

Abelyen Sylow 2-Alt Grubu İçeren Süper Çözülebilir Ambivalent Grupların Sınıflandırılması

Didem ÖZTÜRK^{1*}

¹Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 34380, İstanbul

¹<https://orcid.org/0000-0002-4973-8140>

*Sorumlu yazar: didem.ozturk@msgsu.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihiçesi:

Geliş tarihi: 02.08.2025

Kabul tarihi:04.12.2025

Online Yayınlanma:16.03.2026

Anahtar Kelimeler:

Gösteriliş teorisi

Q-grupları

Abelyen sylow 2-alt grubu

Ambivalent gruplar

Süper çözülebilir gruplar

Karakter teorisi

ÖZ

Bu makalede, abelyen bir Sylow 2-alt grubu içeren süper çözülebilir ambivalent grupların sınıflandırılması ele alınmıştır. İlk olarak, Q-gruplarının ve ambivalent gruplarının temel tanım ve teoremleri incelenmiş; bu grupların yapısal özellikleri detaylı bir şekilde ortaya konmuştur. Ardından, süper çözülebilir grupların bilinen özelliklerinden faydalanılarak, ambivalent grupların özel bir alt sınıfı olan süper çözülebilir ambivalent gruplar, abelyen bir Sylow 2-alt grubu içerdiğinde analiz edilmiş ve bu alt grup yardımıyla izomorf oldukları yapılar belirlenerek sınıflandırılması yapılmıştır. Araştırma, klasik grup teorisi yöntemlerinin yanı sıra karakter kuramından da yoğun biçimde yararlanarak teorik bir çerçevede gerçekleştirilmiştir. Elde edilen bulgular, ambivalent grupların daha kapsamlı bir şekilde anlaşılmasına ve sınıflandırılmasına katkı sağlamaktadır. Ayrıca, bu çalışma süper çözülebilir gruplar alanındaki bilgi birikimine yeni bir boyut kazandırmakta ve olası uygulamalar için teorik bir temel sunmaktadır.

Classification of Supersolvable Ambivalent Groups Containing an Abelian Sylow 2- Subgroup

Research Article

Article History:

Received: 02.08.2025

Accepted: 04.12.2025

Published online:16.03.2026

Keywords:

Representation theory

Q-groups

Abelian sylow 2-subgroup

Ambivalent groups

Supersolvable groups

Character theory

ABSTRACT

In this paper, the classification of supersolvable ambivalent groups that contain an abelian Sylow 2-subgroups were considered. First, the basic definitions and theorems of Q-groups and ambivalent groups are reviewed, and the structural properties of these groups are examined in detail. Then, by utilizing the known properties of supersolvable groups, a special subclass of ambivalent groups -namely, supersolvable ambivalent groups- is analyzed under the condition that they contain an abelian Sylow 2-subgroup. Using this subgroup, the group structures to which they are isomorphic are determined, and a classification is established accordingly. The research is carried out within a theoretical framework, making intensive use of character theory in addition to classical group theory methods. The findings contribute to a more comprehensive understanding and classification of ambivalent groups. Moreover, this study adds a new dimension to the body of knowledge in the field of supersolvable groups and provides a theoretical basis for potential applications.

To Cite: Öztürk D. Abelyen Sylow 2-Alt Grubu İçeren Süper Çözülebilir Ambivalent Grupların Sınıflandırılması. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2026; 9(2): 987-993.

1. Giriş

Grupların gösteriliş teorisi, soyut grupların, lineer tasvirlerle ait matrislerin belirlediği grupların içine tanımlanmış homomorfilerinin sınıflandırılması esasına dayanmaktadır. Bir grubun gösterilişleri üzerinde çalışma fikri, grup teorisi ve uygulamaları konusunda yeni araştırma yöntemlerinin doğmasına sebep olmuştur. Karakter teorisi de bu konuda belirleyici rol oynar. Bu bağlamda, Q-gruplarının ve

