

Navier-Stokes Denklemleri için Yapay Sıkıştırılabilirlik Yöntemi: Ceza ve Grad-Div Yöntemleri ile Karşılaştırmalı Sayısal Çalışma

Damla Kayıhan¹ , Gülnur Haçat^{*2} , Aytekin Çıbık³ 

¹Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 06500, Ankara, Türkiye

²Yalova Üniversitesi, BAP Rektörlük, 77000, Yalova, Türkiye

³Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- AC yöntemi, Navier-Stokes çözümlerinde ikinci dereceden yakınsama davranışı göstermektedir.
- Ceza ve Grad-Div yöntemleri ile kapsamlı sayısal karşılaştırmalar yapılmıştır.
- İki kapalı daire arasında asimetrik akış geometrisi üzerinde testler gerçekleştirilmiştir.
- AC yöntemi, düşük Reynolds sayılarında yüksek doğruluk ve kararlılık sunmaktadır.
- AC parametresi ϵ 'nin seçimi çözüm kalitesi üzerinde belirgin etki oluşturmaktadır.

Makale Bilgileri

Geliş: 13/08/2025

Kabul: 06/11/2025

Anahtar Kelimeler

Navier-Stokes
Denklemleri,
Yapay Sıkıştırılabilirlik,
Ceza Yöntemi,
Grad-Div Stabilizasyonu

Öz

Bu çalışmada, sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemlerinin çözümünde kullanılan Yapay Sıkıştırılabilirlik yöntemi, Ceza ve Grad-Div stabilizasyon yöntemleri ile karşılaştırmalı olarak sayısal açıdan incelenmiştir. Sayısal testler, yapay sıkıştırılabilirlik yönteminin ikinci dereceden yakınsama özelliğine sahip olduğunu ve farklı Reynolds sayıları altında düşük hata oranları sağladığını ortaya koymaktadır. Ayrıca, iki kapalı daire arasında oluşturulan akış konfigürasyonu üzerinde yapılan testler, yapay sıkıştırılabilirlik yönteminin karmaşık geometrilerde etkin bir çözüm performansı sunduğunu göstermektedir. Elde edilen sonuçlar, yapay sıkıştırılabilirlik yönteminin basınç-hız uyumunu başarıyla sağladığını ve Grad-Div ile Ceza yöntemlerine kıyasla daha üstün bir doğruluk sunduğunu ortaya koymaktadır.

Artificial Compressibility Method for Navier-Stokes Equations: A Comparative Numerical Study with Penalty and Grad-Div Methods

Highlights

- The AC method exhibits second-order convergence behavior in Navier-Stokes solutions.
- Comprehensive numerical comparisons were made with the Penalty and Grad-Div methods.
- Tests were performed on an asymmetric flow geometry between two closed circles.
- The AC method offers high accuracy and stability at low Reynolds numbers.
- The choice of the AC parameter ϵ has a significant effect on solution quality.

Article Info

Received: 13/08/2025

Accepted: 06/11/2025

Keywords

Navier-Stokes Equations,
Artificial,
Compressibility,
Penalty Method,
Grad-Div Stabilization

Abstract

In this study, the Artificial Compressibility method used in solving incompressible Navier-Stokes equations was numerically investigated in comparison with the Penalty and Grad-Div stabilization methods. Numerical tests reveal that the AC method has second-order convergence properties and provides low error rates under different Reynolds numbers. Additionally, tests conducted on a flow configuration created between two closed circles demonstrate that the Artificial Compressibility method offers effective solution performance in complex geometries. The results obtained reveal that the AC method successfully achieves pressure-velocity consistency and offers superior accuracy compared to the Grad-Div and Penalty methods.

1. GİRİŞ

Navier–Stokes Denklemleri (NSD), viskoz akışkanların hareketini tanımlayan temel bir matematiksel model olup; hava ve su gibi akışkanların mühendislik uygulamalarının modellenmesinde kritik bir rol üstlenmektedir [1]. NSD, kütle ve momentumun korunumu prensiplerine dayanır ve çözümünde karşılaşılan en önemli zorluklardan biri, hız ve basınç değişkenlerinin birbirine bağlı ancak doğrudan ifade edilmemiş olmasıdır. Bu durum, özellikle düşük Mach sayılarında geçerli olan sıkıştırılamazlık şartı altında çözüm algoritmalarının kararlılığını ve doğruluğunu olumsuz etkileyebilir [2].

Bahsedilen olumsuzlukların üstesinden gelebilmek için farklı sayısal çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlardan biri olan Yapay Sıkıştırılabilirlik (Artificial Compressibility-AC) yöntemi, ilk kez Chorin tarafından önerilmiştir [3]. Bu yöntem, sıkıştırılamazlık şartını gevşeterek zamana bağlı bir yapay denkleme dönüştürmekte ve bu sayede basınç alanını doğrudan hesaplamaktadır. AC yöntemi, zamanla dengelenen çözümleriyle birlikte özellikle düşük Reynolds sayılarında hızlı yakınsama ve yüksek doğruluk gibi avantajlar sunmaktadır [4,5].

Bununla birlikte, AC yönteminin etkinliğini değerlendirmek ve daha kararlı çözümler elde edebilmek adına farklı stabilizasyon teknikleri de yaygın şekilde araştırılmıştır. Ceza yöntemi sıkıştırılamazlık koşulundan sapmaları azaltmaya yönelik bir terim ekleyerek doğruluğu artırmayı hedeflerken, Grad-Div stabilizasyonu, kütle korunumunu iyileştirmekte ve basınç-hız bileşenleri arasındaki etkileşimi azaltmaktadır [6,7]. Grad-Div yöntemi ayrıca, yüksek Reynolds sayılarında oluşabilecek sayısal sapmaları sınırlamak açısından da önemlidir [8].

Yapılan çalışmalar, AC yönteminin belirli durumlarda Ceza ve Grad-Div yöntemlerine göre daha düşük hata değerleri ve daha kararlı yakınsama eğilimleri sunduğunu göstermektedir [9,10]. Özellikle karmaşık geometrilere sahip problem alanlarında (örneğin iç içe geçmiş dairesel bölgeler), AC yöntemi hem görsel hem de sayısal olarak tatmin edici sonuçlar vermektedir. Ancak, bu yöntemin performansı önemli ölçüde yapay sıkıştırılabilirlik parametresi (ϵ) gibi nümerik parametrelerin seçimine bağlıdır [11].

Bu çalışmada, sıkıştırılmaz NSD'nin çözümünde AC yönteminin sayısal başarımı incelenmekte ve ceza ile grad-div yöntemleri ile karşılaştırmalı olarak değerlendirilmektedir. Sayısal analizler, iki kapalı daire arasında asimetrik bir akış geometrisi üzerinde gerçekleştirilmiş ve yakınsama davranışı, hata değerleri ve zamana bağlı kararlılık parametreleri ayrıntılı biçimde analiz edilmiştir. Elde edilen bulgular, AC yönteminin düşük Reynolds sayılarında yüksek doğruluk sunduğunu ve ϵ parametresinin seçiminin çözüm kalitesi üzerinde belirleyici etkiler yarattığını ortaya koymaktadır. Bu bağlamda, çalışma hem literatürdeki mevcut yöntemleri karşılaştırmalı olarak değerlendirirken hem de AC yaklaşımının sınırlarını daha belirgin hâle getirmeyi hedeflemektedir.

