GÜFBED/*GUSTIJ* (2018) 8 (2): 418-429
DOI: 10.17714/gumusfenbil.397059 Araştırma Makalesi / *Research Article*

LP-Kosimpletik Manifoldunun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldların Geodeziklik Durumları

Geodesic Situations of Contact Pseudo-Slant Submanifolds in a LP-Cosymplectic Manifold

Sibel TORUN[1,a], Süleyman DİRİK*[2,b]
[1]*Amasya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 05100, Amasya*
[2]*Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, 05100, Amasya*

• Geliş tarihi / *Received*: 20.02.2018 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 07.05.2018 • Kabul tarihi / *Accepted*: 15.05.2018

Öz
Bir LP-kosimpletik manifoldunda kontak pseudo-slant altmanifoldların geodeziklik durumları için yeni sonuçlar gösterildi. Bir alt manifoldun kontak pseudo-slant olması için gerek ve yeter şartlar verildi. Kontak pseudo-slant çarpım karakterize edildi ve kontak pseudo-slant altmanifoldun kontak pseudo-slant çarpım olması için gerek ve yeter şartlar verildi. Ayrıca, konuyu açıklamak için hemen hemen parakontak metrik manifold örneği incelendi.

Anahtar kelimeler: LP-Kosimpletik manifold, Kontak pseudo-slant, Total geodezik altmanifold

Abstract
New results are shown for the geodesic situations of contact pseudo-slant submanifolds in a LP-cosymplectic manifold. Necessary and sufficient conditions for a submanifold to be contact pseudo-slant are given. The contact pseudo-slant product is characterized and necessary and sufficient conditions for a contact pseudo-slant submanifold to be the pseudo-slant product is given. Also, an example of a contact pseudo-slant submanifold is investigate in an almost paracontact metric manifold to explain the subject.

Keywords*: LP-Cosymplectic manifold, Contact pseudo-slant submanifold, Totally geodesic submanifold*

*[b] Süleyman DİRİK; slymndirik@gmail.com; Tel: (0507) 235 13 52; orcid.org/0000-0001-9093-1607
[a] orcid.org/0000-0002-4256-9225

1. Giriş ve Literatür Özeti

Slant altmanifoldları Chen (1990) tarafından yapılmış olan çalışmada İnvaryant (holomorfik) ve anti-invaryant(total-reel) altmani-foldların bir genellemesi olarak tanımlandı. Daha sonra, farklı yazarlar farklı manifoldlara uyguladı ve çalışmalar günümüzde özgün bir şekilde devam etti (Chen, 1990). Kompleks manifoldlar üzerinde çalışılan slant altmaifoldları hemen hemen kontak metrik manifoldlara taşıyan Lotta (1996)'dır. Lotta, daha sonra K-Kontak manifoldların 3-boyutlu anti-invaryant(total-reel) olmayan slant altmani-foldların geometrisi ile ilgili çalışma yapmıştır (Lotta, 1998). Takip eden yıllarda, L. Cabrerizo ve arkadaşları bir Sasakian manifoldun slant altmanifoldlarını çalışıp ilginç sonuçlar elde etmişlerdir (Cabrerizo vd., 2000). Daha sonra 2007 yılında Khan ve Khan (2207) Sasakian manifoldunun pseudo-slant altmanifoldlar ile ilgili çalışmayı literatüre kazandırmışlardır (Khan ve Khan., 2007). Referanslarda belirtilen literatüre kazandırılmış pseudo-slant altmanifoldları ile ilgili birçok çalışmaları bulunmaktadır (Dirik vd., 2016; Dirik vd., 2017; Dirik vd., 2018; Atçeken vd., 2013; Atçeken vd., 2014; Atçeken vd., 2017; De ve Sarkar, 2011; Siddesha vd., 2017).

Bu bilgiler ışığında, (φ,ξ,η,g) parakontak metrik yapısıyla verilen $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, n-boyutlu hemen hemen parakontak metrik manifold $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ ve bu manifold üzerinde tanımlanan Levi-civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olmak üzere, $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifoldu eğer her $X,Y\in\Gamma(T\tilde{M})$ için $(\tilde{\nabla}_Y\varphi)X=0$ şartını sağlıyorsa $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen parakontak metrik manifolduna Lorentzian parakosimpletik manifold adı verilir. Ayrıca D_θ-total geodezik, $D^\perp$-total geodezik ve mixed-total geodeziklik kavramları verilip kontak pseudo-slant çarpım kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra hemen hemen parakontak metrik yapısıyla $\mathbb{R}^{11}$ da 4-boyutlu kontak pseudo-slant altmanifold örneği kurulmuştur.

2. Lorentzian Hemen Hemen Parakontak Manifoldlar

Bu bölümde, hemen hemen Lorentzian parakontak manifoldlar tanıtılarak, Lorentzian hemen hemen parakontak manifoldların bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra Lorentzian parakosimpletik manifoldlar tanıtılarak temel özellikleri gösterilmiştir.

$\tilde{M}$ bir n-boyutlu manifold olsun. Eğer $\tilde{M}$-üzerinde φ, (1,1) tipinde bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η da bir $1-$ form olmak üzere

$$\eta(\xi)=-1 \tag{1}$$

$$\varphi^2=I+\eta\otimes\xi \tag{2}$$

şartlarını sağlayan bir (φ,ξ,η) üçlüsü varsa $\tilde{M}$ bir *hemen hemen parakontak manifold* ve (φ,ξ,η) üçlüsüne de $\tilde{M}$ bir *hemen hemen parakontak yapı* denir (Matsumuto, 1989).

$\tilde{M}$ bir (φ,ξ,η) hemen hemen parakontak yapısına sahip n-boyutlu hemen hemen parakontak manifold olsun. Bu durumda

$$\varphi\xi=0 \tag{3}$$

$$\eta\circ\varphi=0, \qquad rank(\varphi)=n-1 \tag{4}$$

dir (Matsumuto, 1989).

