



Nöron harita modelleri ve bu modellerin nöral sistemler ve nöromorfolojik mühendislik alanlarındaki rolleri üzerine bir derleme

A review of neuron map models and their roles in neural systems and neuromorphological engineering

Nimet Korkmaz^{1,*} 

¹ Kayseri Üniversitesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, 38280, Kayseri Türkiye

Öz

Canlı vücudunda merkezi sinir sistemi ile duyu organları arasındaki iletişimin temel yapı taşı nöronlardır. Nöronların hücre zarı potansiyelleri, hücrelerin toparlanma durumları, voltaj kapı iyonları ve hücre zarının ürettiği zengin kompleks dinamikler adı diferansiyel denklem tanımlamalarına sahip biyolojik nöron modelleri ile temsil edilmektedir. Bu sistemlerin nümerik çözümlerinde çeşitli ayrıklaştırma yöntemlerinden yararlanılmaktadır. Bununla birlikte, son yıllarda sürekli zamanda tanımlanan bu modeller yerine, ayrıklaştırma sürecine ihtiyaç duymayan ve ayrık zamanda tanımlanan nöron harita modelleri literatüre sunulmaktadır. Bu çalışmada son zamanlarda kullanımı yaygınlaşan Rulkov, Chialvo, Courbage–Nekorkin–Vdovin ve Huber-Braun nöron harita modellerinin sergiledikleri nöronal dinamikler nümerik simülasyonlarla yeniden gözlemlenmektedir. Bu modellerin biyolojik nöron modelleri üzerine yapılan yaygın araştırma alanlarındaki kullanımları ile ilgili bir derleme sunmak amaçlanmakta ve böylece nöromorfolojik mühendislik konuları üzerine çalışan araştırmacılara, araştırmaya açık çalışma konuları için ilham kaynağı olabileceği düşünülen bir derleme çalışmasının ortaya konması hedeflenmektedir.

Anahtar kelimeler: Rulkov nöron harita modeli, Chialvo nöron harita modeli, Courbage–Nekorkin–Vdovin nöron harita modeli, Huber-Braun nöron harita modeli, Senkronizasyon, Gürültü, Donanım

1 Giriş

Canlı vücudunda merkezi sinir sistemi ile duyu organları arasındaki iletişimin temel yapı taşı nöronlardır. Hodgkin Huxley'in 1952 yılında önerdiği modelleme çalışmasının ardından, bu modele alternatif olarak önerilen ve Hodgkin Huxley nöron modeline benzer şekilde sürekli zamanda tanımlan çeşitli biyolojik nöron modelleri literatüre sunulmuştur [1-7]. Bu modeller farklı uygulamalarda kullanılmış ve pek çoğunun farklı donanımlar kullanılarak yapılan gerçekleştirim çalışmaları da kaydedilmiştir.

Sürekli zamanda tanımlanan nöron modelleri hücre zarı potansiyelini, hücrenin toparlanma parametresini, voltaj kapı iyonlarını ve hücre zarının zengin kompleks dinamiklerini temsil etmek için iki ila dört adet adi diferansiyel denklem

Abstract

Neurons are the fundamental building blocks of communication between the central nervous system and sensory organs in the living beings. Neuron cell membrane potentials, cell recovery states, voltage gate ions, and the rich complex dynamics generated by the cell membrane are represented by biological neuron models defined by the ordinary differential equations. Various discretization methods are utilized in the numerical solutions of these systems. However, in recent years, instead of these continuous time based models, the neuron map models, which are defined in discrete time and do not require discretization process, are also introduced to the literature. This study re-observes the neuronal dynamics exhibited by the recently popularized Rulkov, Chialvo, Courbage–Nekorkin–Vdovin, and Huber-Braun neuron map models through their numerical simulations. It is aimed to present a review of the usage of these models in common research areas on biological neuron models, so to present a review study that is thought to be a source of inspiration for open research study topics for the researchers working on neuromorphological engineering topics.

Keywords: Rulkov neuron map model, Chialvo neuron map model, Courbage–Nekorkin–Vdovin neuron map model, Huber-Braun neuron map model, Synchronization, Noise, Hardware

takımı tanımlanmıştır. Adi diferansiyel denklem tanımlamalarındaki durum değişkenlerine ilaveten; hücre zarı potansiyelinin desenlerini taklit edebilmek adına üstel, parabolik, trigonometrik ve benzeri fonksiyon tanımlamalarından da yararlanılmıştır. Hücre zarı dinamikleri arasındaki desen geçişleri modellerde tanımlanan sabit parametrelerin değişimi ile sağlanmıştır. Parametre değişimlerinin hücre zarı potansiyelinin deseni üzerinde yarattığı kompleksliklerin kontrolleri dallanma diyagramları ve Lyapunov üstelleri ile tespit edilmiştir [8-11]. Tanımlamalarındaki durum denklemlerinin nümerik çözümü ile osilatör yapılarına benzer şekilde, harici bir giriş işaretine ihtiyaç duymayan ve kendi desenlerini üreten nöron modelleri türetilmiştir. Bahsi geçen sürekli zamanda tanımlı

* Sorumlu yazar/ Corresponding author, e-posta / e-mail: nimetkorkmaz@kayseri.edu.tr (N. Korkmaz)

Geliş / Received: 04.08.2025 Kabul / Accepted: 02.02.2026 Yayımlanma / Published: 12.02.2026

doi: 10.28948/ngumuh.1758202

nöron modeli tanımlamalarındaki diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde Euler, Runge Kutta ya da Dormand-Prince gibi ayrıklaştırma yöntemleri kullanılmaktadır [12-14]. Bu nümerik çözümlerde kullanılan analiz yöntemlerindeki adım büyüklüğüne bağlı olarak orijinal model ile ayrıklaştırılmış model arasında bir hata meydana gelmektedir. Burada oluşan hata; nümerik analiz yönteminde seçilen adım büyüklüğünün değeri küçültülerek ya da kullanılan ayrıklaştırma yönteminin derecesi artırılarak azaltılabilir; fakat bu durumlarda dahi hata kaynağı ortadan kaldırılmış sayılmaz. Bununla birlikte, literatürde son yıllarda sürekli zamanda tanımlanan biyolojik nöron modeli tanımlamalarına alternatif olarak, ayrık zamanda tanımlı nöron harita modellerinin kullanımı dikkatleri çekmektedir [15-18]. Bu modeller yukarıda bahsedilen ayrıklaştırma süreçlerine ihtiyaç duyulmaksızın modelleme ve tasarım yapılabilmesine imkân sağlamaktadır.

Bu çalışmada biyolojik nöronlarda gözlemlenen farklı nöral davranışları temsil etmedeki başarıları ve son yıllarda literatürde yaygın olarak kullanılmaları nedeniyle Rulkov, Chialvo, Courbage–Nekorkin–Vdovin ve Huber–Braun nöron harita modelleri ele alınmaktadır [15-18]. Bu modellerden Rulkov ve Chialvo modelleri, kaotik ve periyodik nöral dinamikleri basit harita yapılarıyla incelenmeye olanak sağlamaktadır [15, 16]. Courbage–Nekorkin–Vdovin modeli senkronizasyon ve nöral etkileşimlerin analizlerinde kullanılmaktadır [17]. Huber–Braun modeli ise sıcaklık ve iyon kanalı dinamiklerini içeren detaylı tanımlaması ile biyofiziksel gerçekçiliği artırmaktadır [18]. Bu kapsamda, burada Rulkov, Chialvo, Courbage–Nekorkin–Vdovin ve Huber–Braun [15-18] nöron harita modellerinin sergiledikleri nöronal dinamiklerin, MATLAB-SIMULINK™ aracı kullanılarak nümerik simülasyonlarla yeniden gözlemlenmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca son birkaç yılda yapılan ve ilgili modelleri konu edinen;

- i) senkronizasyon konulu çalışmaların,
- ii) modelleri farklı kuplaj tanımlamaları ile birleştiren ve kuplajlama çalışmalarında konu edinilen ağ topolojilerinin,
- iii) plastisite, gürültü ve rastgelelik açısından ele alınan yaklaşımların,
- iv) model dinamiklerinin kontrolleri üzerine yapılan çalışmaların,
- v) ve donanım tabanlı gerçekleştirimi konu edinen nöromorfik mühendislik alanındaki çalışmaların

derlenmesi amaçlanmaktadır. Böylece ayrık nöron harita modellerinin bibliyografik bir derlemesini yapmak yerine, bu modellerin yukarıda özetlenen en yaygın araştırma alanlarındaki kullanımı üzerine bir derleme yaparak nöromorfolojik mühendislik konuları üzerine çalışan araştırmacılara, araştırmaya açık çalışma konuları için ilham kaynağı olabileceği düşünülen bir derleme ortaya koymak hedeflenmiştir.