Son yıllarda ise yapay sıkıştırılabilirlik yöntemine yönelik çalışmalar, özellikle değişken yoğunluklu akışlar ve yüksek mertebeden yakınsama sağlayan sayısal analiz alanında önemli gelişmeler kaydetmiştir. Cappanera ve Giordano, değişken yoğunluk içeren sıkıştırılmaz akış problemleri için geliştirdikleri AC yönteminde, sabit zaman adımı matrisleri ile sayısal verimliliği artırırken, basınç-projeeksiyon yöntemlerine kıyasla daha iyi yakınsama sağlandığını ortaya koymuştur [12]. Benzer şekilde, Lundgren ve Nazarov, yüksek mertebeden Taylor serisi temelli zaman adımlama yöntemi ile AC yaklaşımının hem teorik hem de sayısal olarak ikinci mertebeden yakınsama sunduğunu ve özellikle ceza yöntemiyle benzer doğruluk düzeyleri yakaladığını göstermiştir [13]. De Frutos ve arkadaşları ise grad-div stabilizasyonuna yönelik yapılan analizlerde, bu yöntemin viskoziteye bağlı hata sınırlarının giderilmesinde etkili olduğunu ve inf-sup kararlılığını sağladığını raporlamıştır [14]. Ayrıca, Xie, grad-div yönteminde parametrelerin uyarlanabilir olarak seçilmesinin çözüm doğruluğu üzerinde belirgin iyileştirmeler sağladığını ortaya koymuştur [15]. Bahsi geçen çalışmalar, AC yönteminin hem ceza hem de grad-div teknikleriyle karşılaştırıldığında güçlü ve rekabetçi bir alternatif sunduğunu göstermektedir.

Son olarak bu çalışma ise, beş ana bölümden oluşmaktadır. 2. bölümde, çalışma boyunca kullanılacak fonksiyon uzayları, eşitsizlikler detaylandırılmış; analizlerde yararlanılan lemmalar ve tanımlar verilmiştir. 3. bölümde önerilen yöntemin kararlılık ve hata analizleri gerçekleştirilmiş; eşitsizlikler ve ayrık inf-sup koşulları doğrultusunda yöntemin teorik ispatı ortaya konmuştur. 4. bölümde, AC yönteminin farklı ağ çözünürlükleri ve Reynolds sayıları altındaki yakınsama davranışı ve doğruluk düzeyi, ceza ve grad-div yöntemleri ile karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiş; ayrıca karmaşık bir akış geometrisi olan iki kapalı daire arasındaki akış örneği üzerinden yöntemlerin performansı grafiksel ve sayısal olarak incelenmiştir. Son olarak, 5. bölüm olan sonuç bölümünde çalışmadan elde edilen bulgular özetlenmiş, AC yönteminin sayısal doğruluk ve kararlılık açısından sağladığı avantajlar vurgulanmış ve yöntemin sıkıştırılmaz akış problemlerinde geçerli bir alternatif oluşturduğu ifade edilmiştir.

2. MATEMATİKSEL HAZIRLIKLAR

Bu bölümde, makalede kullanılacak olan önemli matematiksel ön bilgilere yer verilmiştir. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2$ veya 3) bölgesini bir çokyüzlü veya dışbükey çokgen olarak kabul ederiz. $H^k(\Omega)$ ve $L^\infty(\Omega)$ normları $\|\cdot\|_k$ ve $\|\cdot\|_\infty$ şeklinde, $L^2(\Omega)$ normu ve iç çarpım normu $\|\cdot\|$ ve $(\cdot, \cdot)$ şeklinde gösterilecektir. $H^k(\Omega)$ uzayındaki yarı norm ise $|\cdot|_k$ ile gösterilmiştir. Ayrıca $(0, T)$ zaman aralığında tanımlı zaman bağımlı norm

$$\|v\|_{m,k} := \left(\int_0^T \|v(t, \cdot)\|_k^m \right)^{1/m}$$

şeklinde tanımlanır. Analiz için kullanacağımız fonksiyon uzayları aşağıdaki gibidir:

$$X := \left(H_0^k(\Omega) \right)^d := \left\{ v \in \left(H^1(\Omega) \right)^d, v = 0, \partial\Omega \text{ üzerinde} \right\},$$

$$Q := L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_\Omega q = 0 \right\}.$$

Ayrıca, $V \subset X$ uzayı X 'in diverjanssız alt kümesi olarak tanımlanır. X 'in dual uzayı H^{-1} tarafından tanımlılır ve normu aşağıdaki gibidir:

$$\|f\|_{-1} := \sup_{v \in X} \frac{|(f, v)|}{\|\nabla v\|}.$$

Teorem 2.1 (Hölder Eşitsizliği); $u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^q(\Omega)$ ile $p, q \in [0, \infty]$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. O hâlde,

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitliği sağlanır [15]. Buradan,

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır.

Açıklama 2.1 (Cauchy Schwarz Eşitsizliği); Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ alırsak Cauchy-Schwarz eşitsizliğini elde ederiz:

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Tanım 2.1 (Young Eşitsizliği); $a, b \geq 0$ olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{q} a^q + \frac{\varepsilon}{p} b^p$$

olur. Burada $p, q \leq 1$ ile $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olur [14]. Ayrıca young eşitsizliğinin en çok kullanılan hâli $p = q = 2$ durumudur:

$$ab \leq \frac{1}{2\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{2} b^2.$$

Lemma 2.1 (Gronwall Eşitsizliği); $f(t), g(t), \lambda(t) > 0$ ve $[0, T]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar olsun, öyle ki $f(t)$ hemen hemen her t için,

$$\frac{df}{dt} \leq \lambda(t)f(t) + g(t)$$

diferensiyel eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\forall t \in [0, T]$ için

$$f(t) \leq \exp \left\{ \int_0^t \lambda(s) ds \right\} \left\{ f(0) + \int_0^t g(s) ds \right\}$$

sağlanır.

Kararlılık ve yakınsama analizlerinde, genellikle Poincaré-Friedrichs eşitsizliği kullanılacaktır. Sadece etki alanının boyutuna bağlı olan sabit bir $C_p := C_p(\Omega)$ vardır öyle ki:

$$\|v\| \leq C_p \|\nabla v\|, \quad \forall v \in X. \quad (2.1)$$

Lemma 2.2. Hız ve basınç uzaylarının uygun sonlu eleman uzaylarının ayırık inf-sup koşulunu yani Ladyzenskaya-Breki-Babuska (LBB) koşulunun sağladığı varsayılır. Örneğin, β bir sabit olmak üzere,

$$\inf_{v \in X_h} \sup_{q \in Q_h} \frac{(q, \nabla \cdot v)}{\|\nabla v\| \|q\|} \geq \beta > 0$$

şartı sağlanır [16].

