ele alınmalıydı. Böylece sayı kavramını görüsellik zemininden ayırabilirdik. Sayı kavram olarak ele alınıp, aritmetiğin yasaları sadece mantık yasaları kullanılarak türetilebilirdi. Bu fikir Kant'ın, aritmetiğin sentetik a priori olduğu kanısına tersti. Kant, matematiğin nesneleri deneye dayalı olmadığı için, aritmetiği sentetik a priori olarak değerlendiriyordu. Frege'ye göre ise aritmetik yasaları analitikti. Sayı kavramı a priori ve mantıksaldır. Frege sayal sayının[4] bir tanımını verebilirse aritmetiğin sentetik mi analitik mi olduğunun cevabını bulacağının farkındaydı. Aritmetik ancak analitik olduğunda mantığa indirgenebilirdi.

Frege'ye göre nesne yargıdan bağımsız değildir. Tümcede nesne için kullanılan adın veya özel adın tümce üzerinden çözümlemesi yapılmalıdır. Bunun için de dilin, mantıksal yapısının çözümlemesinden hareket etmek gerekir. Frege'ye göre bir kavram ancak yargının olanaklı içeriğinin çözümlenmesiyle ortaya çıkarılabilir, dolayısıyla kavramların bağımsız olarak ele alınmasına karşıdır. O'na göre düşünceler ve sayılar, uzay ve zamanda fiziksel bir nitelikleri olmasalar da öznel değil, nesneldirler. Yani düşünceler, hem nesnenin kendisi değildir, hem de öznel değildir, özneler arası bir şeydir. Nesnel olan bu düşünceleri sadece kavrayabiliriz. Aslında yakalayabiliriz. Konunun daha iyi anlaşılması için Frege, ekvator çizgisini nasıl kavradığımız örneğini verir. Ekvator çizgisini insanlar, düşünce yoluyla bulmuş ve kavramış olsa bile, bunu düşünce yoluyla ortaya çıkarmış ya da bir ruhsal süreç sonucu üretmiş değillerdir (Frege, 2014, s. 119).

Aritmetiğin Temelleri'nde Frege'nin dil çözümlemelerinden fazlasını yapmaya çalıştığını görüyoruz. Dilin yanında yargı çözümlemelerine de girişmiştir. Bu bağlamda 'sayı' gibi bir nesnenin mekânı yargıdan başkası olamazdı. Mantıksal nesnelerin mekânlarının belirlenmesiyle, onların gerçek doğalarının ortaya konulması mümkün olabilecekti. Frege'ye göre atılması gereken ilk adım, bir dizideki sıra bağıntısını mantıksal sonuç çıkarma bağıntısına indirgemekti. Böylece sayı kavramına ulaşılır. Duyulara ait olan her ne varsa dışarıda bırakır ve temelde sadece saf mantıkla kurulu bir aritmetik inşa edilebilir. Bu minvalde Frege aritmetiğin temel yasalarının mantığın yasalarından başkası olmadığını, dolayısıyla aritmetiğin mantığa indirgenebileceğini gösterir.

4 Sayal sayı (Anzahl) kardinal sayı anlamındadır. Yani bir kümenin elemanlarının toplam sayısını veren tamsayıdır.

Frege tam da pozitivist bakış açısına uygun davranıyordu. Bir pozitivist olarak sezgisellik, sayının varlığının ispatı için kullanılacak geçerli bir yöntem olamazdı. Frege, matematiğin psikolojiden gelen her türlü desteği reddedip, bunun yerine mantıkla olan yakın münasebetini de kabul etmek gerektiğinin altını çizer (Frege, 2014: 84). Frege'nin burada psikoloji kavramıyla kastettiği, matematikçinin tanım ya da matematiksel nesnelere olan yaklaşımında sezgilerine yer vermesidir. Bunu şöyle ifade eder:

> Eğer bir tanım kanıtlamalarda kullanılmaya elverişli görünüyorsa, hiçbir çelişkiyle karşılaşılmıyorsa görünüşte birbirinden uzak gibi duran konular arasındaki bağlantılar ortaya çıkarılmışsa ve böylece sıralandırma ve düzende bir ilerleme ortaya çıkıyorsa, tanımın yeterince kabul gördüğü düşünülmekte ve onun mantıksal gerekçelendirilmesine ilişkin çok az soru sorulmaktadır (Frege, 2014: 85).

