DEĞİŞİK KÂR DÜZEYLERİNDE EN AZ KAYNAK KULLANIMLI ÜRÜN BİLEŞİMLERİNİN BULUNMASI

Doç. Dr. Cemal Özgüven* **Yrd. Doç. Dr. Cengiz Yılmaz****

ABSTRACT

The Classical Linear Programming Model is a well known technique to find the profit maximizing product combination.

In this paper, we developed a parametric LP model to determine the minimum resource utilizing product combination at each profit level.

For this purpose, the following modifications have to be made on the classical LP model: (1) the objective function is set to minimize the total resource usage, (2) a new constraint should be added to the constraint set of the classical LP model. The left hand side of this new equality constraint is the objective function of the classical LP model. The right hand side is the fixed cost of the firm plus a parameter, θ, which shows the profit level, the firm seeks to achieve.

1 — GİRİŞ

Başabaş Noktası (BBN) Analizleri genellikle tek ürün esasına dayanırlar. Birden çok ürüne dayalı yöntemler ve bu yöntemlerle ilgili çalışmalar literatürde azdır. Birden çok ürüne dayalı yöntemlerde ürün bileşimi içindeki ürünlerin birbirlerine oranlarının sabit kabul edilmesi, her bir ürün bileşimi için ayrı bir problemin çözülmesini gerektirir. Bunun da zor ve uzun bir yaklaşım olduğu açıktır.

Buna karşılık, birden fazla değişken kullanan Doğrusal Prog-

* Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi öğretim üyesi.

** Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi öğretim üyesi.

ramlama (DP) Yöntemi bu tür analizleri kolaylaştırır. Bu yöntemin kullanılması halinde bir adet DP probleminin çözülmesiyle sıfır kâr getiren ürün bileşimlerinin, eğer varsa, tümü elde edilir.

Bir işletmeyi en yüksek katkı payına ulaştıran ürün bileşimini bulmak için düzenlenen DP Modeli şöyle özetlenir:

$$\text{Amaç Fonksiyonu: } Z \text{ (en yüksek)} = \sum_j k_j x_j$$

$$\text{Sınır Koşulları: } \sum a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{(bütün i ler için)}$$
$$x_j \geq 0$$

Buradaki katsayı ve değişkenler şöyle tanımlanabilirler:

Z = enyükseklenmek istenen toplam katkı payı

x_j = j inci üründen üretilen miktar

k_j = j inci ürünün katkı payı, j inci ürünün birim satış fiyatı ile birim değişir maliyeti arasındaki fark

a_{ij} = teknik katsayılar

b_i = üretim veya pazarla ilgili kapasiteler

Birden çok ürün üreten firmaları BBN'na ulaştıran ürün bileşimlerini bulmak amacıyla yukarıdaki modele yeni bir sınır koşulu eklenmelidir. Böylelikle genişletilmiş olan bu yeni modele Model I adını verelim. «Sıfır Kâr Sınırı» dediğimiz bu yeni sınır koşulunun eklenmesiyle Model I şöyle yazılabilir:

$$\text{Amaç Fonksiyonu: } Z \text{ (en yüksek)} = \sum_j k_j x_j$$

$$\text{Sınır Koşulları: } \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \qquad \text{(bütün i ler için)}$$

$$\text{MODEL I} \qquad \sum_j k_j x_j = SM$$

$$x_j \geq 0$$

Burada SM toplam sabit maliyetleri gösterir.

Model I bazı özel durumlar dışında daima çoklu çözüm verecektir (1). Bu durumda bu çözümlerden hangisinin seçilmesi gerek-

---

(1) Bu konuda bakınız:

Özgüven, Cemal, «Bir Makale Üzerine», **İşletme Dergisi**, Cilt IV, Sayı 1-2, Erzurum, 1979, S. 187-205.

