OLASILIKLI PERT ANALİZİNDE KULLANILAN BETA DAĞILIMI VE UYGULAMA HATALARI

Yrd. Doç. Dr. Müh. Osman Unutmaz*

ABSTRACT

In this paper, we mainly concentrated on special types of beta distributions which are employed in probabilistic PERT models. Contrary to the existing literature, it is claimed that the mostlikely or modal value of the beta distributions should not be estimated. Because, for a given set of parameters and an estimated range, the modal value of the beta distribution is completely determined. Thus, depending on the magnitude of the difference between the estimated modal value and the calculated one, expected completion time of each activity and that of the project may differ greatly from the one that could be obtained otherwise. This difference consequently, may cause selection of an incorrect critical path and misleading completion time probabilities.

1. GİRİŞ

PERT (Program Evaluation and Review Technique) 1958 yılında Amerikan Deniz Kuvvetleri Özel Proje Bürosu, Lockheed Aircaft Şirketi, Booz ve Allen and Hamilton firmalarının birlikte geliştirdikleri matematiksel bir yöntemdir. Bu makalede PERT ve PERT'in kullanım alanlarına değinilmeden, olasılıklı PERT analizlerinde yer alan üç farklı beta dağılımı ve bunların uygulamadaki yanlış kullanımları üzerinde durulmuştur. Bu çerçeve içerisinde; konuya açıklık ge-

* Esciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Öğretim Üyesi.

(1) Fazla bilgi için bkz. Hahn, Gerald J., Shapiro, Samuel S., Statistical Models In Engineering, John Wiley and Sons, 1967, pp. 91-99.

tirmek gayesiyle, önce beta dağılımı teorik olarak incelenmiş daha sonra da bu dağılımın yanlış kullanılması sonucu doğan hatalar ortaya konulmuştur.

2. BETA DAĞILIM FONKSİYONU

Bu fonksiyon şekil veya biçim parametrelerinin (γ ve η) değişik değerleri için farklı biçimler alan bir dağılım ailesi fonksiyonudur. Burada, Olasılıklı-PERT analizlerinde kullanılan beta dağılımı incelendiğinden parametrelerin bazı özel değerleri ele alınacaktır. Şöyle ki;

1) $\gamma > 1$, $\eta > 1$ ve $\gamma = \eta$ ise dağılım simetrik,

2) $\gamma > 1$, $\eta > 1$ ve $\gamma > \eta$ ise dağılım sola çarpık, ve

3) $\gamma > 1$, $\eta > 1$ ve $\gamma < \eta$ ise dağılım sağa çarpık bir hal alır (1).

Beta dağılımı PERT analizlerinde kullanıldığı gibi, pratikte bir çok problemin çözümünde de kullanılmaktadır. Söz konusu dağılım esas itibariyle [0, 1] aralığında tanımlanmış ve uygun bir transformasyonla en küçük değeri k ve en büyük değeri b olan [k, b] aralığında kullanılır bir hale getirilmiştir. Birtakım özelliklere açıklık getirmek amacıyla [0, 1] ve [k, b] aralıklarında tanımlanan beta dağılımları ile PERT analizlerinde kullanılan üç özel dağılımı kısaca inceliyelim.

2.1. BİRİM ARALIKTA TANIMLANAN BETA DAĞILIMI

Bu dağılımın fonksiyonu,

$$f(x, \gamma\, \eta) = \frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\eta)} x^{\gamma-1} (1-x)^{\eta-1} , \quad 0 \leq x \leq 1,\ \gamma > 0,\ \eta > 0 \tag{1}$$

olup, ortalaması,

$$\mu_x = E(X) = \int_R x f(x)\, dx \tag{2}$$

genel ifadesinden; variyansı,

$$\sigma_x^2 = Var(X) = E(X-\mu_x)^2 = E(X^2) - \mu_x^2 \tag{3}$$

genel ifadesinden; ve variyansın elde edilmesinde kullanılan $E(X^2)$ de

$$E(X^2) = \int_R x^2 f(x)\, dx \tag{4}$$

genel ifadesinden yararlanılarak bulunur. Burada f (x) dağılım fonksiyonu ve R de bu fonksiyonun tarif aralığıdır. Bu durumda,