Ambivalent gruplarının yapılarını incelemek, Adi Gösteriliş Teorisinin önemli araştırma konularındandır. Günümüzde bir abelyen Sylow 2-alt grubu içeren Q-grupları, asal involüsyon içeren Q-grupları tamamen sınıflandırılmıştır. Ayrıca, Süper Çözülebilir Q-gruplarının mertebeleri ve asal bölenleri belirlenmiştir. Diğer yandan, Q-gruplarının temel kavramlarından yararlanılarak, Ambivalent gruplarının bazı özel alt grupları sayesinde, izomorf olduğu yapılar elde edilmiştir. Bu çalışmada Q-gruplarının, Ambivalent gruplarının temel tanım ve teoremleri irdelenmiş; elde edilen sonuçlar yorumlanarak, daha önce araştırılmamış olan Süper Çözülebilir Ambivalent Grupları, bir abelyen Sylow 2-alt grubu içerdiğinde, bu alt grup yardımıyla sınıflandırılmıştır.

2. Materyal ve Metot

Bu çalışmada, Adi Gösteriliş Teorisi'nin temel ilkeleri doğrultusunda Q-gruplarının, Ambivalent grupların ve Süper Çözülebilir grupların yapıları incelenmiştir. Elde edilen bulgular, Süper Çözülebilir Ambivalent gruplara uygulanarak, bu grupların izomorf olduğu yapılar hakkında sonuçlar elde edilmiştir.

3. Bulgular ve Tartışma

Bu çalışmada, konunun bütünlüğü açısından sırasıyla, adi gösteriliş teorisinin temel kavramları, Q-grupları ve Ambivalent gruplarının yapısal özellikleri ayrıntıları ile ele alınmıştır. Öte yandan, araştırma problemine ışık tutan grup teorisinin temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Böylece elde edilen bilgiler sentezlenerek, “Süper Çözülebilir Ambivalent Gruplar” bir abelyen Sylow 2-alt grubu içerdiğinde, bu alt grup yardımıyla sınıflandırılmış, izomorf olduğu cebirsel yapı belirlenmiştir.

Tanım 1: G sonlu bir grup, R komütatif, birimli bir halka ve V , n -boyutlu serbest bir R - modül olsun. V nin tüm tersinir R -endomorfilerinin oluşturduğu grup $GL(V)$ ile gösterilmek üzere, $T: G \rightarrow GL(V)$ şeklinde tanımlanan bir grup homomorfizmine, G nin n -inci dereceden bir R -gösterilişi denir. Öte yandan, R üzerinde tanımlı tüm $n \times n$ tersinir matrislerin meydana getirdiği grup $GL(n, R)$ ile temsil edildiğinde, V nin baz seçiminden bağımsız olarak, $GL(V) \cong GL(n, R)$ dir. Bu durumda, $\varphi: G \rightarrow GL(n, R)$ grup homomorfizmi, G nin R üzerindeki n -inci dereceden bir matris gösterilişi olarak adlandırılır. G nin V üzerindeki bir gösterilişi, bir matris gösterilişine tekabül eder; R karakteristiği sıfır olan bir cisim olduğunda, R üzerindeki gösteriliş teorisi Adi Gösteriliş Teorisi olarak adlandırılır (Dornoff, 1971).

Tanım 2: $R = k$ bir cisim, V sonlu boyutlu bir k -vektör uzayı ve $T: G \rightarrow GL(V)$, G nin bir k -gösterilişi olsun. $\aleph: G \rightarrow k$, $\aleph(x) = \text{iz } T(x)$ şeklinde tanımlanan $\aleph$ fonksiyonuna, T gösterilişine karşılık gelen bir kG -karakteri denir ve $\aleph(1_G) = \text{iz } T(1_G) = \dim_k V$ dir (Dornoff, 1971).

Tanım 3: G , n -inci mertebeden sonlu bir grup olsun. G nin adi kompleks gösterilişli tüm karakterleri rasyonel değerli ise G ye bir Q -grubu denir (Kletzing, 1984).

Teorem 1: Sonlu bir G grubunun bir Q - grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $s, t \in G$ aynı devirli grubu ürettiğinde, bu elemanların birbirine eşlenik olmasıdır. Bir Q -grubunda bir alt devirli grubun üreteçlerinin eşlenik olması zorunluluğuna karşılık, eşlenik elemanların aynı devirli grubu üretmeleri gerekmez (Kletzing, 1984).