Özgüven, Cemal - Yılmaz Cengiz, «Doğrusal Programlamanın Başabaş Analizinde Kullanımı» **Muhasebe Enstitüsü Dergisi**, Yıl 9, Sayı 31, 1983, İstanbul, S. 35-42.

tiği sorunu karşımıza çıkar. Sıfır kâr getiren bu ürün bileşimlerinden, elbette, en az kaynak kullananını tercih etmemiz gerekir.

Probleme bu yeni amacın katılmasıyla firmayı Kâra Geçiş Noktası'na ulaştıran (2) ve en az kaynak kullanımını gerektiren tek bir ürün bileşimi bulunur. Bu nitelikleri taşıyan ürün bileşimini bulmak için şöyle bir model önerilmiştir (3) :

Amaç Fonksiyonu : $C \text{ (en küçük)} = \sum_j c_i x_i$

Sınır Koşulları : $\sum_j k_i x_i = SM$

MODEL II $\qquad \sum_j a_{ij} x_i \leq b_i$ (bütün i ler için)

$x_i \geq 0$

Burada c_i katsayısı j inci üründen bir birim üretmek için gerekli kaynak kullanımını, C bağımlı değişkeni ise toplam kaynak kullanımını göstermektedir. Model II yalnızca sıfır kâr noktasında en az kaynak kullanımını sağlayan ürün bileşiminin bulunması için kullanılmaz. Değişik kâr düzeylerinde en az kaynak kullanımını gerektiren ürün bileşimlerinin bulunması amacıyla da yukarıdaki Model II den yararlanılabilir.

2 — KONUYA GETİRİLEN YENİ BOYUT

BBN ile maksimum kâr arasındaki her bir kâr düzeyinde en az kaynak kullanımlı ürün bileşimini bulmak amacında olduğumuzu kabul edelim. Bu amacımıza ulaşmak için Model II deki Sıfır Kâr Sınırının sağ tarafına hedef alınan kâr düzeyi eklenmelidir.

Bu uygulamayı bir örnek problem üzerinde gösterelim.

ÖRNEK 1

Miktarları x_1 ve x_2 ile gösterilen, iki ürünü üreten bir firmanın sabit maliyetlerinin 9 bin TL, amaçladığı kâr düzeyinin 4 bin TL olduğunu kabul edelim. Her bir ürün için gerekli bilgiler aşağıdadır :

---

(2) Bu makalede Başabaş Noktası, Sıfır Kâr Noktası ve Kâra Geçiş Noktası deyimleri birbirlerinin yerine kullanılmıştır.

(3) Özgüven, Cemal - Yılmaz Cengiz, «Doğrusal Programlamanın Başabaş Analizinde Kullanımı», Muhasebe Enstitüsü Dergisi, Yıl 9, Sayı 31, 1983, İstanbul, S. 35-42.

	Ürün 1	Ürün 2	Eldeki Kapasite
Makine I (saat/birim)	5	10	40 saat
Makine II (saat/birim)	10	4	40 saat
İşgücü (saat/birim)	4	1	
Katkı Payı (1.000 TL/birim)	3	2	

Firmanın hedefi 4 bin TL kâr getiren ve en az işgücü kullanan ürün bileşimini bulmaktır.

Bu durumda, Model II yukarıda anlatıldığı şekilde uygulandığında şu DP Problemi elde edilir :

$$C \text{ (en küçük)} = 4x_1 + x_2$$

PROBLEM I

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 &\leq 40 \\ 10x_1 + 4x_2 &\leq 40 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 9 + 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu problem çözüldüğünde firmayı her iki hedefine de ulaştıran ürün bileşimi ($x_1 = 5/2, x_2 = 11/4$) olarak bulunur. Bu noktada firmanın kullandığı toplam işgücü 51/4 saattir.

Sıfır kâr ile maksimum kâr arasında sonsuz sayıda kâr düzeyi olduğuna göre, her bir kâr düzeyindeki en az kaynak kullanımlı ürün bileşimini bulmak için yukarıdaki gibi sonsuz sayıda problemin çözülmesi gerekir.

