

### 3- Boyutlu Öklid Uzayında 3-Tipinde Bishop Çatısına Göre Regle Yüzeyler

Anıl Altınkaya 

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

#### Öne Çıkanlar

- 3-tipinde Bishop çerçevesine dayalı yeni bir regle yüzey formülasyonu tanıtılmıştır.
- Regle yüzeyin açılabilirliği, minimal, jeodezik, eğrilik ve asimptotik çizgileri için koşullar verildi.
- Bishop çerçevesi, klasik geometriyi farklı yüzeylere yayarak Frenet çerçevesine güçlü bir alternatif sağlar.

#### Makale Bilgileri

Geliş: 11/08/2025

Kabul: 05/11/2025

#### Anahtar Kelimeler

Regle Yüzey,  
3-Tipinde Bishop Çatısı,  
Öklidyen Uzay

#### Öz

*Bu çalışmada, ilk olarak, Öklid uzayında 3-tipinde Bishop çatısına göre regle yüzeyler tanımlanmıştır. Daha sonra bu yüzeylerin singülerliği, açılabilirliği ve striksiyon eğrileri elde edilmiştir. Sonrasında bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edildikten sonra minimal olma durumları incelenmiştir. Son olarak da, yüzeylerin dayanak eğrisinin 3-tipinde Bishop çatısına göre jeodezik eğri, asimptotik eğri ve eğrilik çizgisi olma durumları incelenmiş ve bulunan sonuçlar bir örnekle desteklenerek yüzey çizimleri MATLAB programı ile yapılmıştır.*

### Ruled Surfaces with respect to Type-3 Bishop Frame in Euclidean 3-Space

#### Highlights

- A new ruled surface formulation based on the 3-type Bishop frame is introduced.
- Conditions for developable, minimal, geodesic, curvature and asymptotic lines of a ruled surface are given.
- The Bishop frame extends classical geometry to surfaces and gives a strong alternative to Frenet.

#### Article Info

Received: 11/08/2025

Accepted: 05/11/2025

#### Keywords

Ruled Surface,  
Type-3 Bishop Frame,  
Euclidean Space

#### Abstract

*In this study, ruled surfaces were first defined with respect to the Bishop frame of type-3 in Euclidean space. Then, the singularities, developability, and striction curves of these surfaces were obtained. Afterward, the Gaussian and mean curvatures of the surfaces were computed, and the conditions for the surfaces to be minimal were investigated. Finally, the cases in which the base curve of the surfaces is a geodesic, an asymptotic curve, or a line of curvature with respect to the Bishop frame of type-3 were examined. The obtained results were supported by an example, and the surface plots were generated using MATLAB.*

## 1. GİRİŞ

Öklid uzayındaki eğrilerin diferansiyel geometrisi, teorik fizikten bilgisayar grafiklerine ve mühendislik tasarımına kadar uzanan uygulamalarıyla matematikte klasik ve temel bir konudur. Özünde, bu alan, düzgün eğrilerin yerel ve küresel geometrik özellikleriyle, özellikle de uzayda nasıl bükülüp döndükleriyle ilgilenir. Üç boyutlu Öklid uzayında, düzenli bir uzay eğrisinin geometrisi, teğet, normal ve binormal vektörlerden oluşan eğri boyunca ortonormal bir hareketli çerçeve sağlayan Frenet-Serret çerçevesi kullanılarak tanımlanır. Bu vektörler, eğrinin davranışı hakkında eğrilik ve burulma gibi temel bilgileri yakalar ve sırasıyla teğet vektörünün değişim hızını ve oskülatör düzleminden çıkma hızını ölçer. Bu değişmezler aracılığıyla, helisler, düzlemsel eğriler ve jeodezikler gibi çeşitli eğri türleri sınıflandırılabilir ve analiz edilebilir, Öklid uzayında daha derin geometrik ve topolojik yapıları ortaya koyabilir.

Regle yüzeyler, difarensiyel geometride önemli ve kapsamlı bir şekilde incelenen bir yüzey sınıfını oluşturur ve yüzey üzerindeki her noktadan, tamamen yüzeyin içinde kalan bir doğrunun geçmesi özelliğiyle karakterize edilir. Matematiksel olarak, üç boyutlu Öklid uzayında bir regle yüzey genel olarak

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vw(s),$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi ve  $w(s)$  de birim doğrultman vektördür [1]. Regle yüzeylerin difarensiyel geometrisi, birinci ve ikinci temel formlar, Gauss ve ortalama eğrilik gibi niceliklerin ve yüzeydeki jeodezikler, asimptotik çizgiler ve eğrilik çizgileri gibi özel eğrilerin davranışının analiz edilmesini içerir. Regle yüzeyler arasında, açılabilir yüzeyler (her yerde sıfır Gauss eğriliğine sahip) ve minimal regle yüzeyler (ortalama eğrilik sıfır) gibi özel alt sınıflar özellikle ilgi çekicidir. Açılabilir yüzeyler, bozulma olmaksızın bir düzleme yerel olarak açılabilir ve bu da onları sac metal şekillendirme ve yüzey modelleme gibi endüstriyel uygulamalarda oldukça önemli hale getirir. Son yıllarda, regle yüzeylerle ilgili Öklid ve Öklidyen olmayan uzaylarda birçok çalışma yapılmıştır [2-12]. [5] nolu çalışmada E. Karaca, dayanak eğrisi tabii lift eğrisi olan regle yüzeylerin RM çatısı yardımıyla singülerliklerini incelemiştir. [9] nolu çalışmada, Y. Li ve ark. polinom eğriler üzerinde FLC çatısına göre oluşturulan eşleşik regle yüzeyler kavramını tanıtmışlar ve bu yüzeylerin eşzamanlı geometrik karakterizasyonlarını incelemişlerdir.