Bütün bu sebepler dolayı Frege, sayal sayı kavramını tanımlarken her türlü sezgi ve objektif olmayan kavramı üç sınırlamayla dışarıda bırakacağını ifade eder. Birincisi; psikolojik olanı mantıksal olandan ve öznel olanı nesnel olandan kesin bir şekilde ayırır. Böylece sayıları tamamen insan zihninin ürünü olarak gören psikolojik yaklaşımı reddeder. İkincisi; sözcüklerin gönderimini tek başına değil, içinde bulunduğu cümle bağlamında ele alır. Üçüncüsü; kavramlarla nesneler arasındaki ayrımı gözden kaçırmaz (Frege, 2014: 85). Böylece sayı kavramını insan zihnindeki fikirlere indirgeyerek öznel bir hale sokan psikolojizmden kurtarmış olur.

Frege sayal sayının soyut ontolojik mekânını araştırırken sayal sayıyı öncelikle bir nesne olarak ele alır. İkinci ilkesine uygun olarak sayal sayıyı kendi bağlamından koparmaz, içinde bulunduğu tümce ile beraber değerlendirir. Böylece Frege'nin sayal sayı tanımı "F kavramına ait olan sayal sayı, F kavramıyla eş sayılıdır, kavramının kaplamıdır" şeklindedir (Frege, 2014: 162). Ya da daha anlaşılır bir ifade ile 'F kavramına ait olan bir sayı, F kavramına eşittir' kavramının bir uzantısıdır. Russell, Frege'nin tanımını daha sonra şöyle ifade eder: "Bir sınıfın sayısı (kümenin), ona benzeyen tüm sınıfların oluşturduğu sınıftır" (Everdell, 2012: 81). Frege sayının tanımında kullandığı 'eş sayılı olma' kavramını, daha önce Cantor'un da yaptığı gibi birebir eşleme yoluyla elde eder. Bu konunun daha iyi anlaşılmasını isteyen Frege, birebir ve örten iki denk kümenin anlaşılabilmesi için garson örneğini verir. Bir garson masadaki tabakların hep sağına bıçakları yerleştirir. Böylece tabaklar ve bıçaklar birebir eşleme içinde ve aynı uzamsal ilişkide olurlar (Frege, 2014: 164).

Kümelerin denkliğinin izahından sonra doğal sayılar serisindeki her komşu iki öğenin birbirleriyle olan ilişkilerini açıklar. Öyle bir F kavramı ve onun altına düşen bir x nesnesi olsun ki, F kavramına ait olan sayal sayı n ve F'nin altına düşen ama x'le aynı olmayan kavramının sayal sayısı m olsun. Bu cümlenin gönderimi; n, doğal sayılar serisinde doğrudan m'yi izlemektedir, cümlesinin gönderimiyle aynıdır (Frege, 2014: 171).

Sayının tanımının ardından en temel iki sayıyı, yani 0 ve 1'i tanımlar. Bir sayısına ulaşmak için sıfırın önce tanımlanması gerekiyordu. Frege herhangi bir a nesnesi için, a 'kendisiyle aynı olmayan' kavramının altına düşüyor. Yani a, kendisiyle aynı değildir. 0 sayısı için aynı yaklaşım uygulanırsa; "0'la aynı olan" kavramının altına 0 sayısı düşmektedir. "0'la aynı, ama 0'la aynı değil" kavramının altına ise hiçbir nesne düşmemektedir. Yani 0 bu kavrama ait olan sayal sayı oluyor (Frege, 2014: 172). Doğal sayılarda 0 dışındaki her bir sayal sayı başka bir sayal sayıyı izlediği için tüm sayılar kolaylıkla tanımlanır. Bu tanım hatırlanacağı gibi Peano'nun ardıllığını çağrıştırır.