Rulkov, Chialvo, Courbage–Nekorkin–Vdovin ve Huber–Braun nöron harita modelleri, bu modellerin

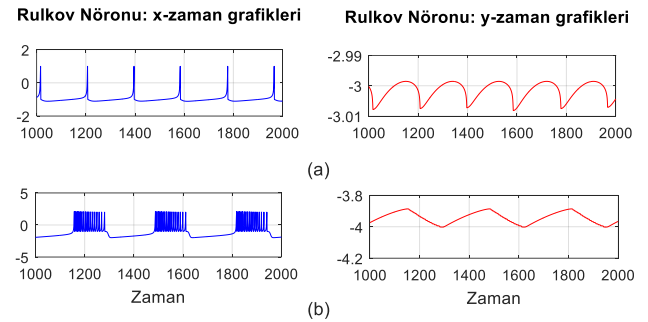
yenilenen nümerik simülasyon sonuçları ve ilgili modelleri konu edinen yukarıdaki başlıklardaki çalışma örnekleri sırasıyla Bölüm 2- Bölüm 5 arasında sunulacaktır. Çalışma sonucunda değerlendirilen araştırmaya açık konular altıncı bölümde ele alınacaktır.

2 Rulkov nöron harita modeli

Rulkov nöron harita modeli, biyolojik bir nöronu modellemek için kullanılan iki boyutlu yinelemeli bir harita modelidir. Bu model, nöral sistemleri modellemek için sürekli dinamik bir sisteme göre hesaplama avantajına sahip olması yönüyle bellek tasarrufu sağladığı vurgusu yapılarak Nikolai F. Rulkov tarafından önerilmiştir [15]. Rulkov nöron harita modeli aşağıdaki eşitliklerle tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n + \beta_n) \\ y_{n+1} &= y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma_n \\ f(x, y) &= \begin{cases} \alpha/(1-x) + y & x \leq 0 \\ \alpha + y & 0 < x < \alpha + y \\ -1 & x \geq \alpha + y \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

burada x nöronun hücre zarı potansiyelini temsil eder. x değişkeninin aksine y değişkeninin biyolojik anlamlılığı yoktur; fakat voltaj kapı parametresi olarak düşünülebilir. β ve σ nörona uygulanan harici DC akım parametreleri, α ise nöron haritasının nonlineerlik parametresidir. σ ve α parametrelerinin farklı kombinasyonları ile nöronun dinlenme ateşleme, patlama ve kaotik gibi davranışları elde edilebilmektedir. Bu davranışlardan nöron harita modelinin ateşleme ve patlama dinamikleri örnekleri sırasıyla Şekil 1a ve Şekil 1b’de sunulmaktadır.

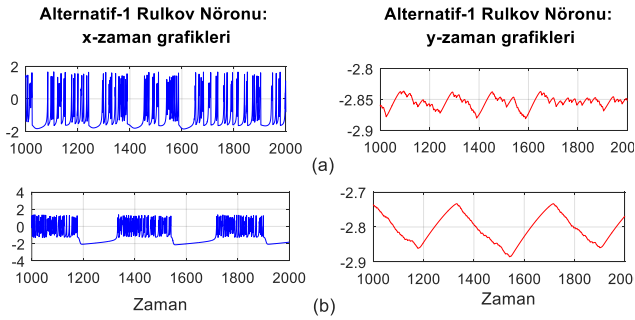


Şekil 1. Rulkov nöron harita modelinin a) $\alpha=0.4$, $\mu=0.001$, $\beta=0$, $\sigma=0.01$ için ateşleme dinamiği, b) $\alpha=0.6$, $\mu=0.001$, $\beta=0$, $\sigma=-0.1$ için patlama dinamiği

Denklem 1’de tanımlanan ve Şekil 1’de simülasyon sonucu sunulan sistemin amacı, iki boyutlu bir harita modeli ile nöronun ateşleme ve patlama desenlerini gözlemleyebilmektir [15]. Öte yandan, Denklem 1’de yapılan bir modifikasyon ile farklı özelliklere sahip ve düzensiz şekilde patlama yapan nöronlardan oluşan bir grubun zamanla düzenli patlamalar göstermeye başlaması amaçlanarak, model tanımlaması bir başka çalışmada Denklem 2’deki gibi yeniden düzenlenmiştir [19].

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{\alpha}{1 + x_n^2} + y_n \\ y_{n+1} &= y_n - \mu(x_n - \sigma) \end{aligned} \quad (2)$$

Bu model tanımlamasındaki α parametresinin değişimi ile patlama desenindeki diken sayısının kontrolü sağlanmıştır. Farklı α değerleri için yinelenen nümerik simülasyon sonuçları Şekil 2’de sunulmaktadır.



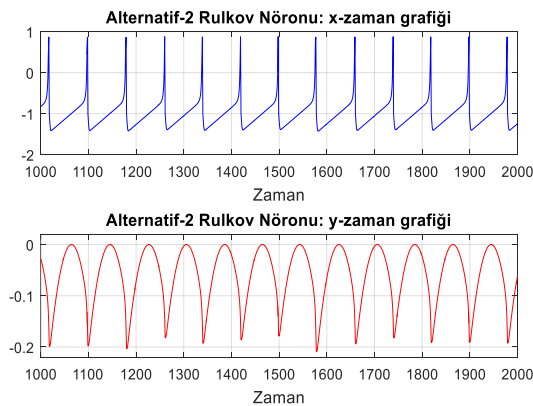
Şekil 2. Alternatif-1 Rulkov nöron harita modelinin a) $\alpha=0.45$, $\mu=0.001$, $\beta=0.001$, $\sigma=0.001$ için düzensiz patlama dinamiği, b) $\alpha=0.41$, $\mu=0.001$, $\beta=0.001$, $\sigma=0.001$ için düzenlenen patlama dinamiği

Yukarıda tanımlanan Rulkov nöron modeli tanımlamalarına bir alternatif olarak, bu model Shilnikov ve Rulkov tarafından uyarılma eşliğinin altında kalan salınımların da modellenebilmesi için Denklem 3’teki gibi güncellenmiştir [20].

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n + \beta_n) \\ y_{n+1} &= y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma_n \end{aligned}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} -\alpha^2/4 - \alpha + y + \beta & x < -1 - \alpha/2 \\ \alpha x + (x+1)^2 + y + \beta & -1 - \alpha/2 \leq x \leq 0 \\ y + 1 + \beta & 0 \leq x \leq y + 1 + \beta \\ -1 & x \geq y + 1 + \beta \end{cases} \quad (3)$$

Burada ateşleme yapmayan salınımlara odaklanılmaktadır ve ilgili sisteme ait yinelenen nümerik simülasyon sonuçları Şekil 3’te sunulmaktadır.



