

YATIRIM PROJELERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİNDE ÜÇGEN DAĞILIMLARIN KULLANILMASI

Yrd. Doç. Dr. Müh. Osman UNUTMAZ*

1. GİRİŞ

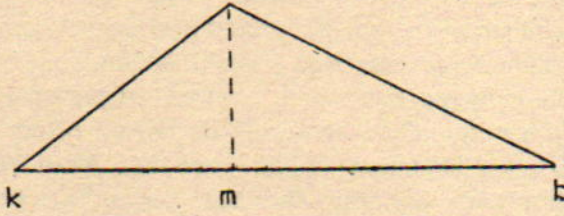
Yatırım kararlarının verilmesinde yardımcı olan şimdiki değer, iç kazanç haddi, geri ödeme dönemi, kârlılık indeksi gibi bir takım klasik metodlar kullanılmaktadır. Bu metodların hangi durumlarda yetersiz kaldıkları, yatırım kararlarını ne yönde etkiledikleri v.s. dikkate alınarak kullanıldıkları takdirde faydalı birer araç oldukları muhakkaktır. Fakat bu tekniklerin kullandıkları matematikî ifadelerdeki değişkenlerin gerçek değerleri ancak proje kabul edilip faaliyete geçildikten sonra zamanla ortaya çıkacaktır. Örnek olarak iç kazanç haddi metodu ele alınacak olursa; bir projenin ekonomik ömrü içinde her yılın nakit akışı o yılın sonunda kesinlik kazanacaktır. Çünkü, yıllık nakit akışı başlangıçta kesin belli olmıyan ve projenin ekonomik ömrü içinde yıllar ilerledikçe belirsizlik dereceleri artan maliyet, fiyat, pazar payı v.s. ile yakından ilgilidir. Kısacası, proje değerlendirildiği anda değişkenlerin birçoğu belirsizdir. Belirsizliğin hakim olduğu bu gibi durumlarda değişkenler için yalnız bir tahmin yapmak yerine, bunların alabilecekleri değerleri bir aralık içinde incelemek daha gerçekçi bir yaklaşım sağlayacaktır. Böyle bir yaklaşımda herhangi bir değişkenin gelecekteki değerlerini tahmin eden uzman veya uzman gurubundan söz konusu değişkenin alabileceği en küçük, en muhtemel ve en büyük değer tahminleri istenir. Elde edilen bu üç değerden faydalanılarak her değişken için yıllar itibarı ile farklılık gösteren üçgen dağılımlar tesis edilir. Bu şekilde belirlenen herbir üçgen dağılımdan random (rasgele) olarak alınan değerler ilgili formülde yerine konularak bağımlı değişken için bir değer elde edilir. Örnek olarak, yine iç kazanç haddi metodu ele alınacak olursa; iç kazanç haddi hesabında kullanılan değişkenler mümkün olduğu ölç-

* Erciyes Üniversitesi İktisadî ve İdarî Bilimler Fakültesi Öğretim Üyesi.

çüde üçgen dağılımlarla ifade edilirler. Tesis edilen üçgen dağılımlardan alınan random örneklerden yararlanılarak her yıl için random nakit akışları hesaplanır ve elde edilen bu değerler matematiksel ifadeye yerine konularak bir iç kazanç haddi bu'unur. Bu şekildeki random örnekleme ve hesaplamalar tekrarlanarak karar kriteri olarak seçilen iç kazanç haddi için bir dağılım elde edilmiş olur. Ayrıca bu işlemler alternatif projeler için de tekrarlanır. Böylece proje değerlendirmesi bir veya birkaç değere bağlı olarak değil, iç kazanç haddi dağılımından yararlanılarak yapılmış olur. Böyle bir yaklaşım da, belirsizlik altında proje değerlendirmenin daha güvenilir bir şekilde yapılmasını sağlar.