$\tilde{M}$, bir (φ,ξ,η) hemen hemen parakontak yapısı ile birlikte n-boyutlu bir hemen hemen parakontak manifold olsun. Eğer $\tilde{M}$ her $X,Y\in\Gamma(T\tilde{M})$ vektör alanları için

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \tag{5}$$

olacak şekilde bir g Lorentzian metriğine sahipse $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ ye bir *Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifold* ve (φ,ξ,η,g) dörtlüsüne de $\tilde{M}$ üzerinde bir *Lorentzian hemen hemen parakontak metrik yapı* denir.

Eğer (5) eşitliğinde Y yerine ξ alınırsa,

$$0=g(\varphi X,\varphi\xi)=g(X,\xi)+\eta(X)\eta(\xi)$$

yazılır. Buradan (1) ve (3) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$g(X,\xi)=\eta(X) \tag{6}$$

elde edilir.

n-boyutlu $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifold olsun. Her

$X,Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için $\varphi : \Gamma(T\tilde{M}) \to \Gamma(T\tilde{M})$ tanımlanmak olmak üzere

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{7}$$

dir. Buradan φ nin g ye göre simetrik olduğu söylenir.

$\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, n-boyutlu Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifold ve bunun bir alt manifoldu M olsun. Eğer $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, hemen hemen Lorentzian parakontak metrik manifoldu üzerinde $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyo-nunu göstermek üzere her $X,Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$(\tilde{\nabla}_Y \varphi)X = 0 \tag{8}$$

şartı sağlanıyorsa $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ ye *Lorentzian parakosimpletik manifold* adı verilir. Bundan sonra Lorentzian parakosimpletik manifold ifadesini kısaca LP-Kosimpletik manifold olarak göstereceğiz. Burada $\tilde{\nabla}$ kovaryant türev oparatörü ve $\Gamma(T\tilde{M})$ de vektör alanları kümesini gösteriyor. Böylece (8) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_X \xi = 0 \tag{9}$$

durumuna dönüşür.

$\tilde{M}$, Riemann manifoldunun altmanifoldu M olmak üzere TM, M altmanifoldunun tanjant demetini ve $T^{\perp}M$ de M altmanifoldunun bütün normal vektörlerin vektör demetini göstersin. Bu durumda, $\tilde{M}$ manifoldunun tanjant demetini $T\tilde{M} = TM \oplus T^{\perp}M$ şeklinde yazabiliriz.

∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve $\tilde{M}$ üzerindeki Riemann konneksiyonlar olsun. Bu durumda, her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X,Y) \to h(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

ile tanımlı h simetrik bilineer forma M nin *ikinci temel formu* denir. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{10}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe de *Gauss formülü* denir. Burada sırasıyla $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$, $\tilde{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal parçalarıdır.

M 'nin normal demetindeki konneksiyon $\nabla^{\perp}$ olmak üzere her $X \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$A : \Gamma(T^{\perp}M) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(V,X) \to A(V,X) = A_V X = \nabla_X^{\perp} V - \tilde{\nabla}_X V$$

ile tanımlanan bilineer dönüşümüne M nin *şekil operatörü* denir.

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^{\perp} V \tag{11}$$

ifadesine de *Weingarten formülü* denir (Chen, 1973).

Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için (10) ve (11) eşitlikleri kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$g(A_V Y, X) = g(h(X,Y),V) \tag{12}$$

elde edilir. Bu son eşitlik M nin ikinci temel formu h ile A_V şekil oparatörü arasındaki bağıntıyı verir (Chen, 1973).

M nin normal demeti $T^{\perp}M$ deki konneksiyonu $\nabla^{\perp}$ ve tanjant demeti TM deki konneksiyonu ∇ olmak üzere (10) ve (11) eşitliklerinden her $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için ikinci temel form h ve şekil operatörü A_V ye ilişkin eşitlik (12) yi göstermiştik. Eğer $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(X,Y) = 0 \tag{13}$$

ise M *total geodezik alt manifold adını alır.*

$\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifold ve bunun bir alt altmanifoldu M olmak üzere $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ deki g Riemann metriği M üzerine indirgenmiş olur. Bu durumda (M,g) de bir Riemann manifoldu olur. Her $X \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$\varphi X = PX + FX \tag{14}$$

ve

$$\varphi V = BV + CV \tag{15}$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada sırasıyla PX ve FX φX in teğet ve normal parçalarını, BV ve CV de φV nin teğet, normal parçalarını göstermektedir. Böylece altmanifold üzerine indirgemiş olduğumuz tensörler

$P:\Gamma(TM)\to\Gamma(TM),\qquad F:\Gamma(TM)\to\Gamma(T^{\perp}M)$

ve

$B:\Gamma(T^{\perp}M)\to\Gamma(TM)\qquad C:\Gamma(T^{\perp}M)\to\Gamma(T^{\perp}M)$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $P=0$ ise M ye anti-invaryant, $F=0$ ise M ye invaryant, altmanifold adı verilir.

Altmanifolda indirgenen bu tensörler arasındaki bağıntılar kullanılarak

$$P^2 = I+\eta\otimes\xi - BF \tag{16}$$

$$FP+CF=0 \tag{17}$$

ve

$$C^2 = I - FB \tag{18}$$

$$PB+BC=0 \tag{19}$$

eşitlikleri vardır.

Her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için, (7) ve (14) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(PX+FX,Y)=g(X,PY+FY)$$

yazılır. Buradan

$$g\left(PX,Y\right)=g\left(X,PY\right) \tag{20}$$

dir. Aynı şekilde $V,W\in\Gamma(T^{\perp}M)$ için (7) eşitliğinden

$$g(\varphi V,W)=g(V,\varphi W)$$

yazılır. Buradan (15) eşitliği kullanılırsa

$$g(BV+CV,W)=g(V,BW+CW)$$

elde edilir. Buradan

$$g(V,CW)=g(CV,W) \tag{21}$$

dir. Bunlar da bize P ve C nin simetrik tensör alanları olduğunu gösterir. Aynı biçimde her $X\in\Gamma(TM)$ ve $V\in\Gamma(T^{\perp}M)$ için (7) eşitliğinden

$$g(\varphi X,V)=g(X,\varphi V)$$

yazılır.
Böylece (14) ve (15) eşitlikleri kullanılırsa,

$$g(PX+FX,V)=g(X,BV+CV)$$

denkleminden gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$g(FX,V)=g(X,BV) \tag{22}$$

eşitliği vardır. Bu da bize F ve B arasındaki ilişkiyi verir.