Tanım 2.2. Kararlılık ve hata analizinde sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından dolayı hız alanı ve basınç uzayları için standart fonksiyon uzayları $X = H_0^1(\Omega)$ ve $Q = L_0^2(\Omega)$ seçilmektedir. X 'in zayıf bir alt uzayı V aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$V := \{v \in X, (\nabla \cdot q, v) = 0, \forall q \in Q\}.$$

Uzaysal ayırıklaştırma sürecinde sonlu elemanlar yönteminin uygulanabilmesi için, Ω çözüm alanının π_h ile gösterilen uygun bir ince ağ yapısı ile ayırıklaştırılması gerekmektedir. Bu bağlamda tanımlanan sonlu elemanlar uzayları aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} X_h &\subset X, \\ Q_h &\subset Q. \end{aligned}$$

Sayısal yöntemin kararlılığını garantilemek amacıyla doğrusal olmayan terimler için $b^*: X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ skew-simetrik trilineer formu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [16]:

$$b^*(u, v, w) := \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)v, w) - \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)w, v). \quad (2.2.2)$$

$v, w \in X$ ve $u \in V$ için $b^*(u, v, w) = ((u \cdot \nabla)v, w)$ ve $b^*(u, v, v) = 0 \quad \forall u, v \in X'$ 'tir. Aşağıdaki lemmada verilen sınırları doğrusal olmayan terimlerde kullanacağız.

Lemma 2.3. $u, v, w \in X$ ve $v, \nabla v \in L^\infty(\Omega)$ için trilineer terimler aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir [16]:

$$b^*(u, v, w) \leq \frac{1}{2}(\|u\| \|\nabla v\|_\infty \|w\| + \|u\| \|\nabla w\| \|v\|_\infty),$$

$$b^*(u, v, w) \leq C(\Omega) \|\nabla u\| \|\nabla v\| \|\nabla w\|,$$

$$b^*(u, v, w) \leq C(\Omega) \|u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\| \|\nabla w\|.$$

τ_h , maksimum eleman çapı h olan düzenli bir ağ, $X_h \subset X$ ve $Q_h \subset Q$ sonlu eleman uzayları olsun. X_h 'ın ayrık diverjanssız alt uzayı V_h aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$V_h = \{v_h \in X_h : \forall q_h \in Q_h \text{ için } (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0\}. \quad (2.3.1)$$

X_h ve V_h uzaylarının yaklaşım özelliklerinin V 'deki sürekli vektör alanlarına karşı, eşdeğer olmasını sağlaması V_h uzayının en önemli özelliklerinden biridir:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|\nabla(u - v_h)\| \leq C \inf_{v_h \in X_h} \|\nabla(u - v_h)\|, \quad \forall u \in V. \quad (2.3.2)$$

Burada C , h ağ boyutundan bağımsızdır. $(0, T]$ zaman aralığında tanımlanan $v(t, x)$ fonksiyonları için aşağıdaki normlar tanımlanır.

$$\|v\|_{\infty, k} := \max_{0 \leq n \leq N} \|v(t^n, \cdot)\|_k, \quad \text{ve} \quad \|v\|_{m, k} := \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|v(t^n, \cdot)\|_k^m \right)^{1/m} \quad (2.3.4)$$

(X_h, Q_h) sonlu eleman uzaylarının $(k, k-1)$ dereceli parçalı polinomlarının seçimi için aşağıdaki yaklaşım özelliklerini sağladığını varsayıyoruz [12,13]:

$$\begin{aligned} \inf_{v \in X_h} \|u - v\| &\leq Ch^{k+1} |u|_{k+1}, & u &\in H^{k+1}(\Omega), \\ \inf_{v \in X_h} \|\nabla(u - v)\| &\leq Ch^k |u|_{k+1}, & u &\in H^{k+1}(\Omega), \\ \inf_{r \in Q_h} \|p - r\| &\leq Ch^{s+1} |p|_{s+1}, & p &\in H^{s+1}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

3. SAYISAL ANALİZ

Bu bölümde, NSD'nin sayısal analizi ele alınmaktadır. Bu bağlamda, yöntem önce kararlılık açısından, ardından hata analizi bakımından değerlendirilmiştir. Önerilen yönteme ait denklem aşağıda verilmiştir.

$$(u_t, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + b^*(u, u, v) - (p, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u) + \varepsilon(p_t, q) = (f, v). \quad (3.1)$$

Burada u hız, f kuvvet, p basınç, ν viskozite, ε yapay sıkıştırma (stabilizasyon) terimi, v , çözüm yapılan bölge Ω olmak üzere hız için $H_0^1(\Omega)$ uzayından alınan bir test fonksiyonu, q ise $L_0^2(\Omega)$ uzayından alınan bir test fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

3.1. Kararlılık Analizi

Lemma 3.1. $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ve $u, v \in X$; $p, q \in Q$ iken (3.1) denklemi

$$\|u(T)\|^2 + \nu \int_0^T \|\nabla u\|^2 dt + \varepsilon \|p(T)\|^2 \leq \nu^{-1} \int_0^T \|f\|_{-1}^2 dt + \|u(0)\|^2 + \varepsilon \|p(0)\|^2$$

şeklindedir.

İspat. (3.1) 'deki denklemde $v=u$ ve $q = p$ seçilirse

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \nu \|\nabla u\|^2 + b^*(u, u, u) - (p, \nabla \cdot u) + (p, \nabla \cdot u) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \|p\|^2 = (f, u)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \nu \|\nabla u\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \|p\|^2 = (f, u)$$

elde edilir. Burada sağ taraftaki terim üstten sınırlandırılır:

$$(f, u) \leq \frac{1}{2\nu} \|f\|_{-1}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla u\|^2.$$

Düzenlenip,

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + \nu \|\nabla u\|^2 + \varepsilon \frac{d}{dt} \|p\|^2 \leq \nu^{-1} \|f\|_{-1}^2$$

0'dan T 'ye integral alınır ve böylece

$$\|u(T)\|^2 + \nu \int_0^T \|\nabla u\|^2 dt + \varepsilon \|p(T)\|^2 \leq \nu^{-1} \int_0^T \|f\|_{-1}^2 dt + \|u(0)\|^2 + \varepsilon \|p(0)\|^2$$

denklemi elde edilir. Böylece kararlılık tamamlanır.

3.2. Hata Analizi

Ayrık inf-sup koşuluna ek olarak, Lemma 2.2 'de verilen yaklaşımların hız-basınç uzaylarının seçimi için geçerli olduğu varsayılmaktadır.

Lemma 3.2.1. $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u^h, v^h \in X^h$; $p^h, q^h \in Q^h$ iken (3.1) denklemi için $e_u = u - u^h$, $e_p = p - p^h$ olarak tanımlanan hata, aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\begin{aligned} \|e_u(T)\|^2 + \varepsilon \|e_p(T)\|^2 + \nu \|\nabla e_u\|^2 &\leq C e^{\alpha(t)} \left(\|e_u(0)\|^2 + \varepsilon \|e_p(0)\|^2 + \varepsilon \|p_t\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \right) \\ &\quad + C \nu^{-1} C(\nu, \Omega) h^2 h^{2m} \left(\|u_t\|_{L^2(0,T;H^{m+1}(\Omega))}^2 + \|p_t\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + C \nu^{-1} \varepsilon h^{2m} \left(\|u_t\|_{L^2(0,T;H^{m+1}(\Omega))}^2 + \|p_t\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + C \nu^{-1} h^{2m} \left(\|u\|_{L^4(0,T;H^{m+1}(\Omega))}^2 + \|p\|_{L^4(0,T;H^m(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

İspat.