$$E(X) = \frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\eta)} \int_0^1 x\, x^{\gamma-1} (1-x)^{\eta-1}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\eta)} \int_0 x^{\gamma} (1-x)^{\eta-1}\, dx \tag{5}$$

olup (5) nolu eşitlikteki

$$\int_0^1 x^{\gamma} (1-x)^{\eta-1}\, dx$$

de

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)\ \Gamma(\eta)}{\Gamma(\gamma+\eta+1)} \tag{6}$$

ifadesine eşittir.
Ayrıca gama fonksiyonun

$$\Gamma(\gamma+1) = \gamma\ \Gamma(\gamma)$$

özelliğinden faydalanarak (6) nolu eşitlik,

$$\frac{\gamma\ \Gamma(\gamma)\ \Gamma(\eta)}{(\gamma+\eta)\ \Gamma(\gamma+\eta)} \tag{7}$$

şeklinde yazılabilir. (5) nolu ifadede integral yerine (7) deki ifade yazılırsa, ortalama

$$E(X) = \frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\eta)} \cdot \frac{\gamma\ \Gamma(\gamma)\ \Gamma(\eta)}{(\gamma+\eta)\ \Gamma(\gamma+\eta)} = \frac{\gamma}{\gamma+\eta} \tag{8}$$

olarak bulunur. (4) nolu eşitlikten dolayı,

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\eta)} \int_0^1 x^2 x^{\gamma-1} (1-x)^{\eta-1}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\eta)} \int_0^1 x^{\gamma+1} (1-x)^{\eta-1}\, dx \tag{9}$$

ve (9) daki integral ise,

$$\int_0^1 x^{\gamma+1} (1-x)^{\eta-1} dx = \frac{\Gamma(\gamma+2)\,\Gamma(\eta)}{\Gamma(\gamma+\eta+2)} \qquad (10)$$

olup, gama fonksiyonunun sözü edilen özelliğinden faydalanılarak (10) eşitliğinin sağ tarafı,

$$\frac{\Gamma(\gamma+2)\,\Gamma(\eta)}{\Gamma(\gamma+\eta+2)} = \frac{(\gamma+1)\ \gamma\ \Gamma(\gamma)\ \Gamma(\eta)}{(\gamma+\eta+1)\ (\gamma+\eta)\ \Gamma(\gamma+\eta)} \qquad (11)$$

şeklinde yazılır ve (9) da yerine konularak gerekli kısaltmalar yapıldığında tesadüfi değişkenin karesinin beklenen değeri için,

$$E(X^2) = \frac{\gamma\,(\gamma+1)}{(\gamma+\eta+1)\,(\gamma+\eta)} \qquad (12)$$

ifadesi bulunur, (3) nolu eşitlikte $E(X^2)$ için (12) de bulunan ve μ_x^2 yerine de (8) de bulunan ifadenin karesi yazılıp gerekli kısaltmalar yapıldığında tesadüfi değişkenin variyansı için,

$$\sigma_x^2 = \frac{\gamma\,\eta}{(\gamma+\eta+1)\,(\gamma+\eta)^2} \qquad (13)$$

ifadesi elde edilir.

2.2. SONLU BİR ARALIKTA TANIMLANAN BETA DAĞILIMI

Günlük hayatta karşılaşılan bir çok değişken birim aralık içerisindeki değerlerle sınırlı kalmayıp en küçük değeri k ve en büyük değeri b olan bir aralık içinde dağılmaktadır. Bu nedenle, birim aralık içerisinde tarif edilen beta dağılımının, özelliğini bozmadan, herhangi bir [k, b] aralığında işler hale getirilmesi gerekir. Böylece, beta dağılımının kullanım alanı genişletilmiş olur. Bu dağılımı [0, 1] aralığından herhangi bir [k, b] aralığına taşımak için birim aralıkta, $0 \leq x \leq 1$, değerler alan tesadüfi değişken X üzerinde,

$$Y = k + (b-k)\,X \qquad k > 0,\ b > 0,\ k < b \qquad (14)$$

şeklinde bir doğrusal transformasyon yapmak gerekir. Böyle bir transformasyonla X tesadüfi değişkeni [0, 1] aralığını tararken Y tesadüfi değişkeninin de [k, b] aralığını taraması sağlanmış olur. Başka bir deyimle,