Bu zorluğu aşmak için Model II deki Sıfır Kâr Sınırının sağ tarafında SM'nin yanına hedeflenen kâr düzeyini gösteren θ parametresi eklenmelidir. Böylelikle oluşturduğumuz bu Parametrik Programlama Modeli'ne Model III diyelim :

Amaç Fonksiyonu $C \text{ (en küçük)} = \sum_j c_j x_j$

Sınır Koşulları $\sum_j k_j x_j = SM + \theta$

MODEL III $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ (bütün i ler için)

$\theta, x_j \geq 0$

Bu modele göre kurulan bir adet problemin çözümüyle, θ parametresine verilen değişik değerlere bağlı olarak her bir kâr düzeyi için en az kaynak kullanımlı ürün bileşimi bulunur. Böylelikle, her bir kâr düzeyi için ayrı bir problem çözülmesi zorunluluğu ortadan kalkmış olur.

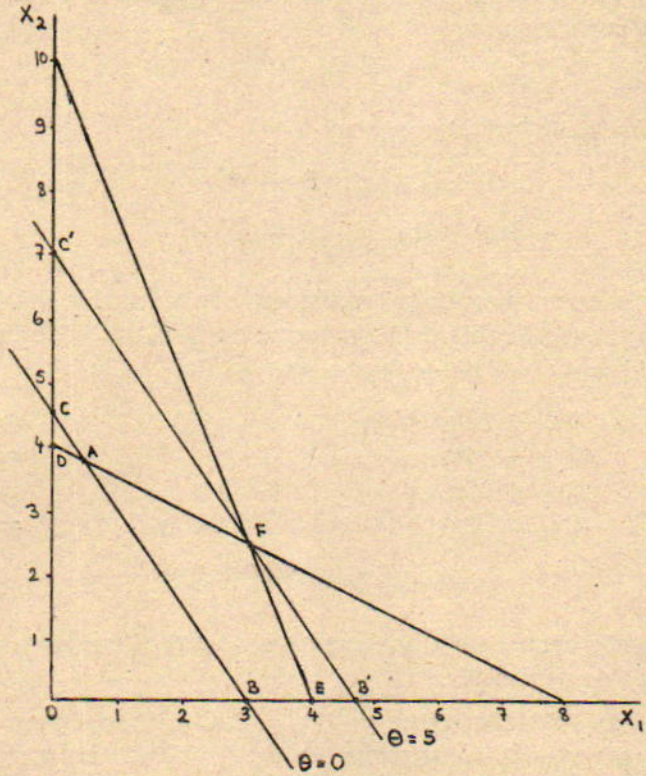
Önerilen yaklaşıma göre kurulan problemin çözümünü ve sonuçlarının yorumunu gösterebilmek için Model III'ü yukarıda verilen örnek probleme uygulayalım.

3 — MODEL III'ÜN UYGULAMASI

Yukarıdaki örnek problemin Model III'e göre kuruluşu şöyledir :

PROBLEM II

$$\begin{aligned} C \text{ (en küçük)} &= 4x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 10x_2 &\leq 40 \\ 10x_1 + 4x_2 &\leq 40 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 9 + \theta \\ x_1, x_2, \theta &\geq 0 \end{aligned}$$



GRAFİK I

Problem II'nin sınır koşulları Grafik I üzerinde çizilmiştir. Sıfır Kâr Sınırı grafikte CB doğrusu ile gösterilmiştir. CB doğrusu ile ilgili θ değeri, yani, kâr sıfırdır. $\theta > 0$ durumunda θ'nın değeri arttıkça CB doğrusu paralel olarak sağa kayacaktır. Pozitif θ değerleri için, CB'ye paralel olan bu yeni sınır koşullarına (doğrulara) artık «Sıfır Kâr Sınırı» denilemez. Bunlara «Kâr Sınırları» demek daha doğru olur.