Teorem 2: Sonlu bir G grubunun bir Q -grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $s \in G$ için $N(< s >)/C(< s >) \cong Aut(< s >)$ olmasıdır (Kletzing, 1984).

Tanım 4: G , n -inci mertebeden sonlu bir grup olsun. G nin adi kompleks gösterilişli tüm karakterleri reel değerli ise G ye bir bir ambivalent grup denir. Başka bir deyişle, G bir ambivalent grup ise G nin $\mathbb{C}$ üzerinde n -inci dereceden bir gösterilişi, $\varphi: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ grup homomorfizmi ve bu gösterilişe ait bir $\chi, \mathbb{C}G$ -karakteri verildiğinde, her $s \in G$ için $\chi(s) \in \mathbb{R}$ dir. Q -grupları, ambivalent olma özelliğini kapsamaktadır (Armeanu, 1996).

Sonuç 1: S_n simetrik grubu hem bir Q - grubu hem de bir ambivalent gruptur (Armeanu, 1996).

Teorem 3: Sonlu bir G grubunun bir ambivalent grup olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $s \in G$ için $s^t = tst^{-1} = s^{-1}$ olacak şekilde bir $t \in G$ nin bulunmasıdır (Armeanu, 1996).

Tanım 5: G sonlu bir grup, $s \in G$ olsun. Eğer, s ve s^{-1} elemanları, G içinde birbirine eşlenik ise s ye gerçek eleman denir. Bir ambivalent grubunun tüm elemanları gerçektir (Kletzing, 1984).

Tanım 6: G sonlu bir grup, p bir asal sayı, $s \in G$ ve s nin merkezleyicisi $C(s)$ olsun. $P \leq C(s)$ olacak şekilde bir $P \in Syl_p(G)$ mevcutsa s ye bir p -merkezi eleman denir (Kletzing, 1984).

Teorem 4: G sonlu bir grup, p bir asal sayı ve $P \in Syl_p(G)$ alt grubunun merkezleyicisi $C(P)$ olsun. Şu halde, $\{G \text{ nin } p\text{-merkezi elemanları}\} = \cup_{P \in Syl_p(G)} C(P)$ dir. Üstelik, G grubunun merkezi $Z(G)$ ile gösterildiğinde, $s \in G$ nin her p bir asal sayısına karşılık, p -merkezi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $s \in Z(G)$ olmasıdır (Kletzing, 1984).

Tanım 7: Bir G grubu ve G nin bir $\{1_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_s = G$ alt normal serisi verilmiş olsun. Her $i = 0, 1, \dots, s-1$ için G_{i+1} / G_i abelyen ise G ye çözülebilir bir grup denir (Rose, 1978).

Teorem 5: Çözülebilir grupların alt grupları ve bölüm grupları da çözülebilirdir (Rose, 1978).

Tanım 8: Bir G grubu ve G nin bir $\{1_G\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_s = G$ alt normal serisi verilmiş olsun. Her $i = 0, 1, \dots, s-1$ için $G_i \trianglelefteq G$ ve $|G_{i+1} / G_i|$ değerleri asal ise G ye süper çözülebilir bir grup denir. Süper çözülebilir gruplar çözülebilirdir (Rose, 1978).

Tanım 9: G bir grup, $Z_0(G) = \{1_G\}$, $Z_1(G) = Z(G)$ olsun. Her i için $Z_{i+1}(G)$, $Z_i(G) \subseteq Z_{i+1}(G)$ ve $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$ bağıntılarını sağlayan G nin tek türlü belirli normal alt grubunu gösterebilirsin.

Bu taktirde, $\{1_G\} \subseteq Z_1(G) \subseteq Z_2(G) \subseteq \dots$ alt normal serisine, G grubunun artan merkezi serisi denir. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n(G) = G$ ise G grubuna bir nilpotent grup denir. Bu eşitliği gerçekleyen $n \in \mathbb{N}$ değerlerinin en küçüğü, G grubunun nilpotentlik sınıfı adını alır (Rose, 1978).