$$x = 0 \quad \text{iken} \quad y = k \quad \text{ve}$$
$$x = 1 \quad \text{iken} \quad y = b$$

değerlerini alacaktır. (1) nolu fonksiyonda x yerine (14) nolu eşitlikten elde edilen,

$$x = \frac{y-k}{b-k} \tag{15}$$

konulduğunda, [k, b] aralığında dağılım gösteren Y tesadüfi değişkenin densite fonksiyonu,

$$f(y, \gamma, \eta) = \frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{(b-k)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\eta)} \left(\frac{y-k}{b-k}\right)^{\gamma-1} \left(1-\frac{y-k}{b-k}\right)^{\eta-1}$$
$$k \leq y \leq b, \quad \gamma > 0, \quad \eta > 0 \tag{16}$$

şeklini alır. Bu durumda Y tesadüfi değişkeninin ortalaması,

$$\mu_y = E(Y) = E[k + (b-k)X] = k + (b-k)E(X) \tag{17}$$

olduğundan, (17) nolu eşitlikte x yerine (8) nolu eşitlikteki ifade yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, ortalama,

$$\mu_y = \frac{k\eta + b\gamma}{\gamma+\eta} \tag{18}$$

olarak bulunur ve Y nin variyansı,

$$\sigma_y^2 = \mathrm{Var}(Y) = E[Y - E(Y)]^2 \tag{19}$$

olduğundan (19) nolu ifadede Y yerine (14) nolu eşitliğin sağ tarafındaki ifade, E (Y) yerine de (17) nolu eşitliğin sağ tarafındaki ifade konulursa,

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[k + (b-k)X - k - (b-k)E(X)]^2 \\ &= (b-k)^2 E[X - E(X)]^2 \end{aligned} \tag{20}$$

halini alır. Bilindiği üzere $E[X - E(X)]^2$, X in variyansıdır. Dolayısı ile (10) nolu eşitlikte $E[X - E(X)]^2$ yerine bunun eşiti olan (13) nolu eşitliğin sağ tarafındaki ifade konulduğunda, Y nin variyansı,

$$\sigma_y^2 = (b-k)^2 \frac{\gamma\eta}{(\gamma+\eta+1)(\gamma+\eta)^2} \tag{21}$$

olarak elde edilir. Ayrıca [k, b] aralığında tanımlanan beta dağılımının modal değeri veya en muhtemel değeri, m, dağılım fonksiyonunun türevi alınarak sıfıra eşitlendiğinde,

$$m = \frac{k(\eta-1) + b(\gamma-1)}{\gamma+\eta-2} \quad (22)$$

olarak bulunur. (18) nolu eşitlikte $k\eta+b\gamma$ yerine (22) nolu ifadeden elde edilen $k+m(\gamma+\eta-2)+b$ konulursa Y nin ortalaması,

$$\mu_Y = \frac{k+m(\gamma+\eta-2)+b}{\gamma+\eta} \quad (23)$$

şeklinde de yazılabilir.

2.3 OLASILIKLI PERT ANALİZLERİNDE KULLANILAN BETA DAĞILIMLARI

Bu dağılımlar [k, b] aralığında tanımlanan beta dağılımının üç özel şeklidir. Olasılıklı pert analizinde kullanılan beta dağılımlarının ortalama ve variyansı sırası ile,

$$\mu_Y = \frac{k + 4m + b}{6} \quad (24)$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{(b-k)^2}{36} \quad (25)$$