Ayrıca, $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldu üzerinde $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu göstermek üzere her $X,Y\in\Gamma(T\tilde{M})$ için φ tensörünün kovaryant türevi

$$(\tilde{\nabla}_Y\varphi)X=\tilde{\nabla}_Y\varphi X-\varphi\tilde{\nabla}_Y X \tag{23}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada altmanifolda indirgenen tensörlerin kovaryant türevleri de her $X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $V\in\Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$(\nabla_Y P)X=\nabla_Y PX-P\nabla_Y X \tag{24}$$

$$(\nabla_Y F)X=\nabla^{\perp}_Y FX-F\nabla_Y X \tag{25}$$

$$(\nabla_Y B)V=\nabla_Y BV-B\nabla^{\perp}_Y V \tag{26}$$

$$(\nabla_Y C)V=\nabla^{\perp}_Y CV-C\nabla^{\perp}_Y V \tag{27}$$

şeklinde tanımlanırlar (Pandey ve Gupta, 2008).

$\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimpletik manifoldunun bir alt manifoldu M olsun. Her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için $(\tilde{\nabla}_X\varphi)Y$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\nabla_Y P)X=A_{FX}Y+Bh(X,Y) \tag{28}$$

$$(\nabla_Y F)X=Ch(X,Y)-h(Y,PX) \tag{29}$$

dir.

Benzer olarak her $X\in\Gamma(TM)$ ve $V\in\Gamma(T^{\perp}M)$ için $(\tilde{\nabla}_X\varphi)V$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\nabla_X B)V = A_{CV}X - PA_V X \quad (30)$$
$$(\nabla_X C)V = -h(BV, X) - FA_V X \quad (31)$$
olur.

$\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimpletik manifoldunun bir alt manifoldu M olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için (9) ve (10) denklemleri kullanılırsa,

$$\nabla_X \xi = 0 \quad (32)$$
$$h(X,\xi) = 0 \quad (33)$$
$$A_V \xi = 0 \quad (34)$$
elde edilir.

Tanım 2.1. (Lotta, 1996) $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldunun bir alt manifoldu M ve $p \in M$ için ξ_p ile lineer bağımsız sıfırdan farklı bir vektör X olsun. $T_M(p)$ ile φX arasındaki açıya *slant açısı* denir. Bu açıyı $\theta(p)$ ile gösterelim. $\forall p \in M$ noktası ve her $X \in T_M(p) - \{\xi_P\}$ için $\theta(p)$ slant açısı sabitse M ye $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$'nin *slant alt manifoldu* denir. Ayrıca $\theta(p) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dir.

Buna göre bir Lorentzian hemen hemen parakontak metrik manifoldunun

i) Anti-invaryant altmanifoldları özel olarak $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant açılı slant altmanifoldlardır.

ii) İnvaryant altmanifoldları ise $\theta = 0$ slant açılı slant altmanifoldlardır.

Bir slant altmanifold ne anti-invaryant nede invaryant altmanifold değilse *proper slant altmanifold* olarak adlandırılır.

Teorem 2.2. (Cabrerizo vd., 2000a) Bir $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-Kosimpletik manifoldunun, ξ ye teğet altmanifoldu M olsun. Bu durumda M slant altmanifolddur gerek ve yeter şart

$$P^2 = \lambda(I + \eta \otimes \xi) \quad (35)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1]$ sabitinin olmasıdır.

Bu durumda, M θ slant açısına sahip ve $\lambda = \cos^2\theta$ dir.

Sonuç 2.3. (Cabrerizovd., 2000a) $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, bir LP-kosimpletik manifoldunun θ slant açılı bir alt manifoldu M olmak üzere, her $X, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g(PX,PZ) = \cos^2\theta\{g(X,Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \quad (36)$$
ve
$$g(FX,FZ) = \sin^2\theta\{g(X,Z) + \eta(X)\eta(Z)\} \quad (37)$$

sonucuna ulaşılır.

3. LP-Kosimpletik Manifoldun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldlarının Geodeziklik Durumları

Bu bölümde, LP-kosimpletik manifoldunun, kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerekli ve yeterli şartlar verilmiştir. Ayrıca, D_θ-total geodezik, $D^{\perp}$-total geodezik ve mixed total geodeziklik kavramları ile kontak pseudo-slant çarpım kavramı verilmiştir. Daha sonra hemen hemen kontak metrik yapısıyla $\mathbb{R}^{11}$ da 4-boyutlu kontak pseudo-slant altmanifold örneği kurulmuştur.

Tanım 3.1. (Khan ve Khan., 2007) $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimpletik manifoldun alt manifoldu M olsun. Bu durumda

i) $TM = D^{\perp} \oplus D_\theta$, $\xi \in \Gamma(D_\theta)$ (38)

ii) $D^{\perp}$ distribüsyonu, anti-invaryant (total reel) distribüsyon yani,

$\varphi D^{\perp} \subset (T^{\perp}M)$

iii) $M -$ üzerinde D_θ, $\theta -$ slant açılı slant distribüsyon

şartlarını sağlayan iki ortagonal distribüsyon $D^{\perp}$, D_θ varsa M ye $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin *kontak pseudo-slant altmanifoldu* denir.