Klasik Frenet-Serret çerçevesi, uzay eğrilerini eğrilik ve burulma yoluyla analiz etmek için güçlü bir araç sunarken, eğrinin eğriliği kaybolduğunda tanımsız veya süreksiz hale gelir. Bu tür sınırlamaların üstesinden gelmek için, paralel taşıma çerçevesi olarak da bilinen Bishop çerçevesi, eğrileri çerçevelemek için akıcı ve esnek bir alternatif sunar. İlk olarak 1975 yılında Richard L. Bishop tarafından ortaya atılan Bishop çerçevesi, paralel taşıma yoluyla bir eğri boyunca ortogonal hareketli bir çerçeve oluşturarak burulma bağımlılığını ortadan kaldırır [13]. Bu yöntem, eğrinin dönüm noktaları veya sıfır eğrilik bölgeleri olsa bile küresel olarak iyi tanımlanmış bir çerçeve sağlar. Sonuç olarak, Bishop çerçevesi; bilgisayar grafikleri, robotik ve diferansiyel geometri gibi birçok alanda uygulama alanı bulmuştur. Özellikle diferansiyel geometride, bir eğrinin her noktasına sürekli olarak bir çerçeve (tanjant, normal ve binormal vektörler gibi) atayarak eğrinin geometrik özelliklerinin incelenmesine olanak sağlar. Yüzeyler bağlamında, hareketli bir eğriden bir yüzey üretildiğinde (örneğin, süpürme yüzeyleri, regle yüzeyler veya kanal yüzeylerinin oluşturulmasında), Bishop çerçevesi, klasik Frenet çerçevesinin aksine, eğriliğin sıfır olduğu (düz) veya burulmanın tanımsızlaştığı noktalarda da düzgün bir şekilde tanımlanabildiğinden, yüzeyin her noktasında sürekli ve kararlı bir yönlendirme sağlar. Bu durum, yüzeyin lokal davranışını görselleştirme, hesaplama ve parametrik olarak ifade etme süreçlerini daha kolay ve sezgisel (yani geometrik olarak doğrudan anlaşılır) hale getirir [14]. Farklı tiplerde Bishop çatıları bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi de 3-tipinde Bishop çatısıdır, bu çatı ana eksen binormal doğrultuda alınan bir çatı sistemidir. Özellikle yönlendirici doğrusu binormal yönünde tanımlanan regle yüzeylerin düzgün biçimde incelenmesine olanak sağlar, çünkü eğriliğin sıfır olduğu durumlarda bile tanım geçerliliğini korur. [15] nolu çalışmada, Al-Jedani ve Abdel-Baky süpürme yüzeylerinin 3-tipinde Bishop çatısı yardımıyla bazı karakterizasyonlarını incelemişlerdir.

Süpürme yüzeyleri de yönlendirici doğrultunun belirli bir çatıya göre hareketiyle elde edildiğinden, biz de bu çalışmada 3-tipinde Bishop çatısına göre tanımlanan yönlendirici doğrultuyu kullanarak regle yüzeyleri inceledik; böylece her iki yaklaşım arasında doğal bir geometrik paralellik kurulmuş oldu. Bu tür yüzeylerin düz (açılabilir), minimal veya jeodezik, eğrilik ya da asimptotik çizgiler içermesi gibi özel geometrik davranışlar sergilediği açık koşulları türetmek amaçlanmaktadır. Bishop çatısı yaklaşımı, klasik teoriyi genelleştirmenin yanı sıra, sıfır veya düzensiz eğriliğe sahip eğrilerden üretilen yüzeylerin incelenmesi için daha sağlam bir çerçeve de sunmaktadır.

## 1. ÖN BİLGİLER

$\alpha = \alpha(s)$ ,  $E^3$  uzayında birim hızlı bir eğri olsun.  $\alpha''(s) \neq 0$  olmak üzere,  $\{n_1, n_2, n_3\}$  kümesi  $\alpha$  eğrisinin Frenet çatısı olarak adlandırılır öyle ki  $n_1, n_2, n_3$  aşağıdaki eşitlikleri sağlar [1]:

$$n_1(s) = \alpha'(s), n_2(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, n_3(s) = n_1(s) \times n_2(s), \quad (1)$$

burada  $n_1, n_2, n_3$  sırasıyla  $\alpha$  eğrisinin birim teğet, birim normal ve birim binormal vektörleridir.  $n_1, n_2, n_3$  vektörlerine ilişkin Frenet- Serret formülleri de aşağıdaki gibidir [1]:

$$\begin{pmatrix} n_1' \\ n_2' \\ n_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

burada  $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$  ve  $\tau(s) = -\langle n_3'(s), n_2(s) \rangle$  sırasıyla  $\alpha$  eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarıdır.