(3.1) denkleminde verilen NSD'nin zayıf formunda test fonksiyonunun özel bir seçimi için elde edilen ifade aşağıdaki gibidir:

$$(u_t, v^h) + v(\nabla u, \nabla v^h) + b^*(u, u, v^h) - (p, \nabla \cdot v^h) + (q^h, \nabla \cdot u) + \varepsilon(p_t, q^h) = (f, v^h) + \varepsilon(p_t, q^h) \quad (3.2)$$

$$(u_t^h, v^h) + v(\nabla u^h, \nabla v^h) + b^*(u^h, u^h, v^h) - (p^h, \nabla \cdot v^h) + (q^h, \nabla \cdot u) + \varepsilon(p_t, q^h) = (f, v^h). \quad (3.3)$$

(3.2) denkleminde (3.3) denklemi çıkarılır, $e_u = u - u^h$, $e_p = p - p^h$ alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(e_t, v^h) + v(\nabla e_u, \nabla v^h) + b^*(u, u, v^h) - b^*(u^h, u^h, v^h) - (e_p, \nabla \cdot v^h) + \varepsilon(e_{p_t}, q^h) + (q^h, \nabla \cdot e_u) = \varepsilon(p_t, q^h).$$

$$e_u = u - \tilde{u} + \tilde{u} - u^h = \eta_u - \phi_u^h, \quad e_p = p - \tilde{p} + \tilde{p} - p^h = \eta_p - \phi_p^h \text{ olup,}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \phi_u^h, v^h \right) + v(\nabla \phi_u^h, \nabla v^h) + b^*(u, u, v^h) - b^*(u^h, u^h, v^h) - (\phi_p^h, \nabla \cdot v^h) + \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \phi_p^h, q^h \right) \\ & + (q^h, \nabla \cdot \phi_u^h) + \left(\frac{d}{dt} \eta_u, v^h \right) + v(\nabla \eta_u, \nabla v^h) - (\eta_p, \nabla \cdot v^h) + \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \eta_p, q^h \right) + \varepsilon(p_t, q^h) \\ & + (q^h, \nabla \cdot \eta_u) \end{aligned}$$

elde edilir. Test fonksiyonları için $v^h = \phi_u^h$ ve $q^h = \phi_p^h$ alınır:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \phi_u^h, \phi_u^h \right) + v \|\nabla \phi_u^h\|^2 + b^*(u, u, \phi_u^h) - b^*(u^h, u^h, \phi_u^h) - (\phi_p^h, \nabla \cdot \phi_u^h) + \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \phi_p^h, \phi_p^h \right) \\ & + (\phi_p^h, \nabla \cdot \phi_u^h) = \left(\frac{d}{dt} \eta_u, \phi_u^h \right) + \varepsilon(p_t, \phi_p^h). \end{aligned}$$

Buradaki trilineer terimler için

$$\begin{aligned} b^*(u, u, \phi_u^h) - b^*(u^h, u^h, \phi_u^h) &= b^*(u, u, \phi_u^h) - b^*(u^h, u, \phi_u^h) + b^*(u^h, u, \phi_u^h) - b^*(u^h, u^h, \phi_u^h) \\ &= b^*(e_u, u, \phi_u^h) + b^*(u^h, e_u, \phi_u^h) \\ &= b^*(\eta_u, u, \phi_u^h) - b^*(\phi_u^h, u, \phi_u^h) + b^*(u^h, \eta_u, \phi_u^h) \end{aligned}$$

şeklinde düzenleme yapılmıştır. Denklemin son hâli,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\phi_u^h\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h\|^2] + v \|\phi_u^h\|^2 &= \left(\frac{d}{dt} \eta_u, \phi_u^h \right) + \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \eta_p, \phi_p^h \right) + \varepsilon(p_t, \phi_p^h) + b^*(\eta_u, u, \phi_u^h) \\ &\quad - b^*(\phi_u^h, u, \phi_u^h) + b^*(u^h, \eta_u, \phi_u^h) \\ &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - T_5 + T_6 \end{aligned}$$

şeklinde. Sağ taraftaki terimler sınırlandırılırsa,

$$T_1: \left(\frac{d}{dt} \eta_u, \phi_u^h \right) \leq \left\| \frac{d}{dt} \eta_u \right\|_{-1} \|\nabla \phi_u^h\| \leq (v^{-1}) \left\| \frac{d}{dt} \eta_u \right\|_{-1}^2 + \frac{v}{8} \|\nabla \phi_u^h\|^2$$

$$T_2: \varepsilon \left(\frac{d}{dt} \eta_p, \phi_p^h \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{d}{dt} \eta_p \right\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\phi_p^h\|^2$$

$$T_3: \varepsilon(p_t, \phi_p^h) \leq \frac{\varepsilon}{2} \|p_t\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\phi_p^h\|^2$$

$$\begin{aligned} T_4: b^*(\eta_u, u, \phi_u^h) &= \frac{1}{2}(\eta_u \cdot \nabla u, \phi_u^h) - \frac{1}{2}(\eta_u \cdot \nabla \phi_u^h, u) \\ &\leq \frac{1}{2}[\|\eta_u\| \|\nabla u\| \|\phi_u^h\| + \|\eta_u\| \|\nabla \phi_u^h\| \|u\|] \\ &\leq C \|\nabla \eta_u\| \|\nabla u\| \|\phi_u^h\| \\ &\leq C \nu^{-1} \|\nabla u\|^2 \|\nabla \eta_u\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla \phi_u^h\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_5: b^*(\phi_u^h, u, \phi_u^h) &\leq C \|\phi_u^h\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \phi_u^h\|^{\frac{3}{2}} \|\nabla u\| \\ &\leq C \nu^{-1} \|\phi_u^h\|^2 \|\nabla u\|^4 + \frac{\nu}{8} \|\nabla \phi_u^h\|^2 \end{aligned}$$

$$T_6: b^*(u^h, \eta_u, \phi_u^h) \leq C \nu^{-1} \|u^h\| \|\nabla u^h\| \|\nabla \eta_u\|^2 + \frac{\nu}{8} \|\nabla \phi_u^h\|^2$$

olur ve tüm sınırlamalar yerine koyulup 2 ile çarpılır.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\|\phi_u^h\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h\|^2] + \nu \|\phi_u^h\|^2 &\leq C \nu^{-1} \left[\left\| \frac{d}{dt} \eta_u \right\|_{-1}^2 + \|\nabla u\|^2 \|\nabla \eta_u\|^2 + \|\phi_u^h\|^2 \|\nabla u\|^4 \right. \\ &\quad \left. + \|u^h\| \|\nabla u^h\| \|\nabla \eta_u\|^2 \right] + \varepsilon \left\| \frac{d}{dt} \eta_p \right\|_{-1}^2 + \varepsilon \|p_t\|^2 + 2\varepsilon \|\phi_p^h\|^2 \end{aligned}$$

$y(t) = \|\phi_u^h\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h\|^2$ olarak alınır. $\alpha(t) := \max\{C \nu^{-1} \|\nabla u\|^4, 2\}$ olup