$\theta = 0$ iken Problem II'nin uygun çözüm alanı CB Sıfır Kâr Sınırının ODFE dörtgeninin içinde kalan AB parçasıdır. θ değeri arttıkça Kâr Sınırı adını alan bu doğru parçası paralel olarak sağa kayar ve o θ değeri için problemin uygun çözüm alanını belirler. $\theta = 5$ olduğunda Problem II'nin uygun çözüm alanı F noktası olur ve $\theta > 5$ için Problem II'nin uygun çözüm alanı bulunmaz. Bu nedenle firmanın ulaşabileceği en yüksek kâr düzeyinin 5 birim olduğunu söyliyebiliriz.

Önce Problem II'nin $\theta = 0$ için Dual Simpleks Metod'la optimum çözümünü bulalım. Bu amaçla, suni değişken kullanma zorunluluğundan kurtulmak için

$$3x_1 + 2x_2 = 9 + \theta$$

sınırını iki eşitsizlik halinde yazalım :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 9 + \theta \\ -3x_1 - 2x_2 &\leq -9 - \theta \end{aligned}$$

Sayısı dörde çıkan sınır koşullarımızdan her birine bir y boş değişkeni eklediğimizde Problem II'nin formülasyonu aşağıdaki şekli alır:
$C \text{ (en küçük)} = 4x_1 + x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4$

$$\begin{array}{llllllll} 5x_1 & + 10x_2 & + y_1 & & & & = 40 + 0\theta \\ 10x_1 & + 4x_2 & & + y_2 & & & = 40 + 0\theta \\ 3x_1 & + 2x_2 & & & + y_3 & & = 9 + \theta \\ -3x_1 & - 2x_2 & & & & + y_4 & = -9 - \theta \end{array}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, \theta \geq 0$$

Bu formülasyonla ilgili başlangıç ve sonraki Dual Simpleks Tablolar Tablo I de verilmiştir.

Tablo 1.0 daki çözüm ($x_1 = 0, x_2 = 0, C = 0$) optimum olan fakat uygun olmayan bir çözümdür ve Grafik I'de 0 noktasına karşılık gelmektedir.

Dual Simpleks Metodun kurallarına göre Tablo 1.0 üzerinde bir iterasyon yapılıp Tablo 1.1 deki çözüm elde edilmiştir. Bu çözüm ($x_1 = 0, x_2 = 4.5, C = 4.5$) yine optimum olan fakat uygun olmayan bir çözümdür ve Grafik I de C noktasına karşılık gelmektedir.

Hedef alınan optimum ve uygun çözüm Tablo 1.2 de elde edilmiştir. Grafik I de A noktası ile gösterilen bu çözüm ($x_1 = 0.5, x_2 = 3.75, C = 5.75$) firma için en az kaynak kullanımlı, sıfır kâr veren ürün bileşimidir. Daha önce de vurguladığımız gibi bu çözüm $\theta = 0$ için geçerlidir. Tablo 1 deki her alt tabloda Temel Değişkenlerin Değerleri (TDD) sütunundaki θ terimleri sıfırla çarpılıp sabit terimlere eklenerek çözümlere ulaşılmıştır.

TD		C	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	TDD sabit terim	TDD θ terimi
1.0	C	1	−4	−1	0	0	0	0	0	0
	y_1	0	5	10	1	0	0	0	40	0
	y_2	0	10	4	0	1	0	0	40	0
	y_3	0	3	2	0	0	1	0	9	1
	y_4	0	−3	−2	0	0	0	1	−9	−1
ORAN			1.33	0.5						
1.1	C	1	−2.5	0	0	0	0	−0.5	4.5	0.5
	y_1	0	−10	0	1	0	0	5	−5	−5
	y_2	0	4	0	0	1	0	2	22	−2
	y_3	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	x_2	0	1.5	1	0	0	0	−0.5	4.5	0.5
ORAN			0.25							
1.2	C	1	0	0	−0.25	0	0	−1.75	5.75	1.75
	x_1	0	1	0	−0.10	0	0	−0.5	0.5	0.5
	y_2	0	0	0	0.4	1	0	4	20	−4
	y_3	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	x_2	0	0	1	0.15	0	0	0.25	3.75	−0.25