**Tanım 2.1.**  $\gamma(s_n)$  eğrisi  $n_2(s)$  normal vektörünün integral eğrisi olsun; yani  $\gamma(s_n) = \int_0^s n_2(s)ds$ , burada  $\gamma(s_n)$ ' e de  $\alpha(s)$ ' nin doğal eğri çifti denir ve  $\{\gamma(s_n), \alpha(s)\}$  ikilisine de eşlenik çift denir [15].

$\gamma(s_n)$  eğrisinin yay uzunluğu parametresi  $s_n = s + c$  olmak üzere, genelliği bozmamak adına  $c = 0$  yani  $s_n = s$  olarak alacağız.  $\{e_1, e_2, e_3\}$  hareketli Frenet- Serret çatısı üzerinde bir eğri  $\gamma$ ,  $e_1, e_2$  ve  $e_3$  de sırasıyla  $\gamma$  eğrisinin birim teğet, birim normal ve birim binormal vektörleri olsun. O halde,  $\gamma(s)$  eğrisinin Frenet vektörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlamaktadır [15]:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

burada  $\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)$  dır. O halde, hareketli çatıya ait Frenet- Serret formülleri aşağıdaki şekildedir [15]:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1(s) & 0 \\ -\varepsilon_1(s) & 0 & \varepsilon_2(s) \\ 0 & -\varepsilon_2(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = w(s) \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

burada  $\varepsilon_1 = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)'$  ve hareketli çatıya ait açısal hız  $w(s) = \varepsilon_2 e_1 + \varepsilon_1 e_3$  şeklindedir.

**Tanım 2.2.**  $\gamma(s)$  eğrisi üzerindeki ortogonal hareketli bir çerçeve  $\{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $\langle w, e_1 \rangle = 0$  veya  $e_2'$  ve  $e_3'$  türevlerinin her ikisi de  $e_1$  e paralel ise dönüşü minimize eden çerçeve (DMÇ) olarak adlandırılır.  $e_2$  ve  $e_3$  referans yönü olarak seçildiğinde benzer bir karakterizasyon geçerlidir [15].

Tanım 2.2. aracılığıyla  $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ ' ün  $e_2$  için bir DMÇ olduğunu ancak  $e_1$  ve  $e_3$  için olmadığını gözlemliyoruz.  $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ ' ün  $e_1$  için DMÇ olmadığı gerçeğinden, böyle bir DMÇ' yi buradan kolayca türetebiliriz. O halde,  $(e_2, e_3)$  dönmesiyle oluşan yeni düzlem vektörleri  $(n_1, n_2)$  aşağıdaki eşitlikle verilir [15]:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u \\ 0 & -\sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

burada  $u = u(s) \geq 0$  dır. Son eşitlik yardımıyla alternatif çatı denklemi şu şekilde verilir [15]:

$$\begin{pmatrix} e_1'(s) \\ n_1'(s) \\ n_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1(s) - \kappa_2(s) \\ -\kappa_1(s) & 0 & 0 \\ \kappa_2(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

burada

$$\kappa_1(s) = \varepsilon_1 \cos u, \quad \kappa_2(s) = \varepsilon_1 \sin u, \quad u(s) = \tan^{-1} \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right), \quad \kappa_1 \neq 0,$$

$$u = u_0 - \int_{s_0}^s \varepsilon_2 ds, \quad u_0 = u(s_0).$$

Yukarıdaki eşitlikle verilen  $\{e_1, n_1, n_2\}$  kümesi  $\gamma(s)$  eğrisi için 3-tipinde Bishop çatısı olarak adlandırılır [15]. Bu çatı inşa edilirken Abdel-Baky ve ark. [16] numaralı kaynaktaki düşünceyle hareket etmişlerdir.

Regüler bir  $\gamma(s)$  eğrisi boyunca sabit bir doğrunun hareketiyle elde edilen yüzeye regle yüzey denir ve parametrik olarak şu şekilde verilir [17]:

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + vw(s), \quad (7)$$

burada  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi ve  $w(s)$  de birim doğrultman vektördür.

Bir  $\varphi(s, v)$  regle yüzeyi için striksiyon eğrisi ve dağılma parametresi sırasıyla şu şekilde verilir [17]:

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma', w' \rangle}{\|w'\|^2} w(s) \quad (8)$$

ve

$$P_w = \frac{\det(\gamma', w, w')}{\|w'\|^2}. \quad (9)$$

$\varphi(s, v)$  regle yüzeyine ait birim normal vektör aşağıdaki şekildedir [17]:

$$n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|}. \quad (10)$$

Regle yüzeye ait Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonları şu şekilde bulunur [17]:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (11)$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \quad (12)$$

Burada 1.temel form katsayıları  $E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle, F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$  ve 2.temel form katsayıları  $e = \langle \varphi_{ss}, n \rangle, f = \langle \varphi_{sv}, n \rangle, g = \langle \varphi_{vv}, n \rangle$  şeklindedir.