Şekil 3. Alternatif-2 Rulkov nöron harita modelinin a) $\alpha=0.99$, $\mu=0.02$, $\beta=0$, $\sigma=0.0001$ için ateşleme dinamiği

Model tanımlamaları hakkında kısa bir özeti sunulan Rulkov nöron modelinin sergilediği nöronal dinamikleri çeşitlendirmek adına, fraksiyonel ya da memristif tanımlı yaklaşımlara da yer verilmektedir [21, 22].

Rulkov nöron modelinin çoklu nöronların kuplajlandığı ve ardından bu nöronlar arasındaki senkronizasyon durumunun ele alındığı çalışmalar da literatürde mevcuttur. Bu çalışmaların bazılarında irdelenen konular ve elde edilen çıktılar şu şekildedir: *Sausedo-Solorio* ve *Pisarchik* tarafından yapılan çalışmada nöronların senkronizasyonunda hafıza süresi ile sinaptik gecikme süresi arasındaki ilişki ele alınmıştır. Hafıza süresi, sinaptik gecikme süresinden uzun ise, nöronlar “beklenenden önce” (anticipation) senkronize olduğu; hafıza süresi sinaptik gecikmeden kısa ise, senkronizasyonun gecikmeli (lag) gerçekleştiği ortaya konmuştur [23]. *Mehrabbeik vd.* tarafından yapılan çalışmada halka (ring) topolojisinde yerleştirilmiş yüz adet memristif Rulkov model tabanlı bir ağ yapısı oluşturulmuş ve bu ağ yapısında yalnızca elektriksel sinaps, yalnızca kimyasal sinaps, ya da her ikisi birlikte bağlanarak senkronizasyon durumu ele alınmıştır. Burada memristif tanımlanmayan Rulkov nöron harita modellerinde sadece elektriksel sinaps ile bağlantı durumunda senkronizasyon sonucu elde edilemezken, memristif tanımlı Rulkov modeli ile senkronizasyon durumunun elde edilebildiği, kimyasal sinapsın tek başına kullanımı durumunda nöronların dinlenme durumuna geçtiği ve elektriksel ile kimyasal sinapsların bir arada kullanıldığı durumda ise, nöronların senkronize olduğu sonuçlarına ulaşılmıştır [22]. *Mehrabbeik vd.* tarafından yapılan bir diğer çalışmada memristif Rulkov nöron modeliyle kurulan ağlarda yüksek dereceli etkileşimlerin senkronizasyon davranışlarını nasıl etkilediğini incelenmiş ve klasik (ikili) bağlantı yapılarına kıyasla farklar ortaya konmuştur. Buna göre, yüksek dereceli (multi-node) kimyasal bağlantılarda, klasik ikili bağlantılara kıyasla daha düşük bağlantı kuvvetleriyle bile senkronizasyon durumunun sağlanabildiği ve ağ büyüklüğü arttıkça senkronizasyon durumunun kolaylaştığı sonuçları elde edilmiştir [24]. *Li vd.* tarafından yapılan çalışmada memristör tabanlı bir sinaptik bağlantı modeli kullanarak iki Rulkov nöronunun senkronizasyon davranışlarını incelenmiştir. Memristör ile bağlanan ayrıık nöron modelinin hem tam hem de gecikmeli senkronizasyon üretebildiği, birden fazla ateşleme modelini aynı anda barındırabildiği ve senkronize nöronal kontrolün dijital sistemlerde gerçekleştirilebildiği gösterilmiştir [25]. *Ma vd.* tarafından yapılan çalışmada yerel olarak aktif ayrıık memristör kullanarak Rulkov temelli bir nöral ağ oluşturulmuş ve farklı bağlantı kuvvetleri ve başlangıç durumlarının, ağı senkronizasyon ve ateşleme desenleri üzerindeki etkileri incelenmiş ve hem senkronizasyon geçişlerini hem de birden fazla senkronizasyon durumunun aynı anda var olabileceği sonucu elde edilmiştir [26].

Literatürde Rulkov nöron modeli kullanılarak oluşturulan i) yüksek dereceli ağ yapıları [27], ii) küçük heterojen zincir ağı [28], iii) asimetrik kuplajlı ağ [29], iv) çekici ve itici ağ yapısı [30], v) elektriksel ve/veya kimyasal kuplajlı ağ [31, 32], vi) kümelenmiş ve Newman Watts küçük

dünya ağları [33], vii) ayırık frakmemristörle kuplajlı ağ [34], viii) alan kuplajlı ve intra-layer kuplajlı ağ [35], ix) büyük ölçekli kortikal ağ [36], x) memristör kuplajlı ağ [37] ve xi) gecikmeli kuplajlı ağ olmak [38] üzere farklı ağ topolojileri üzerine yapılmış çalışmalar mevcuttur.

Nöron modelleri gürültüye maruz kaldıklarında sergiledikleri dinamiklerde oldukça önemli farklılaşmalar gözlemlenebilmektedir. Bu sebeple literatürde modellere gürültü uygulanarak nöronal dinamiklerin gözlemlendiği çalışmalar da mevcuttur. *Rybalova vd.* tarafından ele alınan çalışmada, Lévy gürültüsünün etkisi altında harita tabanlı sinirsel modellerde görülen tutarlılık rezonansı olgusu incelenmiştir [39]. Rulkov haritası, Chialvo haritası ve Courbage–Nekorkin–Vdovin haritası gibi çeşitli sinirsel haritalar için Lévy gürültüsünün farklı parametrelerinin salınımlı aktivite üzerindeki etkisi analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, gürültüyle uyarılan salınımların tutarlılığının kararlılık indisi azaldıkça düştüğünü göstermektedir. Diğer yandan, asimetriklik parametresindeki değişimlerin ise tutarlılığı hem azaltabileceği hem de artırabileceğini ortaya koymuştur. Burada klasik rastgele gürültülerden farklı olarak Lévy gürültüsünün kullanılmasıyla, sinir sistemlerindeki beklenmedik ve sıçramalı davranışları daha gerçekçi biçimde modelleme amaçlanmıştır. *Ryashko ve Bashkirtseva* tarafından ortaya konan çalışmada Rulkov modelinin karmaşık salınım rejimlerin stokastik dönüşüm mekanizmaları incelenmiştir [40]. İkili ritmik parametre bölgesinde, periyodik ve kaotik salınımların birlikte var olduğu durumda, gürültü etkisiyle düzenli ateşleme davranışından kaotik patlama rejimine geçişler araştırılmıştır. Bu durum sinir hücrelerinin uyarılara verdiği tepki çeşitliliğini açıklamada kritiktir. Nöronal davranışları parametre düzeyinde analiz edebilmek için, stokastik duyarlılık tekniğine dayanan güvenilirlik elipsleri yöntemi kullanılmıştır ve yöntemin stokastik sistemlerin duyarlılığını görselleştirme ve analiz etme konusunda nörobilimdeki potansiyeli vurgulanmıştır.