Frege'ye göre 2 sayısı birbirinden farklı a, b elemanları olan {a,b} kümesiyle birebir eşleştirilebilen kümelere ait bir özelliktir. Örneğin,

{bir at, bir başka at}

{bir vazo, bir başka vazo}

{bir kelebek, bir başka kelebek}

kümelerinin hepsi {a,b} kümesiyle birebir eşleşir ve aynı sayıyı belirler. Frege'nin tespitiyle, her özellikle bağlantılı tanımlanmış bir küme vardır. Örneğin 'çift sayılar' kümesi, bütün çift sayıların kümesiyle bağlantılıdır. Yani bir sayı belli bir kümeyle birebir eşleştirilebilen tüm kümelerin kümesidir. Böylece sayının varlık problemiyle ilgilenip bunun çözümü için akıl ve aklın ürettiği mantık araçlarının dışına çıkılmamıştır. Frege'nin gayreti; pozitivistlerin dünyaya mantık ve matematiğin nesnelliğini göstermek için yaptıkları son hamledir diyebiliriz.

Frege'nin aritmetiği ve dolayısıyla sayı kavramını mantığa indirgeme düşüncesinin temelinde de Cantor gibi kümeler bulunuyordu. Artık problem kümelerin özelliklerine indirgenmişti. Cantor'un kümeleri ölçme çabası sunucu sayal sayı (kardinal sayı) kavramı ortaya çıktı. Cantor'a göre sayal sayı şöyle tanımlanır. Herhangi bir M kümesinin sayal sayısı M'ye denk tüm kümelerin ortak genel kavramı olarak bulunur. Cantor bu işlemi yaparken, hem elemanların doğasından, hem de verildikleri sıradan soyutlayarak sayal sayıyı elde eder (Burton, 2017: 680). Frege için bu tanım yeterli gelmemiştir. Frege *Aritmetiğin Temelleri* eserinde Georg Cantor'u eleştirir. "Benim sayal sayım için Cantor "güç" terimini kullanıyor, oysa onun sayal sayı kavramı, bir sıra olarak düzenlemeye işaret etmektedir." (Frege, 2014: 178). Frege'ye göre sonlu sayal sayılar bu düzenlemeden bağımsızdır. Ama buna karşılık sonsuz sayal sayılarda durum farklıdır. Bu yorumun ardından Frege, kendi sayal sayı kavramının sonsuz sayıları da içerdiği için, Cantor'un gönderimini genişletme ihtiyacı duymadığını belirtir. Frege'nin Cantor'u asıl eleştirdiği nokta Cantor'un 'içsel görü'ye başvurmuş olmasıdır. Görüden alınma bir aksiyoma başvurularak yapılan Cantor'un sayal sayıya ilişkin tanımlarının kesinliğinde eksiklik olabileceğini söyler.

Cantor ise 1884'te Frege'nin kitabını okuduğunda 'işe yaramaz' olarak değerlendirmiş ve Frege'nin üzüntü duymasına sebep olmuştur. Diğer taraftan ilk okuduğunda çok etkilenen Bernard Russell'a göre Frege, sayı nedir, sorusuna gayet yeterli bir cevap vermiştir.

Sonuç

Analizin aritmetikleştirilmesi sürecinde Dedekind, sayının tanımı için matematiksel yöntemlerin yeterli olduğu kanısıyla hareket ederek bir çözüm önerdi. Bu çözümün modern matematik anlayışına geçiş aşamasında önemli bir anlamı olduğu tartışılmaz. Dedekind'in gerçek sayıların varlığının gösterilmesi konusunda önerdiği çözüm, Dedekind kesimiydi. Bu yaklaşım sayesinde aslında Dedekind, gerçek sayılar arasında boşluk olmaması gerektiğini, dolayısıyla süreklilik denen kavramın bir tanımını işaret ettiğini fark etti. Dedekind, bir anlamda sürekliliğin tanımını yapmış ve hatta 'arasında' kavramını da tanımlamıştı.