$\varphi(s, v)$  yüzeyi üzerindeki  $\gamma(s)$  eğrisi ile ilişkili jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik burulma sırasıyla aşağıdaki gibidir [1]:

$$\begin{cases} \kappa_g = \langle n \wedge \gamma', \gamma'' \rangle, \\ \kappa_n = \langle \gamma'', n \rangle, \\ \tau_g = \langle n \wedge n', \gamma'' \rangle. \end{cases} \quad (13)$$

Burada  $n, \varphi(s, v)$  yüzeyinin normali  $\gamma'$  de  $\gamma$  eğrisinin 3-tipindeki Bishop çatısına göre teğet vektörüne karşılık gelmektedir.

$$\gamma(s) \text{ eğrisi bir jeodezik egridir ancak ve ancak } \kappa_g = 0' \text{ dir.} \quad (14)$$

$$\gamma(s) \text{ eğrisi bir asimptotik doğrudur ancak ve ancak } \kappa_n = 0' \text{ dir.} \quad (15)$$

$$\gamma(s) \text{ eğrisi bir eğrilik çizgisidir ancak ve ancak } \tau_g = 0' \text{ dir.} \quad (16)$$

### 3. 3-TİPİNDEKİ BISHOP ÇATISINA GÖRE REGLE YÜZEYLER

Bu kısımda  $e_1, n_1$  ve  $n_2$  vektörlerinin gerdiği 3-tipinde Bishop çatısına göre regle yüzeyler inşa edilecektir.  $\gamma$  regüler bir eğri ve  $\{e_1, n_1, n_2\}$  kümesi  $\gamma$  nın 3-tipinde bir Bishop çatısı olsun. O halde  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  regle yüzeyleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \varphi(s, v) = \gamma(s) + v e_1(s) \\ \psi(s, v) = \gamma(s) + v n_1(s) \\ \chi(s, v) = \gamma(s) + v n_2(s). \end{cases} \quad (17)$$

$M_1$  yüzeyinin  $s$  ve  $v$  parametrelerine göre kısmi türevleri hesaplırsak aşağıdaki denklemler

$$\begin{cases} \varphi_s = e_1 + v \kappa_1 n_1 - v \kappa_2 n_2, \varphi_v = e_1 \\ \varphi_{sv} = \kappa_1 n_1 - \kappa_2 n_2, \varphi_{vv} = 0, \varphi_{ss} = (-v \kappa_1^2 - v \kappa_2^2) e_1 + (\kappa_1 + v \kappa_1') n_1 + (-\kappa_2 - v \kappa_2') n_2 \end{cases}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.1.**  $M_1$  yüzeyi bir singüler noktaya sahip değildir ancak ve ancak  $\varepsilon_1 \neq 0$  olmak zorundadır.

**İspat.**  $\varphi_s \times \varphi_v = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & v \kappa_1 & -v \kappa_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -v \kappa_2 n_1 - v \kappa_1 n_2$  olup  $\|\varphi_s \times \varphi_v\| = v \varepsilon_1$  şeklindedir. O halde  $M_1$  yüzeyinin singüler noktaya sahip olmaması için  $v \varepsilon_1 \neq 0$  ve  $v \neq 0$  olduğundan  $\varepsilon_1 \neq 0$  olmak zorundadır. Tam tersi de benzer şekilde sağlanır.

**Sonuç 3.2.**  $M_1$  yüzeyinin striksiyon eğrisi aynı zamanda dayanak eğrisidir.

**İspat.**  $M_1$  yüzeyi için striksiyon eğrisi şu şekildedir:

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{\|\gamma''\|^2} \gamma'.$$

Burada  $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$  olup striksiyon eğrisi dayanak eğrisine eşittir. Yani  $\bar{\gamma}(s) = \gamma(s)$  dir.

**Sonuç 3.3.**  $M_1$  yüzeyi bir açılabilir yüzeydir.

**İspat.**  $M_1$  yüzeyi için dağılma parametresi şu şekildedir:

$$P_{\gamma'} = \frac{\det(\gamma', \gamma', \gamma'')}{\|\gamma''\|^2} = 0$$

dır. O halde  $M_1$  yüzeyi açılabiliridir.

$M_1$  yüzeyinin birim normali ve 1. ve 2. temel form katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$n = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|} = -\frac{\kappa_2}{\varepsilon_1} n_1 - \frac{\kappa_1}{\varepsilon_1} n_2,$$

$$E = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = 1 + v^2 \varepsilon_1^2, \quad F = \langle \varphi_s, \varphi_v \rangle = 1, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1,$$

$$e = \langle \varphi_{ss}, n \rangle = \frac{v(-\kappa_2 \kappa_1' + \kappa_1 \kappa_2')}{\varepsilon_1}, \quad f = \langle \varphi_{sv}, n \rangle = -\frac{\kappa_1 \kappa_2}{\varepsilon_1} + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\varepsilon_1} = 0, \quad g = \langle \varphi_{vv}, n \rangle = 0.$$

**Sonuç 3.4.**  $M_1$  yüzeyinin 3-tipindeki Bishop çatısına göre Gauss eğriliği  $K = 0$  dir.

**Sonuç 3.5.**  $M_1$  yüzeyinin 3-tipindeki Bishop çatısına göre ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{-\kappa_2 \kappa_1' + \kappa_1 \kappa_2'}{v \varepsilon_1^3} \right)$$

şeklindedir.

**Sonuç 3.6.**  $M_1$  yüzeyi 3-tipindeki Bishop çatısına göre minimaldir gerek ve yeter şart  $\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)' = 0$  dir.