Teorem 6: G bir grup ve G' , G nin komütatör grubu olmak üzere $G' \trianglelefteq G$ dir. Üstelik, $N \trianglelefteq G$ için G/N grubunun bir abelyen grup olması için gerek ve yeter koşul $G' \leq N$ olmasıdır (Alperin & Bell, 1995).

Teorem 7: G bir grup, p bir asal sayı ve $S \in Syl_p(G)$ olsun. $G = SN$, $S \cap N = \{1_G\}$ ve $|S| = [G : N]$ olacak biçimde bir $N \trianglelefteq G$ varsa, N ye G içinde bir p -tamamlayıcısı denir (Rose, 1978).

Teorem 8: G bir grup, p bir asal sayı ve $S \in Syl_p(G)$ olsun. $S \subseteq Z(N_G(S))$ ise S nin G içinde bir p -tamamlayıcısı vardır (Rose, 1978).

Teorem 9: G bir ambivalent grup olsun.

- $N \trianglelefteq G$ ise G/N bir ambivalent gruptur.
- G nin birimden farklı her 2-merkezi elemanı bir involüsyondur.
- $Z(G)$ bir elementer abelyen 2-grubudur.
- G abelyen ise G bir elementer abelyen 2-grubudur.
- G' , G nin komütatör grubu olmak üzere, G/G' bir elementer abelyen 2-grubudur. G nin tek mertebeli elemanları, G' içindedir.
- G grubu 2-elemanları tarafından üretilir (Armeanu, 1996).

Teorem 10: G bir ambivalent grup ve $S \in Syl_2(G)$ ise $C_G(S) = Z(S)$ dir (Armeanu, 1996).

Teorem 11: G çözülebilir bir ambivalent grup ve $S \in Syl_2(G)$ ise $N_G(S) = S$ dir (Armeanu, 1996).

Teorem 12: G çözülebilir bir ambivalent grup, $S \in Syl_2(G)$ ve $S \leq H \leq G$ ise $N_G(H) = H$ dir (Armeanu, 1996).

Teorem 13: G çözülebilir bir ambivalent grup ve s, G nin 2-merkezi elemanı ise $N_G(C(S)) = C(S)$ dir (Armeanu, 1996).

Teorem 14: G süper çözülebilir bir grup olsun.

- a. G' nilpotenttir.
- b. p, G nin mertebesini bölen en büyük asal sayı olsun.

Bu durumda, G nin bir p -Sylow alt grubu G grubu içinde normaldir (Huppert & Blackburn, 1982).

4. Sonuçlar

O halde, süper çözülebilir ambivalent gruplar için aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 15: G süper çözülebilir bir ambivalent grup ve G_2, G nin bir abelyen Sylow 2-alt grubu olsun.

- a. G, G' üzerine G_2 tamamlayıcısı ile yayılır.
- b. G_2 grubu ambivalenttir.
- c. G_2 grubu bir elementer abelyen 2-grubudur.
- d. G' grubu nilpotenttir.

İspat: a. Teorem 9'dan $G = G'G_2$ ve ikinci izomorfizm teoreminden, $G/G' \cong G_2 / (G' \cap G_2)$ elde edilir. G süper çözülebilir olduğundan, çözülebilir bir gruptur. Dolayısıyla, G' ve G/G' grupları da çözülebilirdir. Bu durumda, Teorem 13'ten $N(G_2) = G_2$ ve $G_2 \leq Z(N(G_2))$ sonucuna varılır. O halde, Teorem 8'den $G = G_2N$ ve $G_2 \cap N = \{1_G\}$ olacak şekilde bir $N \trianglelefteq G$ mevcuttur. İkinci izomorfizm teoremi kullanılarak, $G/N \cong G_2$ elde edilir. G_2 abelyen olduğundan G/N bölüm grubu da abelyendir ve Teorem 6'dan $G' \leq N$ dir.