Gerçek biyolojik sistemleri modelleyen nöron modeli çalışmalarında, nöron dinamikleri arasındaki geçişlerin, ateşleme zamanlarının ve ritmik desenlerdeki diken sayılarının kontrol edilebilmesi üzerine de çalışmalar kaydedilmektedir. Bu konu üzerine Rulkov nöron harita modeli ile yapılan çalışmalar aşağıdaki birkaç çalışma ile örneklendirilebilir. *Lopez vd.* tarafından yapılan çalışmada Rulkov modelinde yer alan iki kaotik bölge arasında geçiş sağlanarak, kısa süreli nöronal patlamalar yerine uzun süreli patlamalar üretilmiş ve gürültü etkisi altındaki sistemde, minimum müdahale ile kontrol sağlanmıştır [41]. *Min vd.* ReLU-tabanlı memristörle bağlı Rulkov nöron sisteminin sınırdaki karmaşık geçiş davranışlarını incelemiş ve bu sistemdeki geçişlerin hangi durumlarda oluştuğunu analiz etmişlerdir. Sistemin çoklu kararlı yapısını sayısal simülasyonlarla ortaya koyduktan sonra; sistemin doğruluğunu göstermek amacıyla, donanımsal (FPGA tabanlı) deneyler ile bu sistemi gerçekleştirmişlerdir [42].

Biyolojik nöron modelleri biyoloji esinli nöromorfoloji çalışmalarına örnek olarak elektronik donanımlarla da doğrulanabilmektedir. Rulkov nöron modelini kullanan ve donanımla gerçekleştirimi yapılan çalışmalara; transistör ve

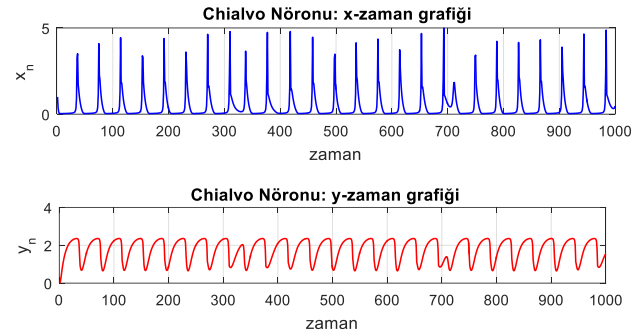
işlemsel kuvvetlendirici ile yapılan ayırık donanım tabanlı uygulamaların [43-45] yanı sıra, DSP ve FPGA ile yapılan programlanabilir donanım tabanlı gerçekleştirmeler örnektir [46-48].

3 Chialvo nöron harita modeli

Chialvo haritası, uyarılabilir sistemlerin kompleks dinamiklerini tanımlamak için 1995'te Dante R. Chialvo tarafından önerilen iki boyutlu bir haritadır [16]. Modelde tanımlanan üç parametrenin değişimi kullanarak nöral dinamikler simülasyonlarda verimli bir şekilde taklit edebilmektedir. Model, her zaman adımında nöronun davranışının **Denklem 4**'teki gibi güncellendiği yinelemeli bir haritadır:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 e^{(y_n - x_n)} + k \\y_{n+1} &= ay_n - bx_n + c\end{aligned}\quad (4)$$

burada x aksiyon potansiyeli değişkeni, y toparlanma parametresi değişkenidir. k zamana bağımlı bir pertürbasyon sabitidir. a , toparlanma değişkeninin zaman sabitidir. b , toparlanma sürecinin aktivasyon bağımlılığıdır ve c bir offset sabitidir. Model parametrelerinin farklı kombinasyonları, periyodik osilasyon davranışından kaotik davranışa kadar zengin bir dinamik çeşitliliği sunar. Chialvo nöron harita modelinin parametreleri $k=0.03$, $a=0.89$, $b=0.2$ ve $c=0.28$ seçilerek yapılan bir nümerik simülasyon sonucu **Şekil 4**'te sunulmaktadır.



Şekil 4. $k=0.03$, $a=0.89$, $b=0.2$ ve $c=0.28$ değerleri için Chialvo nöron harita modelinin nümerik simülasyon sonuçları

Model tanımlaması hakkında kısa bir özeti sunulan Chialvo nöron harita modelinin sergilediği nöronal dinamikleri çeşitlendirmek adına, fraksiyonel ya da memristif tanımlı yaklaşımlara da kaydedilmiştir [49, 50].

Chialvo nöron modelinin çoklu nöronların kuplajlandığı ve ardından bu nöronlar arasındaki senkronizasyon durumunun ele alındığı çalışmalar da literatürde mevcuttur. Bu çalışmaların bazılarında irdelenen konular ve elde edilen çıktılar şu şekildedir: *Sriram vd.* tarafından yapılan çalışmada, memristif Chialvo (mChialvo) nöron haritası kullanılarak düzenli yapıya sahip bir nöronal ağın senkronizasyon durumu üzerinde elektriksel, iç bağlantılı (inner-linking), kimyasal ve hibrit bağlantı fonksiyonlarının etkisi incelenmiştir [50]. Bu çalışma ile kimyasal sinapsların

mChialvo nöronlarının senkronizasyonunu sağlamakta, bu bağlantının en etkili bağlantı türü olduğu ve düşük bağlantı gücüyle bile senkronizasyon mümkün olduğu vurgulanmaktadır. Wang vd. tarafından yapılan çalışmada Chialvo nöron harita modellerini birbirine bağlamak için ayrı memristör tasarlanmış ve bu yapı ile kurulan nöral ağ sisteminde senkronizasyon ve uzay-zamansal dinamikleri analiz edilmiştir [51]. Biyolojik sistemlerde zararlı olabilecek sarmal dalgaları bastırmak için etkili bir kontrol yöntemi geliştirilerek nöral ağın bilgi iletim yeteneği ve dayanıklılığı değerlendirilmiştir.

Chialvo nöron harita modeli tabanlı i) rastgele bağlantılı [52], ii) memristör kuplajlı [53], iii) gecikmeli kuplajlı [54], iv) en küçük halka - yıldız ağı [55] ve v) alan kuplajlı [56] nöronal ağ konfigürasyonları literatürde mevcuttur.

Chialvo nöron harita modeline gürültü uygulanarak nöronal dinamiklerin gözlemlendiği çalışmalara örnek olarak Rybalova vd. tarafından sunulan Lévy gürültüsünün etkisi altında harita tabanlı sinirsel modellerde görülen tutarlılık rezonansı olgusunun incelendiği çalışmaya ilaveten [39], modele Gaussian beyaz gürültüsü uygulanarak kontrolün sağlanmaya çalışıldığı çalışmalar da mevcuttur [57-60]. Bu çalışmalarda gürültüye maruz kalmış sistemlerde senkronizasyon durumunun elde edilmesi [57, 58] ya da gürültü eklendiğinde ortaya çıkan yeni dinamiklerin kontrolü [59, 60] gibi konular ele alınmıştır.

Chialvo nöron harita modeli tabanlı elektronik donanımla gerçekleştirilen çalışmalara örnek olarak STM32F103ZET6 mikrodenetleyicisi ile inşa edilmiş emülatör yapıları gösterilebilir [61, 62].

4 Courbage–Nekorkin–Vdovin nöron harita modeli

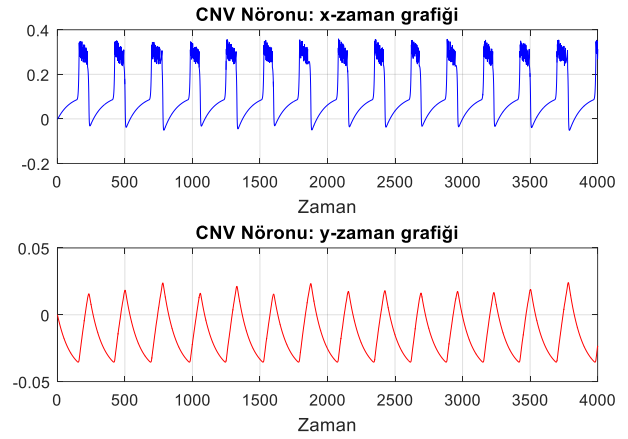
İki boyutlu bir tanımlamaya sahip olan Courbage–Nekorkin–Vdovin nöron harita modeli 2007 yılında literatüre sunulmuştur [17]. Model Denklem 5 ile tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + F(x) - y - \beta H(x)(x - d) \\ \bar{y} &= y + \varepsilon(x - J)\end{aligned}\quad (5)$$

burada x , hücre zarı potansiyelinin dinamiklerini nitel olarak tanımlar. y , dışa doğru iyonik akımların tümünün dinamiklerini belirten ortak değişkendir (toparlanma parametresi). Bu model, FitzHugh–Nagumo modelinin [11] ayrık versiyonuna $H(x)$ Heaviside adım fonksiyonu eklenerek, geliştirilmiştir. Burada $F(x)$, ters N-şekilli fonksiyonla tanımlanmaktadır. Courbage–Nekorkin–Vdovin nöron harita modelinin parametreleri $\beta=0.09$, $d=0.3$, $\varepsilon=0.004$, ve $J=0.1123$ seçilerek yapılan bir nümerik simülasyon sonucu Şekil 5'te paylaşılmıştır.