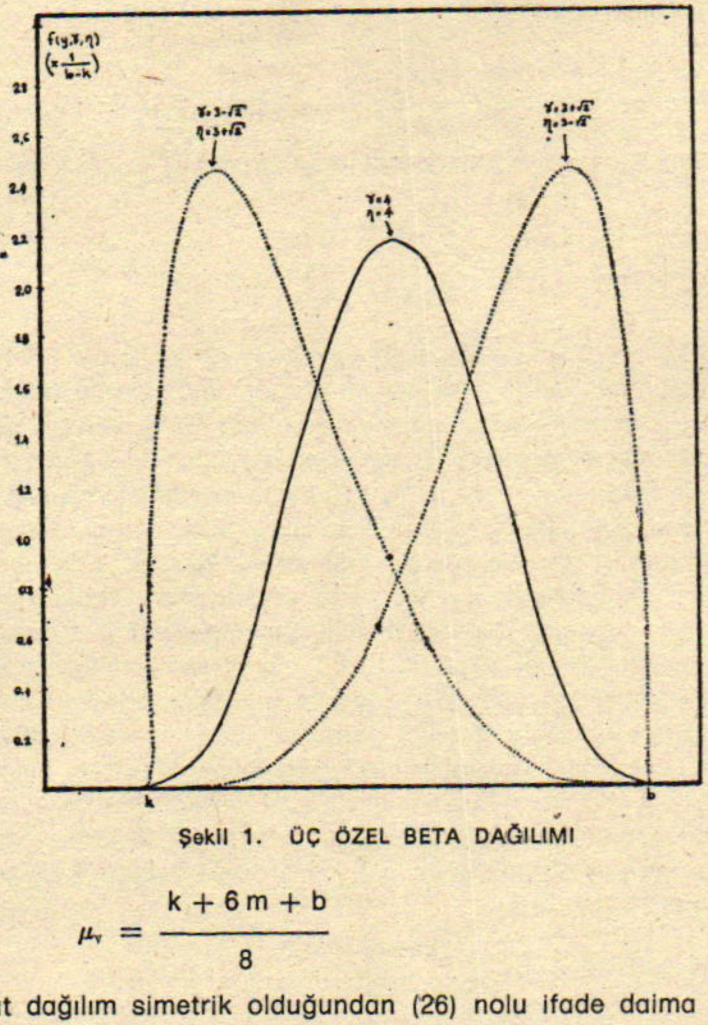
dir. [k, b] aralığında tanımlanan beta dağılımının beklenen değeri ve variyansı, (23) ve (21) nolu ifadeler, incelendiğinde; beklenen değerin (24) nolu ifadeye ve variyansın da (25) nolu ifadeye eşit olması, şekil veya biçim parametrelerinin ancak aşağıda belirtilen üç farklı değer çiftini almasıyle mümkün olduğu görülecektir.

1) $\gamma = 3 + \sqrt{2}$
$\eta = 3 - \sqrt{2}$

2) $\gamma = 3 - \sqrt{2}$
$\eta = 3 + \sqrt{2}$

3) $\gamma = 4$
$\eta = 4$

Her üç halde de $\gamma > 1$, $\eta > 1$ olduğundan dağılımlar tek modludur. Birinci durumda $\gamma > \eta$ olduğundan dağılım sola, ikinci durumda ise $\gamma < \eta$ olduğundan dağılım sağa çarpıktır. Üçüncü durumda $\gamma = \eta$ olduğu için de dağılım simetriktir (Şek. 1). Yalnız, üçüncü halde, beklenen değer ifadesinde m nin katsayısı 4 yerine 6 ve payda da 8 değerini alır.



Şekil 1. ÜÇ ÖZEL BETA DAĞILIMI

$$\mu_y = \frac{k + 6m + b}{8} \tag{26}$$

Fakat dağılım simetrik olduğundan (26) nolu ifade daima (24) nolu ifadenin verdiği değere eşit bir değer verecektir. Dolayısiyle, üçüncü durumda da yani dağılım simetrik olduğunda da (24) nolu ifade doğru sonuç verecektir.

Yukarıda bahsedilen üç parametri çifti için dağılım fonksiyonları sırasiyle;

$$f(y, 3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}) = \frac{13.008}{(b-k)} \left(\frac{y-k}{b-k}\right)^{2+\sqrt{2}} \left(1-\frac{y-k}{b-k}\right)^{2-\sqrt{2}}$$

$$k \leq y \leq b, \; k > 0 \tag{27}$$

$$f(y, 3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}) = \frac{13.008}{(b-k)} \left(\frac{y-k}{b-k}\right)^{2-\sqrt{2}} \left(1-\frac{y-k}{b-k}\right)^{2+\sqrt{2}} \qquad k \leq y \leq b,\ k > 0 \qquad (28)$$

$$f(y, 4, 4) = \frac{140}{(b-k)} \left(\frac{y-k}{b-k}\right)^{3} \left(1-\frac{y-k}{b-k}\right)^{3} \qquad k \leq y \leq b,\ k > 0 \qquad (29)$$

halini alırlar. Bu dağılım fonksiyonlarının grafikleri Şekil 1 de verilmiştir.

