

OLASILIKLI PERT ANALİZİNDE KULLANILAN BETA
DAĞILIMININ BEKLENEN DEĞERİNİN HESABINDA ORTAYA
ÇIKABİLECEK HATALARIN PARAMETRİK OLARAK
İNCELENMESİ

Yrd. Doç. Dr. Osman UNUTULMAZ*

ABSTRACT

The modal value of the beta distribution is a function of the upper and lower limits of the range. That is, for a given range, the modal value of the distribution is determinable. However, in probabilistic pert models, along with the upper and lower limits, a modal value is also estimated. The difference between the estimated and the calculated modal values causes an error in expected value which is obtained using the lower limit, upper limit and the modal value.

In this paper, necessary tools are developed and the magnitudes of errors caused by the estimated modal values are evaluated. Consequently, it is pointed out that the deviation in expected value may be as much as % 30 of the range.

I — G İ R İ Ő

Pert analizi uygulamasında beta dağılımının beklenen değeri, en küçük, en muhtemel (Modal) ve en büyük değerler seçildikten sonra hesaplanmaktadır. Ancak, pert analizinde kullanılan özel beta dağılımını tanımlamak için en küçük ve en büyük değerleri uygun bir şekilde seçmek yeterlidir. Modal değer uç değerlerin fonksiyonu olduğu için ayrıca bir modal değer seçilemez. Uç değerlerle birlikte ayrıca bir de modal değer seçilerek hesaplanan beklenen değer uç değerlerle tanımlanan beta dağılımının gerçek beklenen değerinden büyük sapmalar gösterebilir. Bu makalede, ortaya çıkabilecek söz konusu sapmaların boyutları yayılma alanının bir fonksiyonu olarak incelenmektedir.

(*) Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Öğretim Üyesi.

II — UYGULAMADA BEKLENEN DEĞER HESABI

Özel beta dağılımının beklenen değeri,

$$E(T) = \frac{k + 4m + b}{6} \quad (1)$$

formülü yardımıyla hesaplanmakta olup; $E(T)$ beklenen değeri, k en küçük, m modal ve b de en büyük değeri ifade etmektedirler.

Bir proje safhasının tamamlanma süresinin özel bir beta dağılımı gösterdiği kabul edildiğinde beklenen tamamlanma süresini bulmak için yayılma alanının alt ve üst sınırları ile birlikte bu alan içinden bir de modal değer seçilmekte (1, 2, 3) ve 1 nolu eşitlik kullanılarak bir beklenen tamamlanma süresi hesaplanmaktadır.

III — PARAMETRİK MODAL VE BEKLENEN DEĞERLER

Daha önce de açıklandığı gibi, uygulamada modal değer proje safhalarının durumuna göre yayılma alanı içerisinde seçilen bir değerdir. Dağılımın sola çarpıklığı modal değer yayılma alanının orta noktasının sağında ve sağa çarpıklığı da modal değer söz konusu orta noktanın solunda oluşu ile belirlenir. Yayılma alanının orta noktası bu alanı sınırlayan en küçük ve en büyük değerlerin aritmetik ortalamasıdır. Simetrik dağılımda modal değerle beklenen değerler üst üste çakışırlar. Beklenen değerde ortaya çıkacak sapmaları hesaplayabilmek için modal değer, uç değerler ve bir de α parametresi kullanarak, burada;

$$m = k + \alpha \left(\frac{b - k}{2} \right); \quad \begin{array}{l} 1 < \alpha < 2 \text{ Sola çarpık dağılımın} \\ \text{modal değeri} \\ \alpha = 1 \text{ Simetrik dağılımın} \\ \text{modal değeri} \\ 0 < \alpha < 1 \text{ Sağa çarpık dağılımın} \\ \text{modal değeri} \end{array} \quad (2)$$

şeklinde yazılmıştır. Böyle bir yazılışla modal değer yayılma alanı içerisinde alabileceği bütün değerler parametrik olarak ifade edilmiş olur. Sola çarpık, sağa çarpık ve simetrik dağılımlar için alınabilecek modal değerler farklı α değerleri kullanılarak 2 nolu eşitlik yardımıyla hesaplanabilir.