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + \nu \|\nabla \phi_u^h\|^2 &\leq \alpha(t) y(t) + C \nu^{-1} \left[\left\| \frac{d}{dt} \eta_u \right\|_{-1}^2 + \|\nabla u\|^2 \|\nabla \eta_u\|^2 + \|\phi_u^h\|^2 \|\nabla u\|^4 \right. \\ &\quad \left. + \|u^h\| \|\nabla u^h\| \|\nabla \eta_u\|^2 \right] + \varepsilon \left\| \frac{d}{dt} \eta_p \right\|_{-1}^2 + \varepsilon \|p_t\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem Gronwall eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} \eta_u \right\|_{-1}^2 + \|\nabla u\|^2 \|\nabla \eta_u\|^2 + \|\phi_u^h\|^2 \|\nabla u\|^4 + \|u^h\| \|\nabla u^h\| \|\nabla \eta_u\|^2 + \varepsilon \left\| \frac{d}{dt} \eta_p \right\|_{-1}^2 + \varepsilon \|p_t\|^2 \\ + C \nu^{-1} \int_0^T [\|\phi_u^h(T)\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h(T)\|^2 + \nu \|\nabla \phi_u^h\|^2 \\ \leq C e^{\alpha(t)} (\|\phi_u^h(0)\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h(0)\|^2) \int dt \end{aligned}$$

elde edilir ve Hölder eşitsizliği uygulanır:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla u\|^2 \|\nabla \eta_u\|^2 dt &\leq \|\nabla u\|_{L^4(0,T;L^2(\Omega))}^2 \|\nabla \eta_u\|_{L^4(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ \int_0^T \|u^h\| \|\nabla u^h\| \|\nabla \eta_u\|^2 dt &\leq \|u^h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\nabla u^h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\nabla \eta_u\|_{L^4(0,T;L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Stokes projection hatasındaki eşitsizlikten yararlanarak

$$\begin{aligned} \|p - \tilde{p}\| &\leq \inf_{q^h \in Q^h} \left(1 + \frac{1}{\beta^h}\right) \|p - p^h\| + \frac{\nu}{\beta^h} \|\nabla(u - \tilde{u})\| \\ \nu \|\nabla(u - \tilde{u})\|^2 &\leq C \left[\nu \inf_{v^h \in X^h} \|\nabla(u - u^h)\|^2 + \nu^{-1} \inf_{q^h \in Q^h} \|p - p^h\| \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Yakınsama özellikleri kullanılarak

$$\inf_{v^h \in X^h} \{ \|u - v^h\| + h \|\nabla(u - v^h)\| \} \leq Ch^{m+1} |u|_{m+1}$$

$$\inf_{q^h \in Q^h} \|p - q^h\| \leq Ch^m |p|_m$$

denklemleri elde edilir ve Discrete inf-sup koşulu ile,

$$\inf_{q \in Q^h} \sup_{v \in X^h} \frac{(q, \nabla \cdot v^h)}{\|q^h\| \|\nabla v^h\|} \geq \beta > 0$$

eşitsizliğini yazarız. Eşitsizliğin en son hâline Stokes projeksiyon hatası kullanılır:

$$\begin{aligned} \|\phi_u^h(T)\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h(T)\|^2 + \nu \|\nabla \phi_u^h\|^2 &\leq Ce^{\alpha(t)} \left(\|\phi_u^h(0)\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h(0)\|^2 + \varepsilon \|p_t\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \right) \\ &+ C\nu^{-1}C(\nu, \Omega)h^2 \left(\inf_{v^h \in X^h} \|\nabla(u - v^h)_t\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \inf_{q^h \in Q^h} \|(p - q^h)\|_{L^4(0,T;L^2)}^2 \right) \\ &+ C\nu^{-1}\varepsilon \left(\inf_{v^h \in X^h} \|\nabla(u - v^h)_t\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \inf_{q^h \in Q^h} \|(p - q^h)\|_{L^4(0,T;L^2)}^2 \right) \\ &+ C\nu^{-1}C(\nu, \Omega) \left(\inf_{v^h \in X^h} \|\nabla(u - v^h)_t\|_{L^4(0,T;L^2)}^2 + \inf_{q^h \in Q^h} \|(p - q^h)\|_{L^4(0,T;L^2)}^2 \right). \end{aligned}$$

Son olarak yakınsama özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|\phi_u^h(T)\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h(T)\|^2 + \nu \|\nabla \phi_u^h\|^2 &\leq Ce^{\alpha(t)} \left(\|\phi_u^h(0)\|^2 + \varepsilon \|\phi_p^h(0)\|^2 + \varepsilon \|p_t\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \right) \\ &+ C\nu^{-1}C(\nu, \Omega)h^2h^{2m} \left(\|u_t\|_{L^2(0,T;H^{m+1}(\Omega))}^2 + \|p_t\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}^2 \right) \\ &+ C\nu^{-1}\varepsilon h^{2m} \left(\|u_t\|_{L^2(0,T;H^{m+1}(\Omega))}^2 + \|p_t\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}^2 \right) \\ &+ C\nu^{-1}h^{2m} \left(\|u\|_{L^4(0,T;H^{m+1}(\Omega))}^2 + \|p\|_{L^4(0,T;H^m(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada m uzaysal yakınsama mertebesidir.

4. SAYISAL TEST

Bu bölümde, AC yönteminin sayısal başarımı, farklı ağ çözünürlükleri, Reynolds sayıları ve ε parametresi altında gerçekleştirilen testler aracılığıyla değerlendirilmiş; elde edilen sonuçlar, Ceza ve Grad-Div yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Testler $[0, 1]$ zaman aralığında yapılmıştır. Sınır koşulları, alanın yatay duvarlarında ve silindirin çevresinde kaymaz olarak seçilmiştir. Bu testler için kullandığımız kodlar, kamu lisanslı bir sonlu elemanlar yazılımı olan Freefem++ [4] ile hazırlanmıştır.

4.1. Yakınsama Çalışması

Sayısal yöntemlerin doğruluğunu değerlendirmek amacıyla kullanılan analitik çözüm aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$u = \begin{bmatrix} e^t \cos(y) \\ e^t \sin(x) \end{bmatrix}, p = (x - y)(1 + t).$$

Bu değerler NSD'de yerine koyulur ve f fonksiyonu elde edilir:

$$f = \left[\frac{e^t(1+v)\cos(y) - e^{2t}\sin(x)\sin(y) + (1+t)}{e^t(1+v)\sin(x) + e^{2t}\cos(x)\cos(y) - (1+t)} \right].$$

Çizelge 1 ve Çizelge 2' de sunulan sayısal sonuçlar, yapay sıkıştırılabilirlik yönteminin ağ inceltme açısından ikinci dereceden yakınsama davranışı sergilediğini göstermektedir. Özellikle, ağ inceltildikçe hata değerleri sistematik olarak azalmakta ve gözlemlenen yakınsama oranları yaklaşık 2'dir, bu da kullanılan sonlu elemanlar ayrıştırmasının teorik hata tahminleriyle tutarlıdır. Bu, yöntemin sıkıştırılmaz Navier-Stokes denklemlerini yaklaştırmada doğruluğunu ve güvenilirliğini teyit etmektedir. Çizelge 1'de, yakınsama oranları farklı ayrıştırma düzeylerinde aynı kalmaktadır, bu da yöntemin kararlılığını ve ince ayrıştırma hesaplamaları için uygunluğunu göstermektedir.