Bu tanıma göre eğer, $\theta = 0$ ise kontak pseudo-slant alt manifoldu *semi-invaryant altmanifoldu* adını alır. Böylece kontak pseudo-slant alt manifold semi-invaryant altmanifoldların bir genellemesidir. Diğer taraftan eğer, $boy(D^{\perp}) = d_1$

ve $boy(D_\theta) = d_2$ ile gösterilirse aşağıdaki koşullar elde edilir.

i) Eğer $d_2 = 0$ ise M, bir anti-invaryant altmanifolddur.
ii) Eğer $d_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M, bir invaryant altmanifolddur.
iii) Eğer $d_1 = 0$ ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise M, bir proper-slant altmanifolddur.
iv) Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise, M, bir anti-invaryant altmanifolddur.
v) Eğer $d_2 d_1 \neq 0$ ve $\theta = 0$ ise M, bir semi-invaryant altmanifolddur.
vi) Eğer $d_2 d_1 \neq 0$ ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise M,bir proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

Bir LP-kosimpletik manifoldu $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun.

$$\omega_1 : \Gamma(TM) \to \Gamma(D^\perp) \ , \ \ \omega_2 : \Gamma(TM) \to \Gamma(D_\theta)$$

ortogonal projeksiyonları göstersinler. Her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = \omega_1 X + \omega_2 X + \eta(X)\xi \tag{39}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer μ, $\varphi(TM)$ nin $T^\perp M$ deki ortogonal tümleyeni olmak üzere $\tilde{M}$ LP-kosimpletik manifoldun bir kontak pseudo-slant alt manifoldu M nin $T^\perp M$ -normal uzayını, $\varphi(D^\perp) \perp F(D_\theta)$ olduğundan,

$$T^\perp M = \varphi(D^\perp) \oplus F(D_\theta) \oplus \mu \tag{40}$$

şeklinde ifade edebilir.

Teorem 3.2. $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, LP-kosimpletik manifoldunun, kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda

i) Her bir $X \in \Gamma(D_\theta)$ için

$$P^2 X = \lambda(X + \eta(X)\xi), \tag{41}$$

ii) D_θ ya ortogonal her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$PX = 0 \tag{42}$$

şartları sağlanır. Burada $\lambda = \cos^2\theta$ dır.

İspat: i) Teorem 2.2 ve Tanım 3.1 den her $X \in \Gamma(D_\theta)$ için $D_\theta \subset TM$ olduğundan $\varphi X = PX$ yazılır. Buradan (41) açıktır.

ii) Tanım 3.1 ve Teorem 2.2 den $TM = D_\theta \oplus D^\perp$ olduğundan D_θ ya ortogonal olan $\forall X \in D^\perp$ için. $\varphi X = FX$ yazılır. Böylece (42) ifadesi açıktır.
Şimdi, her $Y, Z \in \Gamma(D^\perp)$, $W \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned}
g(A_{FZ}Y - A_{FY}Z, W) &= g(A_{FZ}Y, W) - g(A_{FY}Z, W) \\
&= g(h(Y,W), FZ) - g(h(Z,W), FY) \\
&= g(h(Y,W), FZ) - g(\tilde{\nabla}_W Z, \varphi Y) \\
&= g(h(Y,W), FZ) - g(\varphi\tilde{\nabla}_W Z, Y) \\
&= g(h(Y,W), FZ) - g(\tilde{\nabla}_U \varphi Z, Y) \\
&= g(h(Y,W), FZ) + g(\tilde{\nabla}_W Y, \varphi Z) \\
&= g(h(Y,W), FZ) + g(\tilde{\nabla}_W Y, FZ) \\
&= 2g(h(Y,W), FZ) = 2g(A_{FZ}Y, W)
\end{aligned}$$

dir. Buradan da birinci terimlerin eşitliğinden

$$A_{FZ}Y = -A_{FY}Z \tag{43}$$

yazılır.

Teorem 3.3. $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, LP-kosimpletik manifoldunun, kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D^\perp$ nın integrallenebilmesi için gerek ve yeter şartlardan biri her $Y, Z \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$A_{FD^\perp} D^\perp = 0 \tag{44}$$

dir.

İspat: Her $Y, Z \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$\tilde{\nabla}_Z \varphi Y = \varphi \tilde{\nabla}_Z Y$$

denkleminde (10) ve (11)eşitlikleri kullanılırsa,

$$-A_{FY}Z + \nabla^\perp_Z FY = \varphi(\nabla_Z Y) + \varphi h(Z,Y) \tag{45}$$

yazılır. (45) eşitliğinde (14) ve (15) denklemleri kullanılırsa,

$$-A_{FY}Z + \nabla^\perp_Z FY = P\nabla_Z Y + F\nabla_Z Y + Bh(Z,Y) + C(Z,Y) \tag{46}$$

olur. (46) denkleminin teğet bileşenlerinden

$$-A_{FY}Z = P\nabla_Z Y + Bh(Z,Y) \qquad (47)$$

yazılır.

Bu denklemde Y ile Z in yer değiştirmesiyle

$$-A_{FZ}Y = P\nabla_Y Z + Bh(Y,Z) \qquad (48)$$

denklemi elde edilir. Buradan (48) eşitlinden (47) eşitliği çıkartılırsa,

$$P\nabla_Y Z - P\nabla_Y Z = A_{FZ}Y - A_{FY}Z \qquad (49)$$

olur. Buradan

$$P[Y,Z] = A_{FZ}Y - A_{FY}Z \qquad (50)$$

elde edilir. (43) ve (50) denklemlerinden $P[Y,Z] = 2A_{FZ}Y$ sonucuna ulaşılır. Buradan her $Y,Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$P[Y,Z] = 0$$

dir. Bu son ifade teoremi ispatlar.

Teorem 3.4. $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, bir LP-kosimpletik manifoldun pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu halde slant distribüsyon D_θ nın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri,

$$\omega_1\{\nabla_X PY - P\nabla_Y X - A_{FY}X - Bh(X,Y)\} = 0 \qquad (51)$$

olmasıdır.