Uygulamada beklenen değer hesabında kullanılan 1 nolu eşitlikte modal değer m yerine 2 nolu eşitlikteki parametrik ifade yazılırsa, beklenen değer;

$$E(T) = \frac{(5 - 2\alpha)k + (1 + 2\alpha)b}{6} \begin{cases} 1 < \alpha < 2 & \text{Sola çarpık} \\ \alpha = 1 & \text{Simetrik} \\ 0 < \alpha < 1 & \text{Sağa çarpık} \end{cases} \quad (3)$$

şeklini alır.

IV — GERÇEK MODAL VE BEKLENEN DEĞERLER

Teorik olarak, beta dağılımının modal değeri,

$$m = \frac{k(\eta - 1) + b(\gamma - 1)}{\gamma + \eta - 2} \quad (4)$$

ve beklenen değeri ise,

$$E(T) = \frac{k + m(\gamma + \eta - 2) + b}{\gamma + \eta} \quad (5)$$

şeklindedir

5 nolu ifadede m yerine 4 nolu eşitliğin sağ tarafı yazılırsa beklenen değer; uç değerler ve beta dağılımının parametreleri cinsinden,

$$E(T) = \frac{k\eta + b\gamma}{\gamma + \eta} \quad (6)$$

şeklini alır.

6 nolu eşitlikte beta dağılım parametreleri için bazı özel değerler (5) de yerine konulursa; bu dağılımın beklenen değerleri,

$$E(T) = \frac{(3 - \sqrt{2})k + (3 + \sqrt{2})b}{6} \quad \text{Sola çarpık} \quad (7)$$

$$E(T) = \frac{k + b}{2} \quad \text{Simetrik} \quad (8)$$

$$E(T) = \frac{(3 + \sqrt{2})k + (3 - \sqrt{2})b}{6} \quad \text{Sağa çarpık} \quad (9)$$

olarak ifade edilebilir.

V — GERÇEK BEKLENEN DEĞERDEN SAPMALAR

Dağılım simetrik olduğunda rasgele alınan modal değer ile gerçek modal değer arasında bir farklılık olmadığı için beklenen

değerler arasında da bir farklılık olmayacaktır. Bu nedenle, burada sadece sola ve sağa çarpık dağılımların rasgele alınan modal değerlerinin ortaya çıkaracağı farklılıklar, başka bir deyişle sapmalar, ele alınmaktadır.. Gerçek beklenen değerle rasgele belirlenen modal değerden yararlanılarak hesaplanan beklenen değerler arasındaki sapmaları ifade etmek için 7 nolu ve 9 nolu eşitliklerle 3 nolu eşitlik arasındaki farklar $\Delta E (T)$ ile gösterilerek parametrik olarak yazılırsa, beklenen değerler arasındaki farklar;

Sola çarpık dağılım için;

$$\Delta E (T) = \frac{(-2 - \sqrt{2 + 2\alpha})(b - k)}{6} \quad 1 < \alpha < 2 \quad (10)$$

Sağa çarpık dağılım için,

$$\Delta E (T) = \frac{(-2 + \sqrt{2 + 2\alpha})(b - k)}{6} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (11)$$

şeklini alır.

Gerçek beklenen değerle tahmin edilerek bulunan modal değer kullanılarak elde edilen beklenen değerler arasındaki sapmaların boyutlarını göstermek için farklı α değerleri ve yayılma alanları alınarak, 10 ve 11 nolu ifadeler kullanılarak bir tablo hazırlanmıştır (Tablo 1). Bu tablo hem sağa hem de sola çarpık dağılımlar için yayılma alanı ve α nın farklı değerlerine isabet eden sapmaları vermektedir. Tablo 1. üzerinde (—) işareti taşıyan sütunlar negatif sapmaları diğer sütunlar da pozitif sapmaları vermektedirler. Örnek olarak, yayılma alanı 100 birim ve α da 1.1 olarak alınırse sola çarpık olan bu dağılım için elde edilen beklenen değer gerçekte beklenen değerden 20.237 birim daha küçük olacağı görülür. Bu ise % 20.237 lik bir sapmadır.