Çizelge 1. Farklı Ayrıştırma Çözünürlükleri İçin Hata Değerleri ve Oranları ($\Delta t=0,000625$; $Re=2500$; $\varepsilon=0,01$)

h	$\ \nabla(u - u^h)\ _{penalty}$	Oran	$\ \nabla(u - u^h)\ _{AC}$	Oran	$\ \nabla(u - u^h)\ _{grad}$	Oran
2^{-1}	0,00065853	-	0,000658522	-	0,000646883	-
2^{-2}	0,000165028	1,996	0,000165027	1,996	0,000157294	2,04
2^{-3}	4,12834e-5	1,999	4,12916e-5	1,998	3,85439e-5	2,02
2^{-4}	1,03232e-5	1,999	1,03618e-5	1,994	9,57037e-6	2,00
2^{-5}	2,58486e-6	1,997	2,73716e-6	1,920	2,40184e-6	1,99

Sabit uzaysal ayrıştırmaya ($n = 100$) karşılık gelen Çizelge 2'de, yapay sıkıştırılabilirlik yönteminin 1,6 ile 1,9 arasında bir yakınsama oranını koruduğunu ortaya koymaktadır. Bu, ideal ikinci dereceden davranışın biraz altında olsa da, sonuçlar kabul edilebilir sınırlar içinde kalmakta ve yöntemin bu ayarlar altında hâlâ etkili olduğunu göstermektedir.

Çizelge 2. Sabit Ağ Boyutu İçin Hata ve Yakınsama Oranları ($n = 100$; $Re=2500$; $\varepsilon=0,01$)

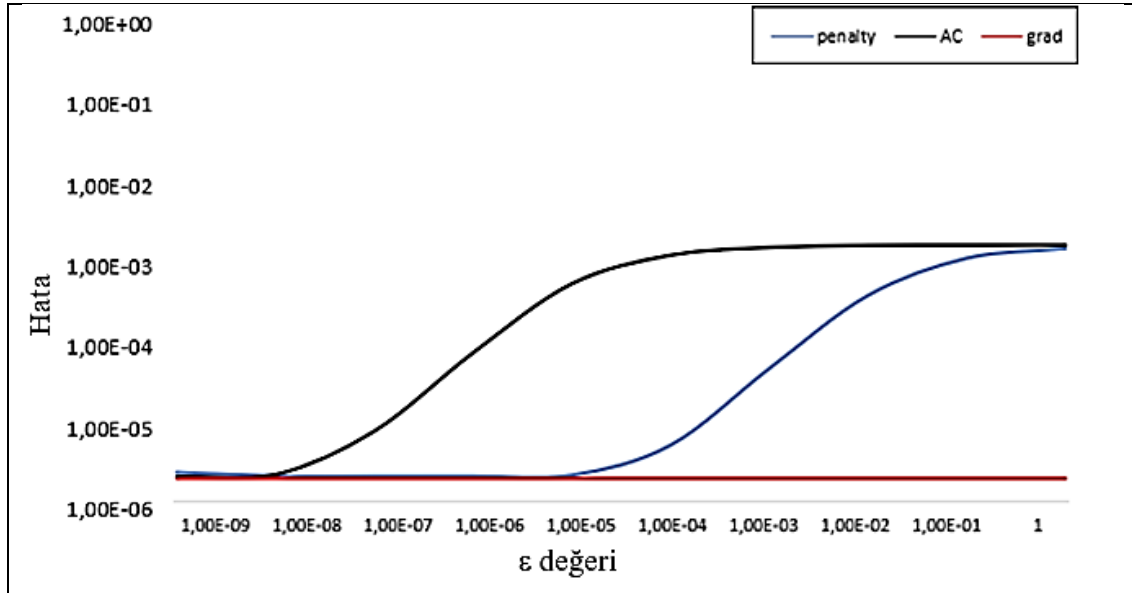
Δt	$\ \nabla(u - u^h)\ _{penalty}$	Oran	$\ \nabla(u - u^h)\ _{AC}$	Oran	$\ \nabla(u - u^h)\ _{grad}$	Oran
10^{-1}	0,00185901	-	0,00183572	-	0,00179403	-
20^{-1}	0,000505605	1,87	0,000496507	1,89	0,000477068	1,91
40^{-1}	0,000170521	1,57	0,000151341	1,71	0,000138816	1,78
80^{-1}	5,09441e-5	1,74	4,68766e-5	1,70	3,91554e-5	1,83

Çizelge 3, yapay sıkıştırılabilirlik katsayısı veya Reynolds sayısının farklı seçimleriyle ilişkili olabilecek çeşitli parametreler için mutlak hata değerlerini göstermektedir. Hataların tutarlı bir şekilde düşük olması, önerilen yaklaşımın yüksek doğruluğunu daha da pekiştirmektedir.

Çizelge 3. Farklı Reynolds Sayıları İçin Mutlak Hata Değerlerinin Karşılaştırılması ($n=100$, $\Delta t=0,000625$; $\epsilon=0,01$)

Re	$\ \nabla(u - u^h)\ _{penalty}$	$\ \nabla(u - u^h)\ _{AC}$	$\ \nabla(u - u^h)\ _{grad}$
1	1,23806e-6	9,51367e-7	3,73816e-7
100	1,83325e-5	2,10952e-6	1,05228e-6
1000	0,000121881	3,22271e-6	1,5492e-6

Grafik 1'de gösterilen grafiksel analiz, sayısal çözümün yapay sıkıştırılabilirlik parametresi ϵ 'daki değişikliklere duyarlılığını vurgulamaktadır. Sonuçlar, sayısal kararlılık ve yaklaşım doğruluğu arasında denge sağlamak için ϵ 'un optimal seçiminin gerekli olduğunu göstermektedir. ϵ 'un çok küçük değerleri sistemde sertliğin artmasına neden olabilirken, aşırı büyük değerler basınç alanında yapay bozulmalara yol açabilir.



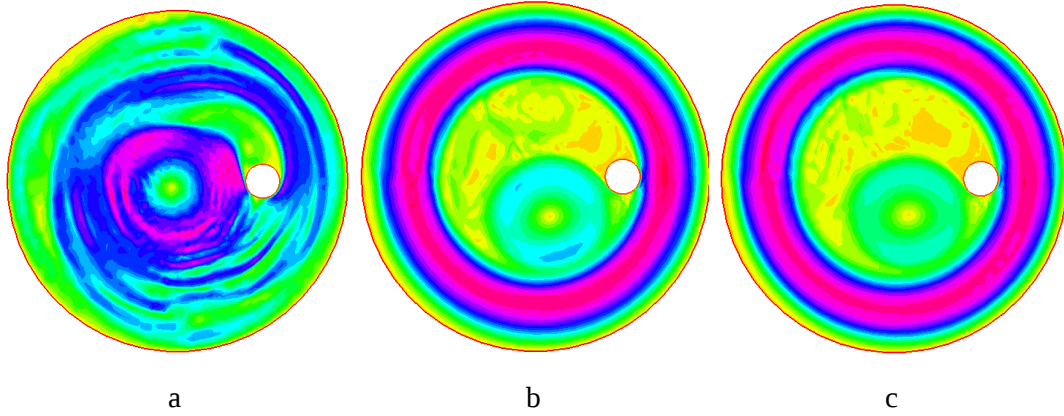
Grafik 1. ϵ 'nin, AC, Ceza ve Grad-Div Yöntemleriyle Elde Edilen Sayısal Çözümler Üzerindeki Etkisinin Karşılaştırılması ($Re = 1$, $\Delta t=0,000625$ ve $n = 32$)

AC yöntemi, sıkıştırılmaz NSD için güvenilir ve doğru çözümler sunar ve Ceza ve grad-div stabilizasyon teknikleriyle karşılaştırıldığında olumlu sayısal performans gösterir. Yöntemin yakınsama davranışı, hata dayanıklılığı ve duyarlılık özellikleri, sonlu elemanlar ayrıştırılmaları bağlamında sıkıştırılmaz akış problemlerini çözmek için geçerli ve rekabetçi bir alternatif olduğunu göstermektedir.