TABLO 1

$\theta > 0$ olması halinde Problem II'nin çözümü Tablo 1.2 nin TDD sütunlarından yararlanılarak şöyle bulunur :

$$\begin{bmatrix} C \\ x_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.75 \\ 0.5 \\ 20 \\ 0 \\ 3.75 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 1.75 \\ 0.5 \\ -4 \\ 0 \\ -0.25 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$\theta > 5$ durumunda $y_2 < 0$ olacağı için, $0 \leq \theta \leq 5$ aralığındaki uygun ve optimum çözümler ilişki (1) den bulunacaktır. $\theta > 5$ ile ilgili optimum uygun çözümlerin bulunması için Tablo 1.2 de bir iterasyonun yapılması gerekir. Ancak, bu tablonun y_2 satırında hiç bir negatif elemanın bulunmaması bu iterasyona olanak vermez. O halde, $\theta > 5$ için Problem II nin uygun çözümü yoktur (4).

İlişki 1 de, θ'ya 0 ile 5 arasında farklı değerler verilerek o kâr düzeyi ile ilgili en az kaynak kullanımlı ürün bileşimi elde edilir.

$\theta = 4$ iken ilişki 1'den ($x_1 = 2.5$, $x_2 = 2.75$, $C = 12.75$) optimum uygun çözümü bulunur. Bu, Problem 1'in yukarıda bulunan çözümünün aynısıdır.

$\theta = 5$ iken aynı ilişkiden ($x_1 = 3$, $x_2 = 2.5$, $C = 14.5$) optimum uygun çözümü bulunur. Bu da Grafik I'deki daha önce sözü edilen F noktasıdır.

ÖRNEK 2

Örnek 1 deki firmanın toplam işgücü yerine toplam enerji kullanımını en küçük yapmak istediğini varsayalım. Birim başına birinci ürün 1 birim enerji, ikinci ürün 4 birim enerji kullanımını gerektirdiğine göre, diğer veriler aynı kalmak kaydıyla Problem II'nin yalnızca amaç fonksiyonu değişir.

---

(4) Parametrik Simpleks Metodunun Kuralları için bakınız:
Van de Panne, C., **Methods For Linear And Quadratic Programming**, North-Holland Publishing Company, 1975.

PROBLEM III

$$\begin{aligned} C \text{ (en küçük)} &= x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 10x_2 &\leq 40 \\ 10x_1 + 4x_2 &\leq 40 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 9 + \theta \\ -3x_1 - 2x_2 &\leq -9 - \theta \\ x_1, x_2, \theta &\geq 0 \end{aligned}$$

Problem III ile ilgili çözüm tabloları Tablo 2 de verilmiştir. Bir iterasyonla $\theta = 0$ için optimum uygun çözüm Tablo 2.1 de elde edilmektedir. Grafik I'de B noktasıyla gösterilen bu çözüm de ($x_1 = 3, x_2 = 0, C = 3$) olur.

TD		C	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	TDD Sabit terim	θ terimi
	C	1	—1	—4	0	0	0	0	0	0
	y_1	0	5	10	1	0	0	0	40	0
	y_2	0	10	4	0	1	0	0	40	0
2.0	y_3	0	3	2	0	0	1	0	9	1
	y_4	0	—3	—2	0	0	0	1	—9	—1
ORAN			0.33	2						
	C	1	0	—3.33	0	0	0	—0.33	3	0.33
	y_1	0	0	6.66	1	0	0	1.66	25	—1.66
	y_2	0	0	—2.66	0	1	0	3.33	10	—3.33
2.1	y_3	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	x_1	0	1	0.66	0	0	0	—0.33	3	0.33
ORAN				1.25						
	C	1	0	0	0	—1.25	0	—4.5	—9.5	4.5
	y_1	0	0	0	1	2.5	0	10	50	—10
	x_2	0	0	1	0	—0.375	0	—1.25	—3.75	1.25
2.2	y_3	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	x_1	0	1	0	0	0.25	0	0.5	5.5	—0.5