2. ÜÇGEN DAĞILIM

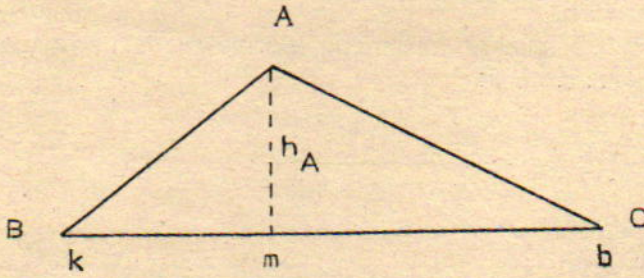
Üçgen dağılım en küçük en muhtemel ve en büyük değerlerle belirlenen sürekli bir dağılım ailesidir. Bu makalede üçgen dağılımın parametreleri en küçük, en muhtemel ve en büyük sırası ile k , m ve b ile ifade edilmiştir (Şek. 1).



Şek. 1. Üçgen Dağılımın Parametreleri

2.1. Üçgen Dağılım Fonksiyonu

Bilindiği gibi herhangi bir üçgenin fonksiyonunun bir dağılım fonksiyonu olabilmesi için sınırladığı alanın bire eşit olması gerekir. Bu nedenle üçgenin alan formülü bire eşitlenerek h_a yüksekliği, Şek. 2, k ve b parametreleri cinsinden $h_a = 2/(b-k)$ şeklinde ifade edilir. Böylece alanı birim alan olarak tutmak kaydıyla A, B ve C noktalarının koordinatları belirlenmiş olur. Sonra, belirli iki noktadan geçen doğru denkleminde faydalanılarak ihtimal dağılım fonksiyonu belirlenir.



Şek. 2. Üçgen Dağılım

A, B ve C noktalarının koordinatları sırası ile $(k, 0)$, $(m, 2/(b-k))$ ve $(b, 0)$ olduğundan ihtimal dağılım fonksiyonu, birim alanı çevreleyen iki ayrı doğru denkleminin ifade edilmesi sonucu iki ayrı bölge için;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-k)}{(m-k)(b-k)} & k \leq x \leq m \\ \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-k)} & m \leq x \leq b \\ 0 & \text{diğer bölgelerde} \end{cases} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir.

2.2. Üçgen Dağılımın Kümülatif Densite Fonksiyonu

Kümülatif densite fonksiyonu, ihtimal dağılım fonksiyonu için belirlenen (1) nolu genel ifadeden ve

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\theta) \cdot d\theta$$

integralinden yararlanarak iki ayrı aralık için

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x-k)^2}{(m-k)(b-k)} & k \leq x \leq m \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-k)(b-m)} & m \leq x \leq b \end{cases} \quad (2)$$

olarak bulunur. $m \leq x \leq b$ aralığı için bu çalışmada bulunan

$$F(x) = 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-k)(b-m)}$$

ifadesi George S. Fishman* tarafından (Bu makaledeki notasyon kullanılarak ifade edildiğinde)

$$F(x) = \frac{m-k}{b-k} + \frac{(x-m)^2}{(b-m)(b-k)}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Fakat bu ifade her ne kadar $x = m$ ve $x = b$ için doğru gibi görülmekte ise de, $m \leq x \leq b$ aralığında x in ara değerleri için yanlış sonuç vermektedir.

2.3. Üçgen Dağılımın Ortalaması (Beklenen Değeri)

Üçgen dağılımın ortalaması

$$E(X) = \int_R x f(x) dx \quad \text{genel ifadesinden faydalanılarak}$$

$$E(X) = \int_k^m x \frac{2(x-k)}{(m-k)(b-k)} dx + \int_m^b x \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-k)} dx$$

İntegralinin çözümü ve gerekli kısıtımaların yapılması sonucu

$$E(X) = \mu = \frac{k+m+b}{3}$$

olarak bulunur.

2.4 Üçgen Dağılımının Varyansı

Üçgen dağılımının varyansı,

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (3)$$

genel ifadesinden yararlanılarak

$$E(X) = \int x^2 f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_k^m x^2 \frac{2(x-k)}{(m-k)(b-k)} dx + \int_m^b x^2 \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-k)} dx$$

İntegralinin çözümü ve gerekli kısaltmalar yapılarak $E(x^2)$ için

$$E(X^2) = \frac{m^2 + b^2 + k^2 + bm + km + bk}{6}$$

* Fishman, S. George, Concept and Methods in Discrete Event Digital Simulation. John Wiley and Sons 1972 p. 202.

elde edildikten sonra (3) nolu ifadede $E(X^2)$ ve $(E(X))^2$ için bulunan değerler yerine konulup;

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \frac{k(k-m) + m(m-b) + b(b-k)}{18}$$

olarak bulunur.