3. SONUÇ

Olasılıklı PERT analizi ile ilgili eserlerde (2) bir proje içerisinde yer alan bağımsız faaliyetlerin her birinin tamamlanma süresinin beta dağılımı gösterdiği kabul edilmekte ve her bir faaliyetin ortalama tamamlanma süresi (24) ve variyansı da (25) nolu ifadeler yardımıyle bulunmaktadır. Ayrıca bu konudaki eserlerde, ortalama ve variyansı hesaplıyabilmek için en kısa süre k, en uzun süre b, ve en muhtemel süre m, nin tahmin edilmesinin gerektiğinden bahsedilmektedir. Uygulamada da, ortalama ve variyans, tahmin edilen bu üç değer yardımıyle bulunmaktadır. Bu makalenin 2.3 üncü bölümünde değinildiği gibi olasılıklı PERT analizinde ortalama zamanı bulmak için kullanılan (24) nolu ifade ve variyansı bulmada kullanılan (25) nolu ifade beta dağılım parametrelerinin ancak belirli değerleri için geçerlidir. Bu parametreler belirlendiği zaman beta dağılımının biçimi belirlenmekte ve her [k, b] aralığı için beta dağılımının modu, k ve b nin fonksiyonu olarak kesin bir değere ulaşmaktadır. Parametreler bölüm 2.3 de bahsedilen özel değerleri aldığında, en muhtemel değer, m,

sola çarpık dağılım için; $\dfrac{(2-\sqrt{2})\,k + (2+\sqrt{2})\,b}{4}$

sağa çarpık dağılım için; $\dfrac{(2+\sqrt{2})\,k + (2-\sqrt{2})\,b}{4}$

---

(2) Fazla bilgi için bkz. Trueman, Richard E., An Introduction To Quantitatve Methods For Decision Making, Holt Rinehart and Winston Inc. 1974 pp. 352-355., Thireof Robert J., Grossee, Richard A., Decision Making Trough Operation Researh, John Wiley and Sons Inc. 1970, pp. 118-121, Hiller, Frederick S., Lieberman, Gerald J., Introduction To operations Research Holdan-Day Inc. 1973 pp. 234-241.

ve simetrik durum için de; $\frac{k + b}{2}$

olmaktadır. Buradan da anlaşılacağı gibi bu özel durumlarda eğer k ve b tahmin edilmiş ise modal değer ayrıca tahmin edilemez. Ayrıca tahmin edilen modal değer bahsedilen dağılımların, çok büyük tesadüfler dışında, gerçek modal değerleri olamaz. Bu durumda gerçek modal veya muhtemel değerin bilinen k ve b için hesapla bulunması gerekir. Başka bir deyimle, parametreleri ve yayılma alanı belli olan bir beta dağılımının modu da bellidir. O halde, bu tür analizlerde belirli bir aralık için tahmin edilen modal değer gerçek modal değerden uzakta tahmin edilirse ortalama tamamlanma süreleri de belirli bir ölçüde etkilenir. Bu halde, ortalama tamamlanma sürelerindeki sapma,

$$\frac{4\ (\text{Gerçek Modal Değer - Tahmin Edilen Modal Değer})}{6}$$

kadar olur.

Faaliyetler için bu şekilde hatalı olarak hesaplanan ortalama süreler, hatanın boyutuna bağlı olarak, olasılıklı PERT analizlerinde yanlış kritik yörünge seçimine sebep olabilirler. Sadece bununla da kalmayıp her bir yörüngenin ortalama tamamlanma süresinin ve dolayısiyle projeyi belirli bir sürenin altında ya da üstünde bitirme ihtimallerinin hatalı hesaplanmasına yolaçar. Bunun sonucu da, daha tutarlı kararlar verebilmek için olasılıklı PERT modelini kullanan yöneticinin, beklediğinin aksine, hatalı kararlar vermeye sürüklenmesinden başka bir şey değildir.