İspat: Her $X,Y \in \Gamma(D_\theta)$ için (8) eşitliğinden

$$\tilde{\nabla}_X \varphi Y - \varphi\tilde{\nabla}_X Y = 0$$

yazılır. Buradan (10) ve (14) eşitliklerinden

$$\tilde{\nabla}_X PY + \tilde{\nabla}_X FY - \varphi(\nabla_X Y + h(X,Y)) = 0 \qquad (52)$$

elde edilir. (52) denkleminde (10) ve (11) eşitlikleri kullanılarak

$$\nabla_X PY + h(X,PY) - A_{FY}X + \nabla^{\perp}_X FY - \varphi(\nabla_X Y) - \varphi h(X,Y) = 0$$

olduğu görülür. Böylece (14) ve (15) denklemlerinden

$$\begin{aligned}&\nabla_X PY + h(X,PY) - A_{FY}X + \nabla^{\perp}_X FY - P\nabla_X Y - F\nabla_X Y -\\ &Bh(X,Y) - Ch(X,Y) = 0\end{aligned} \qquad (53)$$

dir. Bu durumda (53) denkleminin teğet bileşenleri

$$\nabla_X PY - A_{FY}X - P\nabla_X Y - Bh(X,Y) = 0 \qquad (54)$$

yazılır. Bu denkleme $P\nabla_Y X$ ekleyip çıkarırsak,

$$\nabla_X PY - A_{FY}X - P\nabla_X Y + P\nabla_Y X - P\nabla_Y X - Bh(X,Y) = 0$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$P\nabla_X Y - P\nabla_Y X = \nabla_X PY - P\nabla_Y X - A_{FY}X - Bh(X,Y)$$

olur. Böylece

$$P[X,Y] = \nabla_X PY - P\nabla_Y X - A_{FY}X - Bh(X,Y) \qquad (55)$$

denklemi yazılır. (55) denklemine ω_1 uygulanırsa,

$$\omega_1\{\nabla_X PY - P\nabla_Y X - A_{FY}X - Bh(X,Y)\} = 0$$

olduğu görülür.

Tanım 3.5. (Chen, 1990) $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimpletik manifoldunun, kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman,

i) Her $X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için $h(X,Y) = 0$ ise M ye $D^{\perp}$ *-total geodezik,*
ii) Her $X,Y \in \Gamma(D_\theta)$ için $h(X,Y) = 0$ ise M ye D_θ *-total geodezik,*
iii) Her $X \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için $h(X,Y) = 0$ ise M ye *mixed-total geodezik altmanifold* denir.

Teorem 3.6. $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimpletik manifoldunun, proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda, M anti-invaryant veya mixed-total geodezik altmanifolddur.

İspat: Her $X \in \Gamma(D_\theta)$, $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için, (12) denklemine (10) eşitliği uygulanırsa,

$$g(A_V X,Y) = g(\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,V) = g(\tilde{\nabla}_X Y,V) = -g(\tilde{\nabla}_X V,Y)$$

denklemi elde edilir. Buradan (5) eşitliği kullanılırsa,

$$g(A_V X,Y) = -g(\varphi\tilde{\nabla}_X V,\varphi Y) \tag{56}$$

olduğu görülür. (56) denkleminde (23) eşitliği kullanılırsa

$$g(A_V X,Y) = g((\tilde{\nabla}_X \varphi)V - \tilde{\nabla}_X \varphi V,\varphi Y)$$

olur. Böylece (9) eşitliğinden

$$g(A_V X,Y) = -g(\tilde{\nabla}_X \varphi V,\varphi Y)$$

yazılır. Buradan

$$g(A_V X,Y) = -g(\tilde{\nabla}_X \varphi V,FY) \tag{57}$$

elde edilir. Şimdi (57) denkleminde (15) eşitliği kullanılırsa

$$g(A_V X,Y) = -g(\tilde{\nabla}_X BV + \tilde{\nabla}_X CV,FY)$$

şekline dönüşür. Burada (10) ve (11) eşitlikleri uygulanırsa

$$g(A_V X,Y) = -g(\nabla_X BV + h(X,BV),FY) - g(-A_{CV} X + \nabla_X^{\perp} CV,FY)$$

olur. Böylece gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(A_V X,Y) = -g(h(X,BV),FY) - g(\nabla_X^{\perp} CV,FY) \tag{58}$$

olduğu görülür. O halde (58) denkleminde (27) eşitliği kullanılırsa,

$$g(A_V X,Y) = -g(h(X,BV),FY) - g((\nabla_X C)V + C\nabla_X^{\perp} V,FY)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem (31) den gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\begin{aligned} g(A_V X,Y) &= -g(h(X,BV),FY) - g(-h(X,BV) - FA_V X,FY) \\ &= -g(h(X,BV),FY) + g(h(X,BV),FY) + g(FA_V X,FY) \\ &= g(FA_V X,FY) \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Buradan

$$g(A_V X,Y) = g(BFA_V X,Y) \tag{59}$$

dir. O halde (59) denklemine (16) eşitliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} g(A_V X,Y) &= g(A_V X + \eta(A_V X)\xi - P^2 A_V X,Y) \\ &= g(A_V X,Y) + \eta(A_V X)\eta(Y) - g(P^2 A_V X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(P^2 A_V X,Y) = 0$$

elde edilir. Bu denkleme (35) eşitliği uygulanırsa

$$\cos^2\theta g(A_V X + \eta(A_V X)\xi,Y) = 0$$

dir. Buradan da

$$\cos^2\theta g(A_V X,Y) = \cos^2\theta g(h(X,Y),V) = 0 \tag{60}$$

şekline dönüşür. Böylece (60) eşitliğinde $\cos^2\theta = 0$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ olur. Bu durum M nin anti-invaryant olduğunu gösterir. Ayrıca, (60) eşitliğinde

$$g(h(X,Y),V) = 0 \text{ ise } h(X,Y) = 0$$

olur. Buradan da M nin mixed-total geodezik olduğu görülür.

Teorem 3.7. $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimpletik manifoldunun, proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda, M anti-invaryant veya $D^{\perp}$ total-geodezik altmanifolddur.