4.2. İki Kapalı Daire Arasındaki Akış

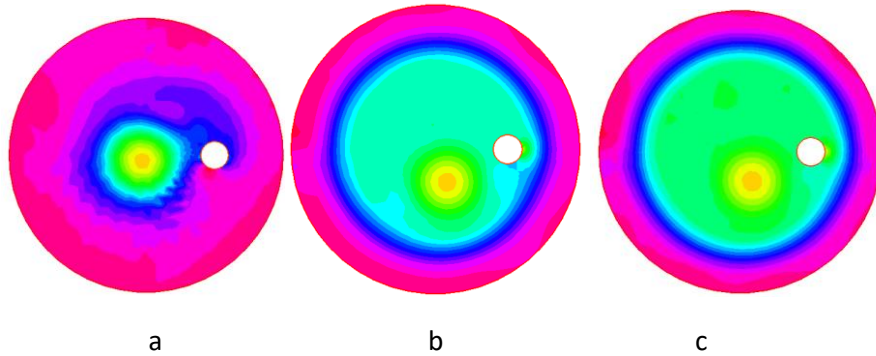
Bu çalışmadaki bölge $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y): (x - 0.5)^2 + y^2 \geq (0.1)^2\}$ şeklinde tanımlanmıştır. Şekil 1, $Re = 1000$ için farklı yarıçaplara sahip iki kapalı daire arasında hesaplanan hız alanını göstermektedir. Bu şekil, AC, Ceza ve Grad-div yöntemlerinin performansını karşılaştırmaktadır. İç dairenin eksantrik yerleşimi nedeniyle geometrik asimetri içeren akış konfigürasyonu, sayısal çözümler için zorluk teşkil eden karmaşık, asimetrik bir akış modeli oluşturmaktadır.

Genel olarak, Şekil 1, karmaşık akış davranışını yakalamada Yapay Sıkıştırılabilirlik yönteminin etkinliğini doğrulamakta ve söz konusu test vakası için hem doğruluk hem de akış özelliği çözünürlüğü açısından Grad-div ve Ceza yöntemlerinden daha iyi performans göstermektedir.



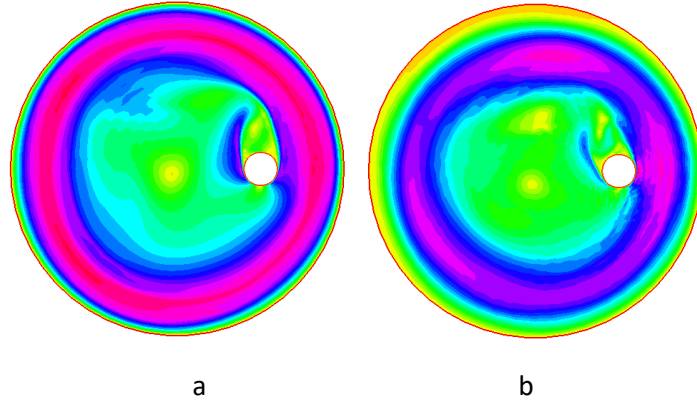
Şekil 1. $Re=1000$ $\Delta t = 0,05$ $T = 20$ $\epsilon = 0,00005$ için a) Grad-div b) AC c) Ceza

Şekil 2, $Re = 1000$ Reynolds sayısında iki kapalı daire arasındaki akış için AC, Ceza ve Grad-div yöntemlerinden elde edilen basınç alanının, karşılaştırmalı bir görselleştirmesini sunmaktadır. Grad-Div ve Ceza yöntemleri, basınç alanına doğrudan etki eden ek terimler içerdiğinden, Şekil 2'deki basınç karşılaştırması mutlak değerler açısından değil, basınç dağılımının genel yapısı ve çözüm kararlılığı açısından değerlendirilmelidir. Bu tür geometrik olarak asimetric alanlarda basınç dağılımı, yöntemin sıkıştırılabilirliği uygulayabilme ve basınç-hız bağlantısını doğru bir şekilde yakalayabilme yeteneğinin önemli bir göstergesidir. AC yöntemiyle basınç alanının doğru çözünürlüğü, basınç stabilizasyonunu ele almadaki gücünü ve sıkıştırılmaz akışları yaklaştırmadaki etkinliğini vurgular.



Şekil 2. $Re=1000$ $\Delta t = 0,05$ $T = 20$ $\epsilon = 0,0005$ için a) Grad-div b) AC c) Ceza

Şekil 3, $Re = 1000$ Reynolds sayısında iki kapalı daire arasındaki akış için sayısal çözüm kalitesine yapay sıkıştırılabilirlik parametresi ϵ 'nin etkisini göstermektedir. Şekil 3a nispeten büyük bir değer olan $\epsilon=1e-1$ ile elde edilen sonucu gösterirken, Şekil 3b önemli ölçüde daha küçük bir değer olan $\epsilon=1e-8$ ile hesaplanan çözümü göstermektedir. Karşılaştırma, Yapay Sıkıştırılabilirlik yönteminin, sıkıştırılmaz sınırdaki basınç ve hız arasındaki bağlantıyı yöneten önemli bir parametre olan ϵ seçimine duyarlılığını vurgulamaktadır.

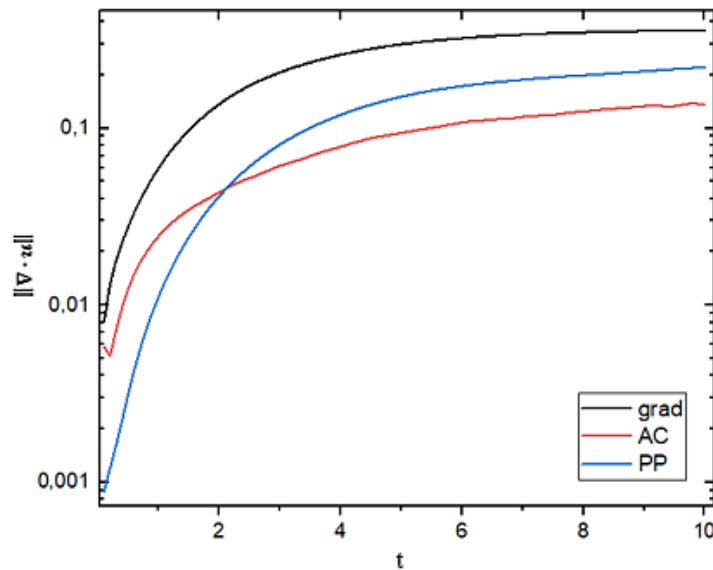


Şekil 3. a) AC $\epsilon=1e-1$; b) AC $\epsilon=1e-8$; $Re=1000$, $\Delta t = 0,01$

Grafik 2, AC, Ceza ve Grad-Div stabilizasyon yöntemleriyle çözülen sıkıştırılmaz Navier-Stokes problemlerinde elde edilen hata değerlerinin zamana bağlı değişimini göstermektedir. Grafikte, yüksek Reynolds sayısı ($Re = 1000$), belirli bir zaman adımı ($\Delta t = 0,1$) ve yapay sıkıştırılabilirlik parametresi ($\epsilon = 10^{-2}$) altında, her üç yöntemin karşılaştırmalı hata analizi sunulmuştur.