Courbage–Nekorkin–Vdovin nöron harita modelinin fraksiyonel ya da memristive tanımlamasının ele alındığı bir çalışmaya henüz rastlanılmamıştır. Bununla birlikte, senkronizasyon ve kontrol konusu üzerine Wang vd. tarafından yapılan çalışmada şu konular ele alınmıştır: Modüler nöronal ağ modeli kullanarak, patolojik düzeydeki nöronal senkronizasyonu (özellikle patlama tipi) ortadan kaldırmak için etkili yöntemler geliştirilmesi, sinaptik plastisite (özellikle Oja kuralı ile) ve geri besleme kontrol

teknikleri kullanılarak, farklı öğrenme oranları ve kontrol parametrelerinin senkronizasyon üzerindeki etkisinin analiz edilmesi amaçlanmıştır [63]. Bu çalışma ile yüksek öğrenme oranına sahip sinaptik plastisitenin nöronlar arasındaki patlama tipinin senkronizasyonu etkili şekilde bastırdığı, düşük öğrenme oranlarında tek başına plastisitenin yeterli olmayabildiği ve doğrusal olmayan geri besleme kontrolüne ihtiyaç duyulabileceği bulguları kaydedilmiştir.



Şekil 5. $\beta=0.09$, $d=0.3$, $\varepsilon=0.004$, ve $J=0.1123$ değerleri için Courbage–Nekorkin–Vdovin (CNV) nöron harita modelinin nümerik simülasyon sonuçları

Senkronizasyon ve kontrol konularına ilaveten Courbage–Nekorkin–Vdovin nöron harita modeli tabanlı i) gecikmeli kuplajlı [64] ve ii) küçük dünya ağı [65] nöronal ağ konfigürasyonları literatürde mevcuttur.

Courbage–Nekorkin–Vdovin nöron harita modeline gürültü uygulanarak nöronal dinamiklerin gözlemlendiği çalışmalara örnek olarak Rybalova vd. tarafından sunulan Lévy gürültüsünün etkisi altında harita tabanlı sinirsel modellerde görülen tutarlılık rezonansı olgusunun incelendiği çalışma incelenebilir [39].

Courbage–Nekorkin–Vdovin nöron harita modeli tabanlı elektronik donanımla gerçekleştirilen çalışmalara örnek olarak, ayrık hesaplama işleminin örnekle tut devresi ile yapıldığı ve modelin opamp, çarpıcılar ve pasif devre elemanları ile gerçekleştirildiği ayrık donanım tabanlı bir gerçekleştirim örneği literatürde mevcuttur [66].

5 Huber-Braun nöron harita modeli

Huber-Braun modeli iki yavaş eşik altı akımına, sızıntı ve kanal akımlarının dâhil edilmesiyle türetilen ve Hodgkin-Huxley nöron modelinin modifikasyonu olan bir ayrık nöron harita modelidir. Modelin ele alındığı referans çalışmada; sürekli zamanda tanımlanan modellere ayrıklaştırma işleminin uygulanabileceği, fakat ayrık nöron modellerinin literatürde farklı bir konu olarak ele alındığı; bu sebeple ilgili modelin sürekli zaman Huber-Braun tipi nöronlardan türetilen yeni bir ayrık nöron modeli olarak önerildiği vurgulanmaktadır [18]. İlgili nöron harita modeli, Denklem 6-9 gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} v(k+1) &= \frac{-I_l(k) - I_d(k) - I_r(k) - I_{sd}(k) - I_{sr}(k)}{C_M} \\ \alpha_r(k+1) &= \phi(T) \frac{(\alpha_{ro}(k) - \alpha_r(k))}{\tau_\mu} \\ \alpha_{sd}(k+1) &= \phi(T) \frac{(\alpha_{sdo}(k) - \alpha_{sd}(k))}{\tau_\mu} \\ \alpha_{sr}(k+1) &= \phi(T) \frac{(-\eta I_{sd}(k) - \kappa \alpha_{sr}(k))}{\tau_\mu} \end{aligned} \quad (6)$$

burada I_l yük akımını, sırasıyla I_d ve I_r depolarizasyon ve repolarizasyon akımlarını, I_{sd} ve I_{sr} eşikaltı depolarizasyon ve repolarizasyon akımlarını temsil eder.

$$\begin{aligned} I_l(k) &= g_l(V(k) - V_l) \\ I_d(k) &= \rho(T)g_d\alpha_d(k)(V(k) - V_d) \\ I_r(k) &= \rho(T)g_r\alpha_r(k)(V(k) - V_r) \\ I_{sd}(k) &= \rho(T)g_{sd}\alpha_{sd}(k)(V(k) - V_{sd}) \\ I_{sr}(k) &= \rho(T)g_{sr}\alpha_{sr}(k)(V(k) - V_{sr}) \end{aligned} \quad (7)$$

burada tanımlanan bütün akım ve fonksiyonlardaki ‘d’ alt indisi depolarizasyonu, ‘r’ alt indisi repolarizasyonu temsil eder. Yavaş depolarizasyon ve repolarizasyon parametreleri ise sırasıyla ‘sd’ ve ‘sr’ alt indisleri ile tanımlanmıştır. Yukarıdaki denklemlerde verilen durum aktivasyon tanımlamaları ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \alpha_{ro}(k) &= \frac{1}{1 + \exp(-s_r(V(k) - V_{0r}))} \\ \alpha_{sdo}(k) &= \frac{1}{1 + \exp(-s_{sd}(V(k) - V_{0sd}))} \\ \alpha_d(k) &= \frac{1}{1 + \exp(-s_d(V(k) - V_{0d}))} \end{aligned} \quad (8)$$

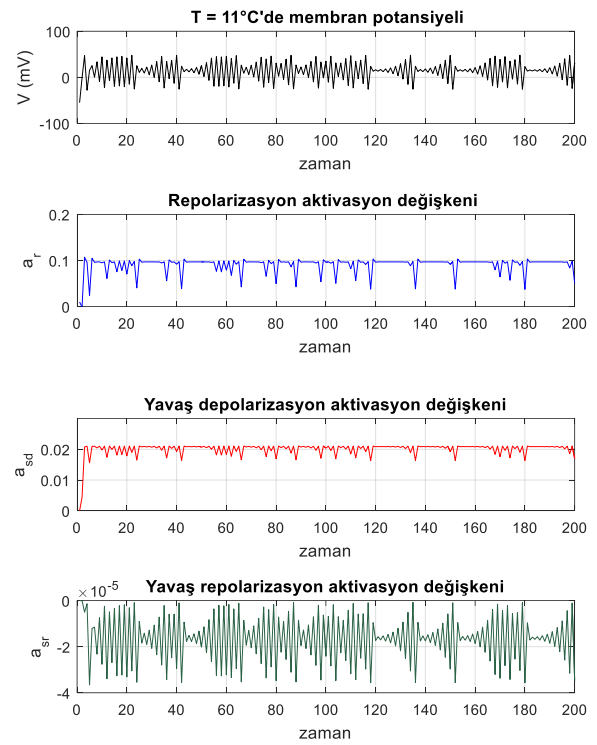
Modeldeki sıcaklık bağımlılıkları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned} \phi(T) &= 3^{(T-T_0)/10^\circ C} \\ \rho(T) &= 1.3^{(T-T_0)/10^\circ C} \end{aligned} \quad (9)$$