Öte yandan, G bir ambivalent grup olduğundan, G grubunun biricik en büyük normal $2'$ -alt grubu olarak tanımlanan $O_{2'}(G)$ grubu, G' tarafından kapsanmaktadır (Armeanu, I., 1996). Yani, $O_{2'}(G) \leq G'$ dir. Demek ki; $G = G'G_2$ eşitliği gözönüne alındığında, $G' = N$ olmalıdır.

Sonuç olarak, $G = G'G, G' \cap G_2 = \{1_G\}, G/G' \cong G_2$ ise G, G' üzerine G_2 tamamlayıcısı ile yayılır.

b. Teorem 9'dan, bir ambivalent grubun her bölüm grubu da bir ambivalent gruptur. Dolayısıyla, G/G' ve $G/G' \cong G_2$ den G_2 grubu da ambivalenttir.

c. Teorem 9'dan, bir abelyen ambivalent grup, bir elementer abelyen 2-grubudur. O halde, G_2 bir elementer abelyen 2-grup olmalıdır. Öte yandan, Tanım 5'ten, G_2 nin tüm elemanları gerçektir.

d. Teorem 14'ten, G' grubu nilpotenttir.

Örnek: $S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ simetrik grubu, teoremin tüm koşullarını sağlar. S_3 grubunun eşlenik eleman sınıfları, $\{I\}, \{(12), (13), (23)\}, \{(123), (132)\}$ alt kümeleriyle belirlenir. Dikkat edilecek olursa, her elemanın tersi kendisiyle aynı eşlenik eleman sınıfındadır. O halde, S_3 bir ambivalent gruptur. Öte yandan, $\{I\} \trianglelefteq A_3 \trianglelefteq S_3$ alt normal serisi için her adımda normal alt grup ilişkisi vardır. Üstelik, $A_3 / \{I\} \cong Z_3$ ve $S_3 / A_3 \cong Z_2$ olduğundan elde edilen bölüm grupları asal mertebelidir dolayısıyla S_3 süper çözülebilirdir.

a. $G_2 = \langle (12) \rangle \cong Z_2$, S_3 ün bir abelyen Sylow 2- alt grubudur. S_3 ün komütatör grubu $A_3 = \langle (123) \rangle$ ve $S_3 = A_3 G_2$, $A_3 \cap G_2 = \{I\}$, $S_3 / A_3 \cong G_2$ olduğundan, S_3 grubu A_3 üzerine G_2 tamamlayıcısıyla yayılır.

b. S_3 bir ambivalent grup olduğundan her bölüm grubu da ambivalenttir. Dolayısıyla, $S_3 / A_3 \cong G_2$ den $G_2 = \langle (12) \rangle$ grubu da ambivalenttir.

c. Bir abelyen ambivalent grup, bir elementer abelyen 2-grubudur. O halde, $G_2 = \langle (12) \rangle$ grubu bir elementer abelyen 2- grubudur.

d. $A_3 = \langle (123) \rangle$ bir 3-grubu olduğundan nilpotenttir.

Teşekkür

Bu çalışma, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü Birimince desteklenmiştir. Proje Numarası: 2023-11.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazar makaleye %100 oranında katkı sağlamış olduğunu beyan eder.

Kaynakça

- Alperin JL., Bell RB. Groups and representations. Berlin: Springer-Verlag; 1995.
- Armeanu I. About the 2-Sylow subgroups of a Q-group. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Dergisi 1993; 52: 45-46.
- Armeanu I. Supersolvable Q-groups. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Dergisi 1994; 53: 1-2.
- Armeanu I. About ambivalent groups. Annales de Mathématiques Blaise Pascal 1996; 3: 17-22.
- Dornoff L. Group representation theory: Part A ordinary representation theory. New York: Marcel Dekker; 1971.

- Gow R. Real-valued characters and Schur index. *Journal of Algebra* 1976; 40: 258-270.
- Huppert B., Blackburn N. *Finite groups*. Berlin: Springer-Verlag; 1982: 2.
- Kletzing D. *Structure and representation of Q-groups*. Berlin: Springer-Verlag; 1984.
- Rose JS. *A course in group theory*. New York: Dover Publications; 1978.