İspat: Her $Z,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(T^{\perp}M)$ olmak üzere, (12) eşitliğine (11) eşitliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} g(h(Y,Z),V) &= g(\tilde{\nabla}_Y Z - \nabla_Y Z,V) = g(\tilde{\nabla}_Y Z,V) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_Y V,Z) \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme (5) eşitliği,

$$g(h(Y,Z),V) = -g(\varphi\tilde{\nabla}_Y V,\varphi Z)$$

olduğu görülür. Burada (23) eşitliğinden, denklem

$$g(h(Y,Z),V) = g((\tilde{\nabla}_Y \varphi)V - \tilde{\nabla}_Y \varphi V,\varphi Z)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece (8) eşitliğinden

$$g(h(Y,Z),V) = -g(\tilde{\nabla}_Y \varphi V,\varphi Z) \tag{61}$$

denklemi elde edilir. $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğundan, (61) denklemi

$$g(h(Y,Z),V) = -g(\tilde{\nabla}_Y \varphi V,FZ)$$

dir. Bu denklemde (15) eşitliği kullanılırsa

$$g(h(Y,Z),V) = -g(\tilde{\nabla}_Y BV + \tilde{\nabla}_Y CV,FZ)$$

olur. Burada (10) ve (11) eşitliklerinden

$$g(h(Y,Z),V) = -g(\nabla_Y BV + h(Y,BV), FZ) -$$
$$g(-A_{CV}V + \nabla_Y^{\perp} CV, FZ)$$
$$= -g(h(Y,BV), FZ) - g(\nabla_Y^{\perp} CV, FZ)$$

yazılır. Buradan (27) ve (31) denklemleri kullanılırsa

$$g(h(Y,Z),V) = -g(h(Y,BV), FZ) -$$
$$g((\nabla_Y C)V + C\nabla_Y^{\perp} V, FZ)$$
$$= -g(h(Y,BV), FZ) - g(h(BV,Y) - FA_V Y, FZ)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(h(Y,Z),V) = -g(h(Y,BV), FZ) + g(h(BV,Y), FZ)$$
$$+ g(FA_V Y, FZ) = g(FA_V Y, FZ)$$

olur. Böylece

$$g(h(Y,Z),V) = g(BFA_V Y, Z) \quad (62)$$

şeklinde yazılır. O halde (62) denkleminde (16) eşitliği kullanılırsa

$$g(h(Y,Z),V) = g(A_V Y + \eta(A_V Y)\xi - P^2 A_V Y, Z)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemelerle

$$g(h(Y,Z),V) = g(A_V Y, Z) + g(P^2 A_V Y, Z)$$

dir. Şimdi bu denkleme (12) eşitliği uygulanırsa

$$g(P^2 A_V Y, Z) = 0 \quad (63)$$

elde edilir. Böylece (63)'te (35) eşitliği kullanılırsa

$$\cos^2\theta g(A_V Y + \eta(A_V Y)\xi, Z) = 0$$

denklemi oluşur. Buradan da

$$\cos^2\theta g(A_V Y, Z) = \cos^2\theta g(h(Y,Z),V) = 0 \quad (64)$$

şekline dönüşür. (64) denkleminde $\cos^2\theta = 0$ ise $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ olur. Bu durum M nin anti-invaryant olduğunu gösterir. Ayrıca, (64) eşitliğinde

$g(h(Y,Z),V) = 0$ ise $h(Y,Z) = 0$

olur. Buradan da M nin $D^{\perp}$ -total geodezik altmanifold olduğu görülür.

Tanım 3.8. $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimpletik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer M nin D_θ ve $D^{\perp}$ distribüsyonları M de total geodezik iseler M ye *kontak pseudo-slant çarpım* denir (Chen, 1990).

Her $X,Y \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için, (6), (10), (11), (22), (29) ve (39) eşitlikleri kullanılarak,

$$g(\nabla_Y X, Z) = g(\varphi\tilde{\nabla}_Y X, \varphi Z)$$
$$= g(\tilde{\nabla}_Y \varphi X, \varphi Z) = g(\tilde{\nabla}_Y \varphi X, FZ)$$
$$= g(h(Y,PX), FZ) + g((\nabla_Y F)X + F\nabla_Y X, FZ)$$
$$= g(h(Y,PX), FZ) + g(Ch(Y,X), FZ)$$
$$-g(h(Y,PX), FZ) + g(F\nabla_Y X, FZ)$$
$$= g(F\nabla_Y X, FZ) = g(BF\nabla_Y X, Z)$$

elde edilir. Buradan,

$$g(\nabla_Y X, Z) = g(\nabla_Y X + \eta(\nabla_Y X)\xi - P^2\nabla_Y X, Z) \quad (65)$$

olur. Böylece (65) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa ,

$$-g(P^2\nabla_Y X, Z) = -\cos^2\theta g(\nabla_Y X + \eta(\nabla_Y X)\xi, Z)$$

bulunur. Buradan da

$$-g(P^2\nabla_Y X, Z) = -\cos^2\theta g(\nabla_Y X, Z) = 0 \quad (66)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $Z,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $X \in \Gamma(D_\theta)$ olmak üzere,

$$g(\nabla_Y Z, X) = -g(\tilde{\nabla}_Y X, Z) = -g(\varphi\tilde{\nabla}_Y X, \varphi Z)$$
$$= -g(\tilde{\nabla}_Y \varphi X, \varphi Z) = -g(\tilde{\nabla}_Y \varphi X, FZ)$$
$$= -g(h(PX,Y), FZ) - g(\nabla_Y^{\perp} FX, FZ)$$
$$= -g(h(PX,Y), FZ) - g((\nabla_Y F)X + F\nabla_Y X, FZ)$$
$$= -g(h(PX,Y), FZ) - g(Ch(X,Y), FZ)$$
$$+ g(h(Y,PX), FZ) - g(F\nabla_Y X, FZ)$$
$$= -(BF\nabla_Y X, Z)$$
$$= -g(-\nabla_Y X - \eta(\nabla_Y X)\xi + P^2\nabla_Y X, Z)$$

elde edilir. Böylece

$$g(\nabla_Y Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) - g(P^2\nabla_Y X, Z) \quad (67)$$

olur. (67) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\cos^2\theta g(\nabla_Y X+\eta(\nabla_Y X)\xi, Z)=-\cos^2\theta g(\nabla_Y X, Z)=0$$

dir. Buradan

$$\cos^2\theta g(\nabla_Y X, Z)=0 \qquad (68)$$

olur.