**Sonuç 3.7.**  $M_1$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre jeodezik eğri olamaz.

**İspat.** Kabul edelim ki  $\gamma(s)$  jeodezik bir eğri olsun. O halde,  $\kappa_g = \langle n \times e_1, e_1' \rangle = 0$  dir.

$$\kappa_g = \left\langle \left(0, -\frac{\kappa_1}{\varepsilon_1}, \frac{\kappa_2}{\varepsilon_1}\right), (0, -\kappa_1, \kappa_2) \right\rangle = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\varepsilon_1} = \varepsilon_1.$$

Buradan  $\varepsilon_1 = 0$  olmak zorundadır. Bu da Sonuç 3.1 ile çelişir. O halde  $\gamma(s)$  jeodezik bir eğri değildir.

**Sonuç 3.8.**  $M_1$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre asimptotik doğrudur.

**İspat.**  $\kappa_n = \langle \gamma'', n \rangle = \langle (0, -\kappa_1, \kappa_2), (0, -\frac{\kappa_2}{\varepsilon_1}, -\frac{\kappa_1}{\varepsilon_1}) \rangle = 0$  olduğundan  $\gamma$  asimptotik bir doğrudur.

**Sonuç 3.9.**  $M_1$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre eğrilik çizgisidir.

**İspat.**  $\tau_g = \langle n \wedge n', \gamma'' \rangle$  eşitliğinde  $n \wedge n' = 0$  olduğundan  $\tau_g = 0$  bulunur. O halde  $\gamma$ , 3-tipindeki Bishop çatısına göre eğrilik çizgisidir.

$M_2$  yüzeyinin  $s$  ve  $v$  parametrelerine göre kısmi türevleri şu şekildedir:

$$\begin{cases} \psi_s = (1 - v\kappa_1)e_1, \psi_v = n_1 \\ \psi_{sv} = -\kappa_1 e_1, \psi_{vv} = 0, \psi_{ss} = -v\kappa_1' e_1 + \kappa_1(1 - v\kappa_1)n_1 - \kappa_2(1 - v\kappa_1)n_2. \end{cases}$$

**Sonuç 3.10.**  $M_2$  yüzeyi singüler noktaya sahiptir gerek ve yeter şart  $\kappa_1 = \frac{1}{v}$  olmak zorundadır.

**İspat.**  $\psi_s \times \psi_v = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 - v\kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1 - v\kappa_1) n_2$  olup  $\|\psi_s \times \psi_v\| = |1 - v\kappa_1|$  şeklindedir. O halde

$M_2$  yüzeyinin singüler noktaya sahip olması için  $\kappa_1 = \frac{1}{v}$  olmak zorundadır. Önermenin tersi de benzer şekilde sağlanır.

**Sonuç 3.11.**  $M_2$  yüzeyi bir açılabilir yüzeydir.

**İspat.**  $M_2$  yüzeyi için dağılma parametresi şu şekildedir:

$$P_{n_1} = \frac{\det(e_1, n_1, n_1')}{\|n_1'\|^2} = 0$$

dır. O halde  $M_2$  yüzeyi açılabiliridir.

$M_2$  yüzeyinin birim normali ve 1. ve 2. temel form katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$n = \frac{\psi_s \times \psi_v}{\|\psi_s \times \psi_v\|} = n_2,$$

$$\begin{aligned} E = \langle \psi_s, \psi_s \rangle &= (1 - v\kappa_1)^2, & F = \langle \psi_s, \psi_v \rangle &= 0, & G = \langle \psi_v, \psi_v \rangle &= 1, \\ e = \langle \psi_{ss}, n \rangle &= -\kappa_2(1 - v\kappa_1), & f = \langle \psi_{sv}, n \rangle &= 0, & g = \langle \psi_{vv}, n \rangle &= 0. \end{aligned}$$

**Sonuç 3.12.**  $M_2$  yüzeyinin 3-tipindeki Bishop çatısına göre Gauss eğriliği  $K = 0$ ' dır.

**Sonuç 3.13.**  $M_2$  yüzeyinin 3-tipindeki Bishop çatısına göre ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{-\kappa_2}{1 - v\kappa_1} \right)$$

şeklindedir.

**Sonuç 3.14.**  $M_2$  yüzeyi 3-tipindeki Bishop çatısına göre minimaldir gerek ve yeter şart  $\kappa_2 = 0$ ' dır. (Burada  $\kappa_2(s) = \varepsilon_1 \sin u$  olup  $\varepsilon_1 = 0$  edilir.  $\varepsilon_1 = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$  olduğundan  $\kappa = \tau = 0$  olmasını gerektirir. Yani,  $\gamma$  eğrisi düzlemde bir doğrudur.)

**Sonuç 3.15.**  $M_2$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre jeodezik eğridir gerek ve yeter şart  $\kappa_1 = 0$  veya  $\kappa_2 = 0$  olmak zorundadır. Yani,  $\gamma$  eğrisi düzlemde bir doğrudur.