Üçgen dağılımının modu da m dir.

Bu şekilde üçgen dağılımının fonksiyonu, kümülatif densite fonksiyonu, ortalaması, varyansı ve modu bulunarak üçgen dağılım belirlenmiş olur.

3. RANDOM DEĞİŞKEN X İN ELDE EDİLMESİ

Kümülatif densite fonksiyonunun alacağı değerler sıfır ile bir arasında değişmekte olup her değerın olabilme şansı eşittir. Bu nedenle random üçgen dağılım değişkeni, X , Yeknesak (Uniform) dağılım ve üçgen dağılımın kümülatif densite fonksiyonundan ($F(x)$ den) faydalanılarak bulunur. Yeknesak random değişken U ile ifade edildiği takdirde $U = F(x)$ yazılabilir. $U = F(x)$ ifadesinden faydalanılarak üçgen random değişken, X , her iki aralık için üçgen dağılımın parametreleri ve yeknesak random değişken U cinsinden;

$$X = \begin{cases} k + \sqrt{(m-k)(b-k)U} & 0 \leq U \leq (m-k)/(b-k) \\ b - \sqrt{(b-k)(b-m)(1-U)} & (m-k)/(b-k) < U \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

şeklinde ifade edilir.

(4) nolu eşitliğin $(m-k)/(b-k) < U \leq 1$ aralığı için bulunan kısmı, George S. Fishman tarafından yine farklı olarak verilmiştir. Bu farklılık (2) nolu eşitliğin $m \leq x \leq b$ aralığı için verilen kısmının farklılığından kaynaklanmaktadır.

Üçgen random değişken X i parametreler ve yeknesak random değişken U cinsinden ifade eden (4) nolu eşitlikte her hangi bir üçgen dağılımının parametreleri yerine konulduğu takdirde bu eşitlik sadece U nun fonksiyonu olarak kalır. Böylece, her random değişken U ya karşılık bir random değişken X elde edilmiş olur.

4. ÜÇGEN DAĞILIMLARIN KULLANILMASI

Esas itibarı ile üçgen dağılımlarının kullanılması; belirsizlik arzeden ve ihtimal dağılımı belli olmıyan değişkenlerin bir aralık içinde incelenmesi ihtiyacından doğmaktadır. Örnek olarak yine iç kazanç haddi ele alınacak olursa; bu metodla işlem yapabilmek için, her yılın nakit akışı bilinmesi gerekir. Nakit akışları ise, birtakım değişkenlerin fonksiyonu olup başlangıçta belirsizdir. Bu nedenle projenin ekonomik ömrü içinde her değişkenin her yıl için tahmin edilmesi lazımdır. Tek bir değerle veya üçgen dağılımı tesis etmek için gerekli en küçük, en muhtemel ve en büyük değerlerle işlem yapmak yerine, her değişkenin yıllar itibarı ile göstereceği farklılık da dikkate alınarak, her yıl için her değişkene tekbül eden farklı üçgen dağılımlar tesis edilir. Her yıla ait nakit akışı ise, her değişkenin o yıla ait üçgen dağılımından örnekleme yaptıktan sonra hesaplanır. Her yılın random nakit akışı bu şekilde bulunduktan sonra bir iç kazanç haddi elde edilir. Bu random örnekleme tekrarlanarak her proje için bir iç kazanç haddi dağılımı bulunmuş olur. Fakat, herhangi bir değişkenin herhangi bir yıldaki alacağı random değeri hesaplariken yeknesak random değişken U kullanıldığından, bağımsızlığı korumak için her işlemde kullanılacak U random olarak seçilmelidir.

Bu işlemler hernekadar karmaşık gibi görünmekte ise de; bilgisayarlardan faydalanarak böyle bir simülasyon büyük bir kolaylıkla yapılabilir. Neticede, yukarıda özellikleri belirtilen üçgen dağılımlardan yararlanarak proje değerlendirmede daha güvenilir sonuçlara ulaşma imkânı sağlanmış olur.