Denklem 6-9’deki ‘V’ ifadeleri denge potansiyellerini, ‘g’ ifadeleri iyon kondüktanslarını, ‘ C_M ’ parametresi hücre zarı kondüktansını, ‘ τ ’ parametreleri aktivasyon zaman sabitlerini, ‘ V_0 ’ ifadeleri yarı aktivasyon potansiyellerini ve ‘ η ’ ile ‘ κ ’ parametreleri kuplajlama faktörlerini temsil eder. Modelin referans alındığı çalışmadaki parametre değerleri birebir aynı alınarak [18] $T=11^\circ C$ sıcaklık değeri için yeniden yapılan nümerik simülasyon sonuçları Şekil 6’da sunulmaktadır.

Huber-Braun nöron harita modeli 2021 yılında önerilen ve nöron dinamiklerini detaylı bir tanımlama ile ele alan bir ayrık nöron harita modelidir. Huber-Braun nöron harita modelinin bu çalışmanın giriş kısmında sıralanan yaygın konu başlıklarında doğrudan ele alındığı bir çalışmaya literatürde rastlanmamıştır. Bununla birlikte modelin sürekli

zamanda tanımlı olan formunun *Rajagopal vd.* tarafından çoklu nöronlardan oluşan bir ağız kolektif davranışlarını incelemek ve periyodik harici uyarı altında ortaya çıkmayan dalga yeniden girişlerinin, ağa yerleştirilen engeller aracılığıyla nasıl tetiklenebileceğini araştırmak amacı ile kullanıldığı bir çalışma kaydedilmiştir [67]. *Rajagopal vd.* tarafından sunulan bir başka çalışmada, memristör tanımlaması içeren sürekli zamanda tanımlı Huber–Braun nöron modelinde sıcaklık değişimleri ve elektromanyetik indüksiyonun nöronal ateşleme düzenleri üzerindeki etkileri ele alınmıştır [68]. *Megchun vd.* tarafından yapılan çalışmada ise, nöronun ateşleme eşiğinin altında kalan periyodik dış uyarıların sürekli zamanda tanımlı Huber–Braun nöron modeli dinamiklerinde çoklu kararlı durumların oluşmasına ve karmaşık rezonans davranışlarının ortaya çıkmasına neden olduğu çeşitli analizlerle ortaya konulmaktadır [69].



Şekil 6. $T=11^\circ C$ için Huber-Braun nöron harita modelinin nümerik simülasyon sonuçları

6 Sonuçlar

Bu çalışmada literatürde öne çıkan ayrık nöron harita modellerinden birkaçının nümerik simülasyonları yinelenmiş ve bu modellerin yaygın araştırma alanlarındaki kullanımı üzerine derlemeleri yapılarak nöral sistemler ve nöromorfolojik mühendislik konuları üzerine çalışan araştırmacılara, araştırmaya açık çalışma konuları için ilham kaynağı olabileceği düşünülen bir çalışma ortaya koymaya çalışılmıştır.

Bu kapsamda genel bir değerlendirme yapılması durumunda; Rulkov ve Chialvo nöron harita modellerinin nöral tanımlama, senkronizasyon, kuplajlama, farklı ağ

topolojilerinde kullanımı, gürültüye karşı cevapları ve donanımsal gerçekleştirimi konusunda pek çok çalışmada etkin şekilde kullanıldığı görülmektedir. Bu çalışmalarda genellikle nöron harita modellerinin sürekli zamanda tanımlanan modellere benzer cevaplar sergilediğinden bahsedilmektedir. Buradan sürekli zamanda tanımlı modellerle ele alınan pek çok konu başlığının bu modellerle de incelenebileceği sonucu çıkarılabilir.

Courbage–Nekorkin–Vdovin ve Huber–Braun nöron harita modelleri literatüre nispeten daha yeni önerilmiş nöron harita modelleridir. Bu sebeple nöral sistemler ve nöromorfolojik mühendislik çalışma alanları açısından bu çalışmanın giriş kısmında sıralanmış araştırma alanlarında, farklı bakış açıları ile literatüre katkılar sağlayacak yeni yaklaşımların bu modellerle ele alınabileceği söylenebilir.

Son olarak bu çalışmaya konu olan nöron harita modellerinin elektronik donanım gerçekleştirimlerinin ortaya konması açısından bir değerlendirme yapılırsa, ele alınan nöron harita modellerinin, her birinin donanım doğrulamalarının hem analog hem de dijital ekipmanlarla yapılmasının mümkün olduğu söylenebilir. İlâveten, Chialvo nöron harita modelinde Rulkov modelinden farklı olarak denklem yapısındaki nonlineerlik durumu bir eksponansiyel fonksiyon ile sağlanmaktadır. Bu nöron harita modelinin donanım gerçekleştirimi açısından mikrokontrolörlerle gerçekleştirimi mevcutken, nonlineer tanımlaması nedeniyle, bu yapının analog elemanlarla da gerçekleştiriminin yapılması mümkün olduğu söylenebilir. Daha güncel olan diğer iki nöron harita modelinin elektronik donanımla doğrulama çalışmaları da genişletilebilir. Burada Huber–Braun nöron harita modelinin donanım kullanım maliyetinde modelin kapsamlı tanımlaması ve nonlineer ifadeleri gözetilerek gerçekleştirimdeki güçlüklerin dikkate alınması gerektiği hatırlatılabilir.

Teşekkür

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 124E560 kodlu proje ile desteklenmiştir.

Çıkar çatışması

Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

Benzerlik oranı (iThenticate): %11

Kaynaklar

- [1] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. The Journal of Physiology, 117(4), 500-544, 1952. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp00476>.
- [2] R. FitzHugh, Mathematical models for excitation and propagation in nerve. In: Schawn, H.P. (ed.) Biological Engineering, McGraw-Hill, New York, vol. 1, pp. 1–85. 1969.
- [3] J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, A model of neural bursting using three couple first order differential equations. Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, 221(1222), 87–102, 1984. <https://doi.org/10.1098/rspb.1984.0024>.
- [4] E. M. Izhikevich, Simple model of spiking neurons. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 14(6), 1569–1572, 2003. <https://doi.org/10.1109/tnn.2003.820440>.
- [5] H. R. Wilson and J. D. Cowan, Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. Biophysical Journal, 12 (1), 1–24, 1972. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(72\)86068-5](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(72)86068-5).
- [6] H. R. Wilson and J. D. Cowan, A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue. Kybernetik, 13(2), 55–80, 1973. <https://doi.org/10.1007/BF00288786>.
- [7] R. Naud, N. Marcille, C. Clopath, W. Gerstner, Firing patterns in the adaptive exponential integrate-and-fire model. Biological cybernetics, 99(4), 335–347, 2008. <https://doi.org/10.1007/s00422-008-0264-7>.
- [8] M. Storace, D. Lino, E. de Lange, The Hindmarsh–Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 18(3), 2008. <https://doi.org/10.1063/1.2975967>.
- [9] M. Courbage and V. I. Nekorkin, Map based models in neurodynamics. International Journal of Bifurcation and Chaos, 20(06), 1631–1651, 2010. <https://doi.org/10.1142/S0218127410026733>.
- [10] B. Ibarz, J. M. Casado, M. A. Sanjuán, Map-based models in neuronal Dynamics. Physics Reports, 501(1-2), 1–74, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.12.003>.
- [11] C. Rocsoreanu, A. Georgescu, N. Giurgiteanu, The FitzHugh–Nagumo model: bifurcation and dynamics (10. Basım), Springer Book Archive: Springer Science & Business Media, 2012. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9548-3>.
- [12] H. Gunasekaran, G. Spigler, A. Mazzoni, E. Cataldo, C.M. Oddo, Convergence of regular spiking and intrinsically bursting Izhikevich neuron models as a function of discretization time with Euler method. Neurocomputing, 350, 237–247, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2019.03.021>.
- [13] X. Liu and J. Frank, Symplectic Runge–Kutta discretization of a regularized forward–backward sweep iteration for optimal control problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 383, 113133, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.113133>.
- [14] N. Dahasert, İ. Öztürk, R. Kiliç, Experimental realizations of the HR neuron model with programmable hardware and synchronization applications. Nonlinear Dynamics, 70(4), 2343–2358, 2012. <https://doi.org/10.1007/s11071-012-0618-5>.
- [15] N. F. Rulkov, Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. Physical Review E, 65(4), 041922, 2002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.041922>.
- [16] D. R. Chialvo, Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. Chaos, Solitons & Fractals, 5(3-4), 2002. [https://doi.org/10.1016/S0960-0762\(02\)00000-0](https://doi.org/10.1016/S0960-0762(02)00000-0).