Grad-Div yöntemi, başlangıçta hızlı bir hata artışı gösterir ve zamanla doygunluğa ulaşır. Ancak bu yöntemin hata seviyesi, tüm zaman dilimi boyunca diğer yöntemlere kıyasla belirgin şekilde daha yüksektir. Bu durum, Grad-Div yaklaşımının bu parametreler altında daha düşük nümerik doğruluk sunduğunu ve çözümde daha fazla sapma içerdiğini göstermektedir. Ceza yöntemi, Grad-Div'e kıyasla daha düşük hata ile başlamakta ve daha kontrollü bir artış göstermektedir. AC yöntemi, zamanın ilk adımlarında diğer yöntemlerle benzer bir hata seviyesi gösterse de daha sonra hata artışını baskılamakta ve zamana bağlı hata eğrisini daha düşük bir seviyede dengelemektedir. Bu durum, AC yönteminin sayısal kararlılık ve uzun vadede hata kontrolü bakımından üstünlüğünü açıkça ortaya koymaktadır.

AC yönteminin, belirli bir ϵ değeri altında, yüksek Reynolds sayılarında dahi kararlı ve doğru çözümler üretebildiğini göstermektedir. Hata değerlerinin zamana bağlı davranışı, AC yönteminin özellikle uzun süreli simülasyonlarda daha kararlı ve fiziksel olarak tutarlı sonuçlar sunduğunu açıkça göstermektedir. Bu bulgu, AC yöntemini, Ceza ve Grad-Div yaklaşımlarına kıyasla sayısal verimlilik ve doğruluk açısından öne çıkarmaktadır.



Grafik 2. AC, Ceza ve Grad-Div yöntemleriyle elde edilen çözümler için hata değerlerinin zamana bağlı değişimi ($Re = 1000$, $\Delta t = 0,1$, $\epsilon = 10^{-2}$)

5. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, AC yöntemi ile Ceza ve Grad-Div yöntemleri sıkıştırılamaz akış problemlerinde karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Yapılan sayısal testler, AC yönteminin hem hata küçüklüğü hem de yakınsama davranışı açısından yüksek doğruluk sunduğunu ortaya koymuştur. Özellikle ağ inceltme analizlerinde gözlemlenen yaklaşık ikinci dereceden yakınsama, yöntemin teorik temellerle uyumunu doğrulamaktadır. Reynolds sayısının ve AC parametresinin etkilerinin incelendiği çalışmalar, yöntemin kararlılık ve duyarlılık açısından güvenilirliğini göstermektedir. Ayrıca, iki kapalı daire arasında oluşturulan asimetrik akış geometrisinde elde edilen görsel ve nicel sonuçlar, AC yönteminin karmaşık alanlarda başarılı bir şekilde uygulanabileceğini göstermektedir. Zamana bağlı hata analizi, AC yönteminin uzun vadeli simülasyonlarda Ceza ve Grad-Div yöntemlerine kıyasla daha düşük hata birikimi ile daha kararlı sonuçlar verdiğini göstermektedir. Bu yönüyle, AC yöntemi sıkıştırılamaz NSD'nin çözümünde, mevcut stabilizasyon tekniklerine güçlü ve rekabetçi bir alternatif olarak değerlendirilmektedir.

TEŞEKKÜR

Bu makale Damla Kayıhan'ın 'Navier-Stokes denklemleri için yapay sıkıştırma metodunun nümerik analizi' adlı yüksek lisans tezinden üretilmiştir. Öğrenimi boyunca TÜBİTAK-BİDEB 2210/A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamındaki destekleri için TÜBİTAK'a ve BİDEB'e tüm teşekkürlerimizi sunarız.

YAZARLAR'IN KATKI ORANLARI

Damla Kayıhan: Metodoloji, İçerik analizi, Materyal temini, Makalenin yazımı-Orijinal taslak. **Gülnur Haçat:** Metodoloji, Yazılım, Araştırma, Makalenin yazımı- İnceleme ve Düzenleme. **Aytekin Çıbık:** Danışman/Kontrolörlük, Kavramlaştırma, Deney sonuçlarının doğruluğunu kontrolü, Yazılım.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması/çakışması bulunmamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Foias, C., Manley, O., Rosa, R., Temam, R., and Meng, J. (2002). Navier-Stokes equations and turbulence. *Encyclopedia of Math and its Applications, Applied Mechanics Reviews*, 55(3), B57-B57.
- [2] Layton, W. (2008). *Introduction to the numerical analysis of incompressible viscous flows*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Pennsylvania, United States.
- [3] Chorin, A. J. (1967). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 2(1), 12-26.
- [4] Hecht, F. (2012). New development in FreeFem. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4), 251-266.
- [5] Akbaş, M., and Bowers, A. (2021). Improving accuracy in the Leray model for incompressible nonisothermal flows via adaptive deconvolution-based nonlinear filtering. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(8), 6679-6699.
- [6] John, V., Linke, A., Merdon, C., Neilan, M., and Rebholz, L. G. (2017). On the divergence constraint in mixed finite element methods for incompressible flows. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 59(3), 492-544.
- [7] Bowers, A. L., and Rebholz, L. G. (2013). Numerical study of a regularization model for incompressible flow with deconvolution-based adaptive nonlinear filtering. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 258, 1-12.
- [8] Layton, W., Manica, C. C., Neda, M., and Rebholz, L. G. (2008). Numerical analysis and computational testing of a high accuracy Leray-deconvolution model of turbulence. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 24(2), 555-582.
- [9] Zhang, S. (2005). A new family of stable mixed finite elements for the 3D Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 74(250), 543-554.
- [10] Brenner, S. C., and Scott, L. R. (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York.

- [11] Hill, R. (2010). *Benchmark Testing the α -models of Turbulence*. A project presented to the Graduate School of Clemson University Press.
- [12] Cappanera, L., and Giordano, S. (2025). *Artificial Compressibility Method for The Incompressible Navier–Stokes Equations With Variable Density*. Cornell University Press.
- [13] Lundgren, L., and Nazarov, M. (2023). *A High-Order Artificial Compressibility Method Based on Taylor Series Time-Stepping for Variable Density Flow*. Cornell University Press.
- [14] De Frutos, J., García-Archilla, B., John, V., and Novo, J. (2017). Analysis of the grad-div stabilization for the time-dependent Navier–Stokes equations with inf-sup stable finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(4), 2195–2218.
- [15] Xie, X. (2021). *On Adaptive Grad-Div Parameter Selection*. Cornell University Press.
- [16] Kaya, M., ve Dinlemez Kantar, Ü. (2018). *Sobolev Uzayları ve Eliptik Sınır Değer Problemlerine Giriş* (1. Baskı). Ankara: Palme Yayınevi.