TABLO 2

θ'nın değişik değerleri için aranılan uygun ve optimum ürün bileşimleri Tablo 2.1 deki TDD sütunlarından bulunur :

$$\begin{bmatrix} C \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 25 \\ 10 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0.33 \\ -1.66 \\ -3.33 \\ 0 \\ 0.33 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Bu ilişki $0 \leq \theta \leq 3$ arasında geçerlidir. $\theta > 3$ iken $y_2 < 0$ olacağı için elde edilen çözüm optimumdur ama uygun değildir. Bu nedenle, $\theta > 3$ için yeni bir iterasyon yapılması gerekir. Tablo 2.1'in y_2 satırında bir eksi değer bulunduğu için bu iterasyon yapılabilir.

Bu iterasyonun sonucu Tablo 2.2 de yer almaktadır. $\theta > 3$ için optimum ve uygun ürün bileşimleri yine bu tablonun TDD sütunlarından elde edilmektedir :

$$\begin{bmatrix} C \\ y_1 \\ x_2 \\ y_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.5 \\ 50 \\ -3.75 \\ 0 \\ 5.5 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 4.5 \\ -10 \\ 1.25 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$3 \leq \theta \leq 5$ arasında, ilişki (3) optimum ve uygun çözümleri vermektedir. $\theta > 5$ iken $y_1 < 0$ olacağından dolayı yine yeni bir iterasyonun yapılması gerekir. Ama, Tablo 2.2 nin y_1 satırında her hangi bir eksi değer bulunmadığı için bu iterasyon yapılamamaktadır. $\theta > 5$ için Problem III'ün hiç bir uygun çözümü yoktur.

Tablo 2.1 ve 2.2 nin Grafik I üzerindeki yorumu şöyle yapılabilir : $\theta = 0$ olduğunda ilişki (2) den Grafik I deki B noktasını buluruz. θ sıfırdan üçe doğru yükselirken Grafik I de B noktasından E noktasına doğru gitmekteyiz. İlişki (2) ve İlişki (3) $\theta = 3$ için Grafik I deki E noktasını verir. $\theta > 3$ için İlişki (3) ü kullandığımızda, Grafik I de E ile F arasındaki değişik noktaları buluruz. $\theta = 5$ olduğunda F noktasındaki optimum uygun çözüme ulaşırız.

4 — SONUÇ

Birden çok ürün üreten firmaları sıfır kâr düzeyinde en az kaynak kullanımlı ürün bileşimine ulaştıran DP modelinde (Model II) bir değişiklik yapılabilir. Bu değişiklik, Sıfır Kâr Sınırı'nın sağ tarafına kâr düzeyini gösteren θ parametresinin eklenmesidir. Böylece, sıfır kâr düzeyinde en az kaynak kullanımlı ürün bileşimini veren Model II yerine sıfır da dahil değişik kâr düzeylerinde en az kaynak kullanımlı ürün bileşimlerini veren yeni bir model geliştirilebilir.

Elde edilen bu yeni «Parametrik Programlama» Modeli (Model III) Model II'ye göre daha genel ve daha kullanışlıdır.

Bunun da ötesinde Model III bir işletmeyi en yüksek katkı payına ulaştıran ürün bileşimini de dolaylı olarak vermektedir. Diğer bir deyişle, Model III'de en yüksek θ değeri ile ilk başta verilen ve bir işletmeyi en yüksek katkı payına ulaştıran ürün bileşimini bulmak için düzenlenen DP Modelinin bulacağı çözüme ulaşılır.

KAYNAKLAR

Özgüven, Cemal, «Bir Makale Üzerine», İşletme Dergisi, Cilt 4, Sayı 1-2, Erzurum 1979, S. 187-205.

Özgüven, Cemal ve Yılmaz, Cengiz, «Doğrusal Programlamanın Başabaş Analizinde Kullanımı», Muhasebe Enstitüsü Dergisi, Yıl 9, Sayı 31, 1983, İstanbul, s. 35-42.

Van De Panne, C., **Methods For Linear And Quadratic Programming**, North-Holland Publishing Company, 1975.