- 461-479, 1995. [https://doi.org/10.1016/0960-0779\(93\)E0056-H](https://doi.org/10.1016/0960-0779(93)E0056-H).
- [17] M. Courbage and V. I. Nekorkin, L. V. Vdovin, Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 17(4), 2007. <https://doi.org/10.1063/1.2795435>.
- [18] S. He, K. Rajagopal, A. Karthikeyan, A. Srinivasan, A discrete Huber-Braun neuron model: From nodal properties to network performance. *Cognitive Neurodynamics*, 17(1), 301-310, 2023. <https://doi.org/10.1007/s11571-022-09806-1>.
- [19] N. F. Rulkov, Regularization of synchronized chaotic bursts. *Physical Review Letters*, 86(1), 183, 2001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.183>.
- [20] A. L. Shilnikov and N. F. Rulkov, Subthreshold oscillations in a map-based neuron model. *Physics Letters A*, 328(2-3), 177-184, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.05.062>.
- [21] D. Ding, Y. Niu, Z. Yang, J. Wang, W. Wang, M. Wang, F. Jin, Extreme multi-stability and microchaos of fractional-order memristive Rulkov neuron model considering magnetic induction and its digital watermarking application. *Nonlinear Dynamics*, 112(17), 15523-15545, 2024. <https://doi.org/10.1007/s11071-024-09610-y>.
- [22] M. Mehrabbeik, F. Parastesh, J. Ramadoss, K. Rajagopal, H. Namazi, S. Jafari, Synchronization and chimera states in the network of electrochemically coupled memristive Rulkov neuron maps. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 18(6), 9394-9409, 2021. <https://doi.org/10.3934/mbe.2021462>.
- [23] J. M. Sausedo-Solorio and A. N. Pisarchik, Synchronization of map-based neurons with memory and synaptic delay. *Physics Letters A*, 378(30-31), 2108-2112, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.05.003>.
- [24] M. Mehrabbeik, S. Jafari, M. Perc, Synchronization in simplicial complexes of memristive Rulkov neurons. *Frontiers in Computational Neuroscience* 17, 1248976, 2023. <https://doi.org/10.3389/fncom.2023.1248976>.
- [25] K. Li, B. Bao, J. Ma, M. Chen, H. Bao, Synchronization transitions in a discrete memristor-coupled bi-neuron model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 165, 112861, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112861>.
- [26] M. L. Ma, X. H. Xie, Y. Yang, Z. J. Li, Y. C. Sun, Synchronization coexistence in a Rulkov neural network based on locally active discrete memristor. *Chinese Physics B*, 32(5), 058701, 2023. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/acb9f7>.
- [27] S. Mirzaei, M. Mehrabbeik, K. Rajagopal, S. Jafari, G. Chen, Synchronization of a higher-order network of Rulkov maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32(12), 2022. <https://doi.org/10.1063/5.0117473>.
- [28] I. Ghosh, A. S. Nair, H. O. Fatoyinbo, S. S. Muni, Dynamical properties of a small heterogeneous chain network of neurons in discrete time, *The European Physical Journal Plus*, 139(6), 545, 2024. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-05363-0>.
- [29] B. B. Le, Asymmetric coupling of nonchaotic Rulkov neurons: Fractal attractors, quasimultistability, and final state sensitivity. *Physical Review E*, 111(3), 034201, 2025. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.111.034201>.
- [30] Q. Wang, G. Chen, M. Perc, Synchronous bursts on scale-free neuronal networks with attractive and repulsive coupling. *PLoS One*, 6(1), e15851, 2011. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0015851>.
- [31] D. Hu, H. Cao, Stability and synchronization of coupled Rulkov map-based neurons with chemical synapses. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 35, 105-122, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.10.025>.
- [32] S. Parthasarathy, F. Parastesh, H. Natiq, K. Rajagopal, S. Jafari, Effect of electrical and chemical autapse on the firing pattern and synchronization of the Rulkov neuron model, *Complexity*, 2023(1), 8459009, 2023. <https://doi.org/10.1155/2023/8459009>.
- [33] C. A. S. Batista, E. L. Lameu, A. M. Batista, S. R. Lopes, T. Pereira, G. Zamora-López, J. Kurths & R. L. Viana, Phase synchronization of bursting neurons in clustered small-world networks, *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 86(1), 016211, 2012. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016211>.
- [34] Z. Tang, H. Wang, W. Zhu, K. Sun, Dynamics and synchronization of fractional-order Rulkov neuron coupled with discrete fracmemristor. *Chaos, Solitons & Fractals*, 192, 116012, 2025. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2025.116012>.
- [35] D. Muthukumar, D. N. Hajian, H. Natiq, M. Mehrabbeik, N. Pal, S. Jafari, Multilayer structure-induced collective dynamics in uncoupled memristive Rulkov neurons: Impact of field coupling and intralayer connections. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 471, 134464, 2025. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134464>.
- [36] N. F. Rulkov, I. Timofeev, M. Bazhenov, Oscillations in large-scale cortical networks: map-based model. *Journal of Computational Neuroscience*, 17(2), 203-223, 2004. <https://doi.org/10.1023/B:JCNS.0000037683.55688.7e>.
- [37] C. Shang, K. Sun, H. Wang, Z. Yao, S. He, Spatial patterns and chimera states in discrete memristor coupled neural networks. *Nonlinear Dynamics*, 111(21), 20347-20360, 2023. <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08836-6>.
- [38] J. M. Sausedo-Solorio and A. N. Pisarchik, Synchronization in network motifs of delay-coupled map-based neurons. *The European Physical Journal Special Topics*, 226(9), 1911-1920, 2017. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2017-70060-2>.
- [39] E. Rybalova, A. Ryabov, S. Muni, G. Strelkova, Lévy noise-induced coherence resonance in neural maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 186, 115210, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115210>.