Olasılıklı pert analizinde beta dağılımı varsayımından hareket edildiğinde modal değer keyfi olarak seçilirse gerçek değerden önemli sapmalarla karşılaşılacaktır. Ayrıca, projedeki safha sayısı arttıkça proje tamamlanması için bulunan beklenen değerdeki sapmalar da daha büyük boyutlara ulaşabilecektir. Bu nedenle, beta dağılımının yayılma alanının alt ve üst sınırları belirlendikten sonra ayrıca bir de modal değer tahmin edilmemelidir.

		Sağa Çarpık								
$\alpha \rightarrow$	0.1	0.2	$1-\sqrt{2}/2$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
(b-k)	(-)	(-)								
\downarrow										
1	0.064	0.031	0.000	0.002	0.036	0.069	0.102	0.136	0.169	0.202
2	0.129	0.067	0.000	0.005	0.071	0.138	0.205	0.271	0.338	0.405
3	0.193	0.093	0.000	0.007	0.107	0.207	0.307	0.407	0.507	0.607
4	0.257	0.124	0.000	0.009	0.143	0.276	0.409	0.543	0.676	0.810
5	0.321	0.155	0.000	0.012	0.179	0.345	0.512	0.679	0.845	1.012
6	0.386	0.186	0.000	0.014	0.214	0.414	0.614	0.814	1.014	1.214
7	0.450	0.217	0.000	0.017	0.250	0.483	0.717	0.950	1.183	1.417
8	0.514	0.248	0.000	0.019	0.286	0.552	0.819	1.086	1.352	1.619
9	0.579	0.279	0.000	0.021	0.321	0.621	0.921	1.221	1.521	1.821
10	0.643	0.310	0.000	0.024	0.357	0.690	1.024	1.357	1.690	2.024
20	1.286	0.619	0.000	0.047	0.714	1.380	2.048	2.714	3.381	4.048
30	1.929	0.929	0.000	0.071	1.071	2.070	3.072	4.701	5.071	6.072
40	2.572	1.239	0.000	0.095	1.428	2.760	4.096	5.428	6.752	8.096
50	3.215	1.548	0.000	0.118	1.785	3.450	5.120	6.785	8.452	10.120
100	6.430	3.096	0.000	0.237	3.570	6.904	10.237	13.570	16.904	20.237
\uparrow										
(b-k)										
$\alpha \rightarrow$	1.9	1.8	$1+\sqrt{2}/2$	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
		Sola Çarpık								

Tablo : 1 Keyfi bir modal değer seçildiğinde beta dağılımının beklenen değerindeki sapmalar.

KAYNAKLAR

- (1) Trueman, Richard, E., An Introduction To Quantitative Methods For Decision Making, Holt Rinehart and Winston Inc. 1974, pp. 352-355.
- (2) Thireof, Robert J. Grosse, Richard A., Decision Making Trough Operations Research, John Wiley and Sons Inc. 1970 pp. 118-121.
- (3) Hiller, Frederick S., Lieberman, Gerald, J., Introduction To Operations Research, Holdan - Day Inc., 1973, pp. 234-241.
- (4) Hahn, Gerald J., Shapiro, Samuel S., Statistical Models in Engineering, John Wiley and Sons Inc., 1967, pp. 91-99.
- (5) Unutulmaz, Osman «Olasılıklı Pert Analizinde Kullanılan Beta Dağılımı ve Uygulama Hataları» E.Ü.İ. ve İ.B.F. Dergisi Sayı 4, 1983 pp. 181-189.