Bu durumda (66) ve (68) eşitliklerinden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.9. Her $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, LP-kosimpletik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M, kontak pseudo-slant çarpımdır.

Teorem 3.10. $\tilde{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimpletik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer F tensörü, D_θ slant distribüsyon üzerinde paralel ise M, $D_\theta-$geodeziktir ya da h, D_θ üzerinde $\cos^2\theta$ karakteristik değeri ile C^2 nin bir karakteristik vektörüne sahiptir.

İspat: F tensörü D_θ slant distribüsyon üzerinde paralel ise her $X,Y\in\Gamma(D_\theta)$ için $(\nabla_X F)Y=0$ dir. (29) eşitliğinden

$$Ch(X,Y)-h(X,PY)=0$$

dir. Burada bu denklemde Y yerine $Y-\eta(Y)\xi\in\Gamma(D_\theta)$ alınırsa,

$$Ch(X,Y+\eta(Y)\xi)-h(X,P(Y+\eta(Y)\xi))=0$$

elde edilir. Böylece,

$$Ch(X,Y+\eta(Y)\xi)=h(X,PY)$$

yazılır. Şimdi bu denkleme C uygulanırsa

$$C^2h(X,Y+\eta(Y)\xi)=Ch(X,PY) \qquad (69)$$

olur. O halde (69) eşitliğinde Y yerine PY alınırsa

$$Ch(X,PY)=h(X,P^2Y) \qquad (70)$$

denklemine dönüşür. Böylece (69) ve (70) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} C^2h(X,Y+\eta(Y)\xi)&=Ch(X,PY)=h(X,P^2Y)\\ &=\cos^2\theta h\left(X,Y+\eta\left(Y\right)\xi\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada ya $h=0$ dir. Bu da M nin $D_\theta-$ geodezik ya da h, $\cos^2\theta$ karakteristik değerli C^2 nin bir karakteristik vektörüdür.

Örnek 3.11. M, $\mathbb{R}^{11}$ de

$$\begin{aligned}\chi(u,v,w,t)=(&v\cos u, w\cos u, v+w, -w\cos u,\\ &-v\cos u, v\sin u, w\sin u, v+w, w\sin u, v\sin u, t)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan altmanifoldu olsun. M nin tanjant demeti

$$\begin{aligned}E_1=&-v\sin u\frac{\partial}{\partial x_1}-w\sin u\frac{\partial}{\partial x_2}+w\sin u\frac{\partial}{\partial x_4}+v\sin u\frac{\partial}{\partial x_5}\\ &+v\cos u\frac{\partial}{\partial y_1}+w\cos u\frac{\partial}{\partial y_2}+w\cos u\frac{\partial}{\partial y_4}+v\cos u\frac{\partial}{\partial y_5}\end{aligned}$$

$$E_2=\cos u\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}-\cos u\frac{\partial}{\partial x_5}+\sin u\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_3}+\sin u\frac{\partial}{\partial y_5}$$

$$E_3=\cos u\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}-\cos u\frac{\partial}{\partial x_4}+\sin u\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}+\sin u\frac{\partial}{\partial y_4}$$

ve

$$E_4=\frac{\partial}{\partial t}$$

yukarıda verilen tanjant vektörleri tarafından oluşturduğu kolayca görülebilir. $\mathbb{R}^{11}$ in koordinat sistemi

$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,z)$ şeklinde seçilirse, $\mathbb{R}^{11}$ in φ hemen hemen kontak yapısını

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{5}\left\{X_i\frac{\partial}{\partial x_i}+Y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}+Z\frac{\partial}{\partial z}\right)=\sum_{i=1}^{5}\left(Y_i\frac{\partial}{\partial x_i}+X_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

$$\xi=\frac{\partial}{\partial z},\qquad \eta=dz,\qquad g=\eta\otimes\eta+\sum_{i=1}^{5}(dx_i^2+dy_i^2)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda

$$W=\mu_i\frac{\partial}{\partial x_i}+v_i\frac{\partial}{\partial y_i}+\lambda\frac{\partial}{\partial z}\in T(\mathbb{R}^{11})$$

olmak üzere

$$\varphi W=\mu_i\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i})+v_i\varphi(\frac{\partial}{\partial y_i})+\lambda\varphi(\frac{\partial}{\partial z})=\mu_i\frac{\partial}{\partial y_i}+v_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$g(\varphi W,\varphi W)=\mu_i^2+v_i^2,\qquad g(W,W)=\mu_i^2+v_i^2-\lambda^2,$$
$$\eta(W)=g(W,\xi)=\lambda,\qquad \eta(\xi)=-1$$

olur.

Bu durumda

$$\varphi^2 W=\mu_i\frac{\partial}{\partial x_i}+v_i\frac{\partial}{\partial y_i}=U+\eta(U)\xi,$$

$$g(\varphi W,\varphi W)=g(W,W)+\eta^2(W)$$

artları sağlanmış olur.