- [40] L. Ryashko and I. Bashkirtseva, Noise-induced chaos and generation of phantom attractors in a birhythmic neuron model. *Chaos, Solitons & Fractals*, 191, 115841, 2025. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115841>.
- [41] J. López, M. Cocco, R. Capeáns, M. A. Sanjuán, Controlling the bursting size in the two-dimensional Rulkov model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 120, 107184, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107184>.
- [42] F. Min, G. Zhai, S. Yin, J. Zhong, Switching bifurcation of a Rulkov neuron system with ReLu-type memristor. *Nonlinear Dynamics*, 112(7), 5687-5706, 2024. <https://doi.org/10.1007/s11071-024-09335-y>.
- [43] Z. T. Njitacke, C. N. Takembo, G. Sani, N. Marwan, R. Yamapi, J. Awrejcewicz, Hidden and self-excited firing activities of an improved Rulkov neuron, and its application in information patterns. *Nonlinear Dynamics*, 112(15), 13503-13517, 2024. <https://doi.org/10.1007/s11071-024-09766-7>.
- [44] Q. Xu, T. Liu, C. T. Feng, H. Bao, H. G. Wu, B. C. Bao, Continuous non-autonomous memristive Rulkov model with extreme multistability. *Chinese Physics B*, 30(12), 128702, 2021. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/ac2f30>.
- [45] S. Zhang, C. Wang, H. Zhang, H. Lin, A multiplier-free Rulkov neuron under memristive electromagnetic induction: Dynamics analysis, energy calculation, and circuit implementation. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 33(8), 2023. <https://doi.org/10.1063/5.0160751>.
- [46] H. Cao, Y. Wang, S. Banerjee, Y. Cao, J. Mou, A discrete Chialvo-Rulkov neuron network coupled with a novel memristor model: Design, Dynamical analysis, DSP implementation and its application. *Chaos, Solitons & Fractals*, 179, 114466, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114466>.
- [47] B. Bao, J. Hu, J. Cai, X. Zhang, H. Bao, Memristor-induced mode transitions and extreme multistability in a map-based neuron model. *Nonlinear Dynamics*, 111(4), 3765-3779, 2023. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07981-8>.
- [48] B. Bao, J. Hu, H. Bao, Q. Xu, M. Chen, Memristor-coupled dual-neuron mapping model: initials-induced coexisting firing patterns and synchronization activities. *Cognitive Neurodynamics*, 18(2), 539-555, 2024. <https://doi.org/10.1007/s11571-023-10006-8>.
- [49] T. R. Shrama and P. M. Gade, Fractional-order neuronal maps: dynamics, control and stability analysis. *Pramana*, 98(2), 53, 2024. <https://doi.org/10.1007/s12043-024-02746-x>.
- [50] S. Sriram, S. Mirzaei, M. Mehrabbeik, K. Rajagopal, M. Rostami, S. Jafari, The influence of synaptic pathways on the synchronization patterns of regularly structured mChialvo map network. *Journal of Theoretical Biology*, 572, 111591, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2023.111591>.
- [51] H. Wang, H. Chen, K. Sun, W. Zhu, Z. Yao, Spatiotemporal dynamics and synchronization in a memristive Chialvo neural network. *Nonlinear Dynamics*, 113(9), 10365-10377, 2025. <https://doi.org/10.1007/s11071-024-10599-7>.
- [52] A. Roy and S. Sinha, Impact of random links on neuronal extreme events. *Chaos, Solitons & Fractals*, 180, 114568, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114568>.
- [53] C. Shang, S. He, K. Rajagopal, H. Wang, K. Sun, Dynamics and chimera state in a neural network with discrete memristor coupling. *The European Physical Journal Special Topics*, 231(22), 4065-4076, 2022. <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-022-00699-z>.
- [54] Z. Wang, F. Parastesh, H. Natiq, J. Li, X. Xi, M. Mehrabbeik, Synchronization patterns in a network of diffusively delay-coupled memristive Chialvo neuron map. *Physics Letters A*, 514, 129607, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2024.129607>.
- [55] A. S. Nair, I. Ghosh, H. O. Fatoyinbo, S. Muni, On the higher-order smallest ring-star network of Chialvo neurons under diffusive couplings. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(7), 2024. <https://doi.org/10.1063/5.0217017>.
- [56] S. Kanagaraj, P. Durairaj, A. Karthikeyan, K. Rajagopal, Unraveling the dynamics of a flux coupled Chialvo neurons and the existence of extreme events. *Cognitive Neurodynamics*, 18(5), 2211-2220, 2024. <https://doi.org/10.1007/s11571-024-10079-z>.
- [57] X. Yan, Z. Li, C. Li, Dynamics and synchronization in a memristor-coupled discrete heterogeneous neuron network considering noise. *Chinese Physics B*, 33(2), 028705, 2024. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/ad062c>.
- [58] J. M. Seoane, I. Bashkirtseva, L. Ryashko, M. A. Sanjuán, Synchronization of two non-identical Chialvo neurons. *Chaos, Solitons & Fractals*, 183, 114888, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114888>.
- [59] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, M. A. Prado-Reynoso, M. A. F. Sanjuán, Noise-induced bursting near a crisis bifurcation in a map-based neuron model. *Physical Review E*, 112(1), 014212, 2025. <https://doi.org/10.1103/1bt9-s94s>.
- [60] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, J. M. Seoane, M. A. Sanjuán, Noise-induced complex dynamics and synchronization in the map-based Chialvo neuron model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 116, 106867, 2023. <https://doi.org/10.1103/1bt9-s94s>.
- [61] L. Huang, W. Fan, C. Feng, H. Bao, N. Wang, Q. Xu, Initial-boosted dynamics in a memristive Chialvo map and its application for image encryption with hardware implementation. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 189, 155597, 2025. <https://doi.org/10.1016/j.aeeu.2024.155597>.
- [62] M. Qin, Q. Lai, L. Fortuna, X. W. Zhao, Rich dynamics induced by memristive synapse in Chialvo neuron network. *Nonlinear Dynamics*, 1-15, 2025. <https://doi.org/10.1007/s11071-025-10996-6>.
- [63] J. Wang, X. Yang, Z. Sun, Suppressing bursting synchronization in a modular neuronal network with

- synaptic plasticity. *Cognitive neurodynamics*, 12(6), 625-636, 2018. <https://doi.org/10.1007/s11571-018-9498-9>.
- [64] O. V. Maslennikov, V. I. Nekorkin, Modular networks with delayed coupling: Synchronization and frequency control. *Physical Review E*, 90(1), 012901, 2014. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.012901>.
- [65] O. V. Maslennikov, V. I. Nekorkin, J. Kurths, Basin stability for burst synchronization in small-world networks of chaotic slow-fast oscillators. *Physical Review E*, 92(4), 042803, 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.042803>.
- [66] W. Zhu, K. Sun, H. Wang, L. Fu, L. Minati, Dynamics, synchronization and analog circuit implementation of a discrete neuron-like map with pulsating spiral dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*, 186, 115281, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115281>.
- [67] K. Rajagopal, J. Ramadoss, S. He, P. Duraisamy, A. Karthikeyan, Obstacle induced spiral waves in a multilayered Huber-Braun (HB) neuron model. *Cognitive Neurodynamics*, 17(1), 277-291, 2023. <https://doi.org/10.1007/s11571-022-09785-3>.
- [68] S. Rajagopal, K. Rajagopal, M. Rostami, G. Guo, H.R. Abdolmohammadi, S. Jafari, Modulation of neuronal activity by temperature and electromagnetic induction in a memristive Huber–Braun model. *The European Physical Journal Special Topics*, 1-12, (2025). <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-025-01823-5>.
- [69] A. F. Megchun, P. Padilla-Longoria, J. Espinal-Enríquez, G. J. E. Santos, R. Bernal-Jaquez, New insights into multistability and complex resonances driven by subthreshold periodic signals in a neuronal model. *Cognitive Neurodynamics*, 19(1), 169, (2025). <https://doi.org/10.1007/s11571-025-10358-3>.