**İspat.**  $\gamma(s)$  jeodezik bir eğri olsun. O halde,  $\kappa_g = \langle n \times e_1, e_1' \rangle = 0$ ' dır.

$$\kappa_g = \langle (0, 0, \kappa_1), (0, \kappa_1, -\kappa_2) \rangle = -\kappa_1 \kappa_2.$$

Buradan  $\kappa_1 = 0$  veya  $\kappa_2 = 0$ ' dır. Benzer şekilde önermenin tersi de doğrudur.

**Sonuç 3.16.**  $M_2$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre asimptotik doğrudur gerek ve yeter şart  $\kappa_2 = 0$ ' dır.

**İspat.**  $\gamma(s)$  asimptotik bir eğri olsun.  $\kappa_n = \langle \gamma'', n \rangle = 0$ ' dır.

$$\kappa_n = \langle (0, \kappa_1, -\kappa_2), (0, 0, 1) \rangle = -\kappa_2.$$

O halde  $\kappa_2 = 0$ ' dır. Önermenin tersi de benzer şekilde ispat edilir.

**Sonuç 3.17.**  $M_2$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre bir eğrilik çizgisidir.

**İspat.**  $\tau_g = \langle n \times n'_2, n'_1 \rangle = 0$  olduğundan  $\gamma(s)$  bir eğrilik çizgisidir.

$M_3$  yüzeyinin  $s$  ve  $v$  parametrelerine göre kısmi türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{cases} \chi_s = (1 + v\kappa_2)e_1, \chi_v = n_2 \\ \chi_{sv} = \kappa_2 e_1, \chi_{vv} = 0, \chi_{ss} = v\kappa'_2 e_1 + \kappa_1(1 + v\kappa_1)n_1 - \kappa_2(1 + v\kappa_1)n_2. \end{cases}$$

**Sonuç 3.18.**  $M_3$  yüzeyi singüler noktaya sahiptir gerek ve yeter şart  $\kappa_2 = -\frac{1}{v}$  olmak zorundadır.

**İspat.**  $\chi_s \times \chi_v = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 + v\kappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + v\kappa_2)n_1, \|\chi_s \times \chi_v\| = |1 + v\kappa_2|$  dir.  $M_3$  yüzeyinin singüler noktaya sahip olması için  $\kappa_2 = -\frac{1}{v}$  olmalıdır. Önermenin tersi de benzer şekilde sağlanır.

**Sonuç 3.19.**  $M_3$  yüzeyi bir açılabilir yüzeydir.

**İspat.**  $M_3$  yüzeyi için dağılma parametresi

$$P_{n_2} = \frac{\det(e_1, n_2, n'_2)}{\|n'_2\|^2} = 0$$

dir. O halde  $M_3$  yüzeyi açılabiliridir.

$M_3$  yüzeyinin birim normali ve 1. ve 2. temel form katsayıları şu şekildedir:

$$n = \frac{\chi_s \times \chi_v}{\|\chi_s \times \chi_v\|} = -n_1,$$

$$E = \langle \chi_s, \chi_s \rangle = (1 + v\kappa_1)^2, \quad F = \langle \chi_s, \chi_v \rangle = 0, \quad G = \langle \chi_v, \chi_v \rangle = 1,$$

$$e = \langle \chi_{ss}, n \rangle = -\kappa_1(1 + v\kappa_1), f = \langle \chi_{sv}, n \rangle = 0, g = \langle \chi_{vv}, n \rangle = 0.$$

**Sonuç 3.20.**  $M_3$  yüzeyinin 3-tipindeki Bishop çatısına göre Gauss eğriliği  $K = 0$ ' dır.

**Sonuç 3.21.**  $M_3$  yüzeyinin 3-tipindeki Bishop çatısına göre ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{-\kappa_1}{1 + v\kappa_1} \right)$$

dir.

**Sonuç 3.22.**  $M_3$  yüzeyi 3-tipindeki Bishop çatısına göre minimaldir gerek ve yeter şart  $\kappa_1 = 0$ ' dır. (Burada  $\kappa_1(s) = \varepsilon_1 \sin u$  olup  $\varepsilon_1 = 0$  edilir.  $\varepsilon_1 = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$  olduğundan  $\kappa = \tau = 0$  olmasını gerektirir. Yani,  $\gamma$  eğrisi düzlemde bir doğrudur.

**Sonuç 3.23.**  $M_3$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre jeodezik eğridir gerek ve yeter şart  $\kappa_2 = 0$ ' dır.

**İspat.**  $\gamma(s)$  jeodezik bir eğri olsun.  $\kappa_g = \langle n \times e_1, e_1' \rangle = 0$ ' dır.

$$\kappa_g = \langle (0, 0, 1), (0, \kappa_1, -\kappa_2) \rangle = -\kappa_2.$$

Buradan  $\kappa_2 = 0$  dır. Önermenin tersi de benzer şekilde doğrudur.

**Sonuç 3.24.**  $M_2$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre asimptotik doğrudur gerek ve yeter şart  $\kappa_1 = 0$ ' dır.

**İspat.**  $\gamma(s)$  asimptotik bir eğri olsun. O halde,  $\kappa_n = \langle \gamma'', n \rangle = 0$ ' dır.

$$\kappa_n = \langle (0, \kappa_1, -\kappa_2), (0, -1, 0) \rangle = -\kappa_1.$$

O halde  $\kappa_1 = 0$ ' dır. Benzer şekilde önermenin tersi de ispat edilir.