Böylece (φ,ξ,η,g), $\mathbb{R}^{11}$in hemen hemen para kontak metrik yapısıdır. Yukarıdaki baz vektörüne φ uygulanırsa,

$$\varphi E_1=-v\sin u\frac{\partial}{\partial y_1}-w\sin u\frac{\partial}{\partial y_2}+w\sin u\frac{\partial}{\partial y_4}+v\sin u\frac{\partial}{\partial y_5}$$
$$+v\cos u\frac{\partial}{\partial x_1}+w\cos u\frac{\partial}{\partial x_2}+w\cos u\frac{\partial}{\partial x_4}+v\cos u\frac{\partial}{\partial x_5}$$

$$\varphi E_2=\cos u\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{\partial}{\partial y_3}-\cos u\frac{\partial}{\partial y_5}+\sin u\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}+\sin u\frac{\partial}{\partial x_5}$$

$$\varphi E_3=\cos u\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{\partial}{\partial y_3}-\cos u\frac{\partial}{\partial y_4}+\sin u\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}+\sin u\frac{\partial}{\partial x_4}$$

olduğu görülür.

Buradan da gerekli işlemler yapılırsa,

$$\cos\theta=\frac{g(\varphi E_2,E_2)}{\|\varphi E_2\|\|E\|}=\frac{g(\varphi E_3,E_3)}{\|\varphi E_3\|\|E_3\|}=\frac{g(\varphi E_3,e_2)}{\|\varphi E_3\|\|E_2\|}$$
$$=\frac{g(\varphi E_2,E_3)}{\|\varphi E_2\|\|E_3\|}=\frac{1}{2},\theta=60^\circ$$

sonucuna ulaşırız. Bu sonuç yorumlanırsa $D_\theta=span\{E_2,E_3\}$ slant açısına sahip bir slant distribüsyondur diyebiliriz. Diğer taraftan $i=2,3,4$ için $g(\varphi E_1,E_i)=0$ olduğundan E_1,E_4 vektörleri M ye ortogonaldir. Böylece $D^\perp=span\{E_1,E_4\}$ total reel (anti-invaryant) distribüsyondur. Bu halde $M,\mathbb{R}^{11}$ de hemen hemen parakontak metrik yapısıyla 4-boyutlu proper kontak pseudo-slant altmanifoldu olur.

Kaynaklar

Atçeken, M., ve Dirik, S., 2014. On the geometry of pseudo-slant submanifolds of a Kenmotsu manifold, Gulf Joural of Mathematics, 2, 51-66.

Atçeken, M., ve Hui, S. K., 2013. Slant and pseudo-slant submanifolds in $(LCS)_n$-manifolds, Czechoslovak Mathematical Journal, 63, 138, 177-190.

Atçeken, M., Yıldırım, Ü. ve Dirik, S., 2017. Sub-Manifolds of a Riemannian Manifold, Manifolds: Current Research Areas, Prof. Paul Bracken, InTech, DOI: 10.5772/65948.,2017.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. ve Fernandez, M., 2000. Slant submanifolds in Sasakian manifolds, Glasgow Mathhematical Journal, 42, 125-138.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. ve Fernandez, M., 2000. Structure on a Slant Submanifolds of a contact manifold, Indian Journal Pure and Applied Mathematics, 31, 7, 857-864.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. ve Fernandez, M., 1999. Slant submanifolds in Sasakian manifolds, Geomeatriae Dedicata., 78, 183-199.

Chen, B. Y., 1990. Geometry of slant submanifolds: Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium. View at Zentralblatt Mathematics.

Chen, B. Y., 1990. Slant immersions, Bulletin Australian Mathematical Society, 41, 135-147.

Chen, B. Y., 1973. Geometry of submanifolds, Pure ve Applied Mathematics, No.22., Marcel Dekker, Inc., New York.

Chen, B. Y., 1990. Geometry of slant submanifolds, Katholieke Universiteit Leuven.

Dirik, S. ve Atçeken, M., 2013. Pseudo-slant submanifolds of a nearly Cosymplectic manifold, Turkish Journal of Mathematics & Computer Science, ID 20140035, pp:14.

Dirik, S., 2014. Pseudo-Slant Altmanifoldların Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat, 1-122.

Dirik, S. ve Atçeken, M., 2016. Pseudo-slant submanifold in Cosymplectic space forms, Acta Universitatis Sapientiae Mathematica, 8, 1, 53-74.

Dirik, S. ve Atçeken, M., 2016. On the geometry of pseudo-slant submanifolds of a Cosymplectic manifold, International Electronic Journal of Geometry, 9, 1, 45-56.

Dirik, S., Atçeken, M. ve Yıldırım, Ü., 2018. On the geometry of contact pseudo-slant submanifolds in $(LCS)_n$- manifold, International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 57, 2, 96-109.

Dirik, S., Atçeken, M. ve Yıldırım, Ü., 2017. Contact pseudo-slant submanifolds of a normal paracontact metric manifold, International Journal of Applied Mathematics and Statistics, 56, 3, 33-41.

De, U.C. ve Sarkar, A., 2011. On pseudo-slant submanifolds of Trans Sasakian manifold, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 60, 1, 1-11.

Khan, V. A. ve Khan, M. A., 2007. Pseudo-slant submanifolds of a Sasakian manifold, Indian Journal Prue Applied Mathematics, 38, 1, 31-42.

Lotta, A., 1996. Slant submanifolds in contact geometry, Bulletin Mathematical Society Roumanie, 39, 183-198.

Lotta, A., 1998. Three-dimensional slant submanifolds of k-contact manifolds, Balkan of Journal Geometry and its Applications, 3, 1, 37-51.

Matsumuto, K., 1989. On Loretzian paracontact manifolds, Bull. of Yamagata Univ. Nat. Sci., 12, 151-156.

Matsumuto, K., Mihai, I. ve Rosca, R., 1995. ξ-Null geodesic gradient vector fields ona Lorentzian para-Sasakian manifold, Journal of the Korean Mathematical Society, 32, 1, 17-31.

Pandey, P.K. ve Gupta, R. S., 2008. Characterization of a slant submanifold of a Kenmotsu manifold, Novi Sad Journal Mathematics, 38, 1, 97-102.

Siddesha, M.S., Begawadi, C.S, Nirmala, D. ve Srikantha, N., 2017. On the geometry of pseudo-slant submanifolds of LP-cosymplectic manifold, International Journal of Mathematics and its Applications, 5 ,4, 81-87.