Sayı kavramının tanımlanması sorununa Frege'nin getirdiği çözüm Dedekind ve diğer matematikçilerden biraz farklıydı. Frege, *Aritmetiğin Temelleri* eserinde aritmetiği deneye dayalı bir bilim olarak ele alan Mil'i ve sentetik kabul eden Kant'ı eleştirir. Ayrıca sayı kavramını insan zihninin ürünü olarak gören psikolojizmi ve sayıların evrimleştiği kanaatinde olan tarihselciliğe de karşı çıkar. Frege'ye göre aritmetik mantığa dayanır ve aritmetik analitik a prioridir. Dolayısıyla aritmetik analitik olduğu için tamamen mantığa indirgenebilir.

Frege'nin sayı kavramı ve aritmetik üzerine yaptığı tüm bu çözümlemeler Russell vasıtasıyla duyuldu ve ilgi ile karşılandı. Fakat Frege'nin sayı kavramının tanımında kullandığı küme kuramında, birbirlerinden bağımsız olarak Russell ve Zermelo tarafından bir paradoks keşfedildi. Bu paradoks, Frege'nin sayı kavramının sadece mantık vasıtasıyla tanımlanabileceği ve sezgiden arî olduğu düşüncesinin yara alması demekti.

Başta Dedekind ve Frege olmak üzere birçok matematikçi ve mantıkçı aritmetiğin temellendirilmesi ve sayı kavramının tanımlanması problemine çözümler önermişlerdir. Fakat istenilen kesinlik ve açıklıkla bir tanım getirilememiştir.

Kaynaklar

Boyer, C. B. (2015). *Matematiğin Tarihi*. Ankara: Doruk Yayınları.

Burton, D. M. (2017).*Matematik Tarihi*. Ankara: Nobel Yayıncılık.

Cantor, G. (1872). Ueber die Ausdehnung eines Satzes der lehre den trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, 5 (1), 123-132.

Cantor, G. (1885) Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punctmengen in einem *n*-fach ausgedehnten stetigen Raume *Gn*: Zweite Mittheilung. *Acta Mathematica*, 7, 105-124.

Dedekind, R. (1901). *Essays on the Theory of Numbers*. (Trans. W. W. Beman). Chicago: The Open Court.

Everdell, W. R. (2012). *İlk Modernler*. (Çev. H. Kocaoluk). İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

Frege, G. (2014). *Aritmetiğin Temelleri: Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal Matematiksel Bir İnceleme*. (Çev. B. Gözkan). İstanbul: Yapı Kredi Yayınları.

Frege, G. (1979). *Posthumous Writings*. (Trans. P. Longand & R. White). Oxford: Basil Blackwell.

Frege, G. (1969). Begriffsschrift: A Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic for Pure Thought. *From Frege to Gödel*. (Ed. J. van Heijenoort). Massachusetts: Harvard University Press.

Joyce, D. E. (2005) . *Notes on Richard Dedekind's Was sind und was sollen die Zahlen?* Clark University, https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/numbers/dedekind.pdf.

Katz, V. J. (1993). A *History of Mathematics*. New York: Harper Collins.

Stewart, I. (2017). *Matematiğin Kısa Tarihi*. (Çev. S. Sevinç). İstanbul: Alfa Yayınları.

Yıldırım, C. (2016). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Öz: Bu makale, 19. yüzyılda analizin aritmetikleştirilmesi ve matematiğin temellendirilmesi tartışmaları bağlamında sayı kavramının tanımının ve mahiyetinin anlaşılması konusu üzerinedir. Mesele öncelikle tarihsel açıdan ele alınacak ve akabinde hem Dedekind, Cantor, Peano gibi matematikçilerin, hem de Frege gibi bir mantıkçının konu hakkındaki çözüm önerilerine yer verilecektir. 1870'lerde aritmetiğin temelleri üzerine yapılan tartışmalar, yoğunluk kazandı. Matematiğin tutarlı ve çelişkilerden arınmış, güvenilir bir bilim olması için öncelikle aritmetiğin temel taşı olan sayı kavramının tam olarak tanımlanması gerekiyordu. Bu makalede sayı kavramının ne olduğu, anlamının neliği sorusunun cevabı aranacaktır.

Anahtar Kelimeler: Sayı kavramı, aritmetiğin temelleri, matematik felsefesi, Dedekind, Frege.