**Sonuç 3.25.**  $M_3$  yüzeyi ile ilişkili  $\gamma(s)$  dayanak eğrisi, 3-tipindeki Bishop çatısına göre bir eğrilik çizgisidir gerek ve yeter şart  $\kappa_1 = 0$  veya  $\kappa_2 = 0$ ' dır.

**İspat.**  $\gamma(s)$  bir eğrilik çizgisi olsun. O halde  $\tau_g = \langle n \times n', e_1' \rangle = \langle (0, \kappa_2, 0), (0, \kappa_1, -\kappa_2) \rangle = \kappa_1 \kappa_2 = 0$  olup buradan  $\kappa_1 = 0$  veya  $\kappa_2 = 0$  elde edilir. Benzer olarak önermenin tersi de ispat edilir.

#### 4. ÖRNEK

$\alpha(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right)$  birim hızlı eğrisi verilsin.  $\alpha$  eğrisinin Frenet çatısı, eğrilik ve burulması aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} n_1(s) &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right), \\ n_2(s) &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right), \\ n_3(s) &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \kappa(s) &= 1, \tau(s) = 0. \end{aligned}$$

Şimdi Tanım 2.1 ve Eşitlik 3 yardımıyla aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right), \\ e_1(s) &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right), \end{aligned}$$

$$e_2(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, -\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right),$$

$$e_3(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 1, \varepsilon_2 = 0.$$

O halde, 3-tipinde Bishop çatısı  $\{e_1, n_1, n_2\}$  şeklindedir.

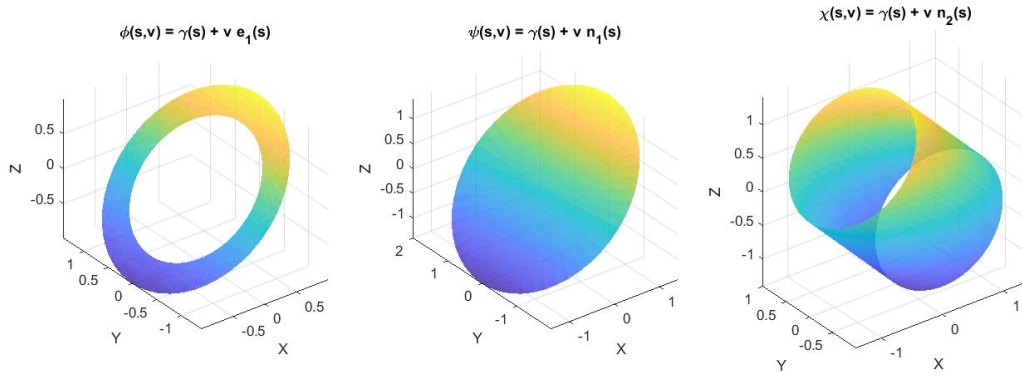
i)  $u(s) = 0$  alınırsa, 3-tipinde Bishop çatısının elemanları  $n_1(s) = e_2(s)$  ve  $n_2(s) = e_3(s)$  olarak elde edilir. O halde,  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  yüzeyleri şu şekildedir:

$$\varphi(s, v) = \gamma(s) + v e_1(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + v \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\sin s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right),$$

$$\psi(s, v) = \gamma(s) + v n_1(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + v \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, -\cos s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right),$$

$$\chi(s, v) = \gamma(s) + v n_2(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + v \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Şekil 1 de  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  yüzeylerinin grafiklerini MATLAB programı yardımıyla sırasıyla aşağıdaki gibi çizilebilir:



Şekil 1. Soldan sağa sırasıyla  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  yüzeyleri ( $u(s) = 0$  için)

ii)  $u(s) = \frac{\pi}{4}$  alınırsa, 3-tipinde Bishop çatısının elemanları şu şekildedir:

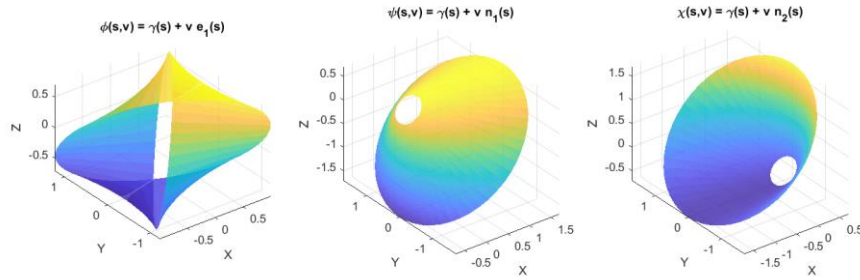
$$n_1 = \cos \frac{\pi}{4} e_2 + \sin \frac{\pi}{4} e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_3,$$

$$n_2 = -\sin \frac{\pi}{4} e_2 + \cos \frac{\pi}{4} e_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_3.$$

O halde,  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  yüzeyleri şu şekildedir.

$$\begin{aligned}
\varphi(s, v) &= \gamma(s) + v e_1(s) \\
&= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + v \left( \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\
\psi(s, v) &= \gamma(s) + v n_1(s) \\
&= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + v \left( \frac{1}{2} \sin s - \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, \frac{1}{2} \sin s + \frac{1}{2} \right), \\
\chi(s, v) &= \gamma(s) + v n_2(s) = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right) + v \left( -\frac{1}{2} \sin s - \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s, -\frac{1}{2} \sin s + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Şekil 2 de  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  yüzeylerinin grafiklerini MATLAB programı yardımıyla şu şekilde çizilir:



**Şekil 2.** Soldan sağa sırasıyla  $M_1, M_2$  ve  $M_3$  yüzeyleri ( $u(s) = \frac{\pi}{4}$  için)

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada, üç boyutlu Öklid uzayında 3-tipinde Bishop çatısı kullanılarak oluşturulan regle yüzeylerin difarensiyel geometrisini inceledik. Klasik Frenet-Serret çatısının aksine, 3-tipinde Bishop çatısı, eğrilik sıfır olsa bile, herhangi bir düzenli eğri boyunca sürekli ve iyi tanımlanmış bir hareketli çatı sağlar. Bu özellik, onu düzensiz davranışlı eğriler tarafından oluşturulan yüzeylerin geometrisini incelemek için özellikle uygun hale getirir.

Regle yüzeyleri bir dayanak eğrisi ve 3-tipinde Bishop çatısından seçilen bir yön vektörü cinsinden parametrelendirilerek, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik için açık ifadeler türettik. Bu ifadeler, bu tür yüzeylerin ne zaman açılabilir veya minimal olduğunu belirlemek için geometrik kriterler formüle etmemizi sağladı. Regle yüzeylere ait jeodezik, asimptotik ve esas çizgilerin belirlenmesi için belirli koşullar elde edildi.

Sonuçlar, Bishop çatısı yaklaşımının yalnızca klasik regle yüzey teorisini genelleştirmekle kalmayıp, aynı zamanda analizleri için daha sağlam ve geometrik olarak sezgisel bir çerçeve sunduğunu da göstermektedir.

## YAZAR'IN KATKISI

**Anıl Altunkaya:** Metodoloji, Kavramlaştırma, Araştırma, İçerik analizi, Makalenin yazımı, İnceleme ve Düzenleme.

## TEŞEKKÜR

Yazar, tüm hakem ve editörlere yapıcı geri bildirimleri için teşekkür etmektedir.

## ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarın bu makale ile ilgili herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

## KAYNAKLAR

- [1] Do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs. New Jersey.
- [2] Ergün, E. and Çalışkan, M. (2015). Ruled Surface Pair Generated By Darboux Vectors of a Curve and Its Natural Lift in  $\mathbb{R}^3$ . *Bulletin of Mathematics and Statistics Research*, 3(2), 125-134.
- [3] Masal, M. and Azak, A. Z. (2015). The ruled surfaces according to type-2 Bishop Frame in the Euclidean 3-space. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 3(2), 74-83.
- [4] Mert, T. and Atçeken, M. (2021). Some Special Ruled Surfaces in Hyperbolic 3-Space, *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(2), 298-309.
- [5] Karaca, E. (2022). Singularities of the ruled surfaces According to RM Frame and Natural Lift Curves, *Cumhuriyet Science Journal*, 43(2), 308.
- [6] Oztemir, Y. and Çalışkan, M. (2023). Intersections of ruled surfaces corresponding to curves on pseudo spheres in dual space, *Journal of Science and Arts*, 62, 61-76.
- [7] Boyacıoğlu Kalkan, Ö. and Şenyurt, S. (2024). Osculating Type Ruled Surfaces with Type-2 Bishop Frame in  $E^3$ . *Symmetry*, 16, 498.
- [8] Li, Y., Eren, K. and Ersoy, S. (2023). On simultaneous characterizations of partner-ruled surfaces in Minkowski 3-space. *AIMS Mathematics*, 8(9): 22256-22273. doi: 10.3934/math.20231135
- [9] Li, Y., Eren, K., Ayvaci, K. H. and Ersoy, S. (2022). Simultaneous characterizations of partner ruled surfaces using Flc frame. *AIMS Mathematics*, 7(11): 20213-20229. doi: 10.3934/math.20221106
- [10] Eren K., Kosal, H.H. (2020). Evolution of Space Curves and the Special Ruled Surfaces with Modified Orthogonal Frame, *AIMS Mathematics*, 5(3), 2027– 2039.
- [11] Şaffak Atalay, G. (2025). On the characterisations of ruled surface pairs according to the Sabban frame. *Filomat*, 39:11, 3705–3717.
- [12] Şaffak Atalay, G. (2025). Smarandache Curved Ruled Surfaces and Their Characterizations According to Modified Orthogonal Frame in  $E^3$ . *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, Vol. 20, Issue 1, 19 pages.
- [13] Bishop, L. R. (1975). There is more than one way to frame a curve. *American Mathematical Monthly* 3(2), 82.
- [14] Yılmaz, S. and Turgut, M. (2010). A new version of Bishop frame and an application to spherical images. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371, 764-776.
- [15] Al-Jedani, A. and Abdel-Baky, R. A. (2023). Sweeping Surfaces according to Type-3 Bishop Frames in Euclidean 3-Space. *Symmetry*, 15, 855.
- [16] Sharief, D., Bang, Y.C. and Azeb, A. (2018). Natural mates of Frenet curves in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 2826–2840.
- [17] O'Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry*, Academic Press New York and London, 42-187.