KONVEKS KADRATİK PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE İKİ METODUN ETKİNLİK BAKIMINDAN KARŞILAŞTIRILMASI

Doç. Dr. CEMÂL ÖZGÜVEN (*)

1. GİRİŞ

Bu çalışmada konveks kadratik programlama problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan Dantzig ve Beale metodları ele alınacaktır. Bu iki metodun esasları ve kuralları kısa olarak verildikten sonra optimum çözümü bulmak için yapılan iterasyon sayısı ile ölçülen etkinlik bakımından söz konusu metodlar karşılaştırılacaklardır. Çözüm sürecinde metodlar arasında etkinlik farklarının ortaya çıktığı durumlar ve bu durumlarda etkinlik farklarının sebepleri anlatılacaktır. Metodların etkinlik farklarına göre problemler sınıflandırılacak ve hipotetik problemler üzerinde örnekler verilecektir. Bir araştırmanın yaptığımız genellemeleri teyid eden sonuçları sunulacaktır. En sonunda konveks kadratik programlama problemlerini Dantzig ve Beale metodları çerçevesinde en az bilgisayar maliyetiyle çözebilmek amacıyla bazı öneriler getirilecektir.

Çözücü amaçlanan konveks kadratik programlama problemlerinin genel formu şöyledir :

$$\text{maksimize edin } f = p'x - 1/2\ x'Cx \qquad (1)$$

sınırlar

$$Ax + y = d \qquad (2)$$
$$x, y \geqq 0$$

Burada p bir nxl vektör, x bir nxl çözüm vektörü, C bir nxn pozitif yarı kararlı matriks, A bir mxn pozitif sınır matriksi, y bir mxl boş değişkenler vektörü ve d bir mxl pozitif vektördür. Bu form bir başlangıç temel uygun çözümünün peşinen mevcut olmasını ve sınırsız çözümün ortaya çıkmamasını temin etmektedir.

(*) Kayseri Üniversitesi İşletme Fakültesi Öğretim Üyesi.

2. DANTZİG METODUNUN ESASLARI VE KURALLARI

Dantzig metodu problem (1), (2) yi çözmek için Kuhn-Tucker gerekli şartlarından hareket etmektedir. Söz konusu problemin optimum çözümünün hepsini sağladığı Kuhn-Tucker gerekli ve (1)

şartları

$$z = [x,y] \geqslant 0 \qquad (3)$$

$$u = [v,w] \geqslant 0 \qquad (4)$$

$$z'u = 0 \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} -C & -A' & I & 0 \\ A & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ v \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ d \end{bmatrix} \qquad (6)$$

konkav olduğuna göre yeterli olmaktadır (1). Bu metodun esaslarına geçmeden önce bazı tanımlar yapalım. z değişkenlerini primal ve u değişkenlerini dual değişkenler olarak adlandıralım. «Her bir y_i ve w_i değişkenleri çiftine ve her bir x_i ve v_i değişkenleri çiftine tamamlayıcı değişkenler diyelim» (2). Bu metoddaki doğrusal sınırlar (6) da yer almakta ve her iterasyonda (m+n) değişkenli (6) sisteminin m+n değişken ihtiva eden yeni bir temel çözümü bulunmaktadır. Temel çözümlerde her primal değişken sıfır veya pozitiftir. Dolayısıyla (2) deki sınırlar daima sağlanmaktadır. Her hangi bir dual değişken negatif oldukça iterasyonlar devam eder. Her

Dantzig Metodu İçin Başlangıç Tablosu

Temel Değişkenler	Temel Değişkenlerin Değeri	x	w
F	0	—p'	—d'
v	—p	—C	—A'
y	d	A	0

Tablo 1

(1) Bu şartların nasıl elde edildiği için bakınız : Pfaffenberger, Roger-Walker, David, **Mathematical Programming for Economics and Business**, The Iowa State University Press, 1976, s. 157-164. Hadley, G.,**Nonlinear and Dynamic Programming**, Addison - Wesley Publishing Company, Inc., 1964, s. 185-202.

(2) Wagner, Harvey, M., **Principles of Operations Research**, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, 1974, s. 606.

hangi bir iterasyon sonucunda elde edilen temel çözümlerle ilgili iki durum ortaya çıkabilir. Birinci durum her bir j ve i için temelde yalnız bir tamamlayıcı değişkenin bulunmasıdır. Böyle bir çözüme standard çözüm denir ve bu çözüm Kuhn-Tucker şartı (5) i sağlar. Diğer durum ise temelde bir çift tamamlayıcı değişkenin bulunmasıdır. Buna bağlı olarak bir çift tamamlayıcı değişken de temelin dışında yer alır. Böyle bir çözüme standard olmıyan çözüm denilmektedir. Standard olmıyan bir çözüm ortaya çıktığında yeni temel değişkeni seçme kuralı Kuhn-Tucker şartı (5) in yeniden sağlanmasını gözetir.

Dantzig metodunun başlangıç tablosu olan Tablo 1 den itibaren aşağıdaki kurallar uygulanmaktadır.

1 — (a) Çözüm standard ise ve bütün temel dual değişkenler sıfır veya pozitif ise iterasyonları durdurun. Aksi taktirde en negatif temel dual değişkenin tamamlayıcısı olan primal değişkeni temele alınmak üzere seçin. (b) Çözüm standard değil ise temel olmıyan çiftteki dual değişkeni temele alınmak üzere seçin.

2 — (a) T.D.D. sütununun temel primal değişkenlere ait satırlarındaki elemanları yeni temel değişkenle ilgili sütunun temel primal değişkenlere ait satırlarındaki elemanlara bölün. Bulunan minimum pozitif oranın değeri r olsun ve bu minimum pozitif oran bir temel primal değişken için k satırında teşekkül etsin. (b) Çözüm standard ise T.D.D. sütunundaki elemanı yeni primal temel değişkene ait sütunun ilgili tamamlayıcı dual değişkene ait satırındaki elemana bölün. Bu oran pozitif ise ve r yi geçmiyorsa tamamlayıcı dual değişkeni temelden çıkartın. Aksi taktirde k satırındaki primal değişkeni temelden çıkartın. (c) Çözüm standard değil ise T.D.D. sütunundaki elemanı yeni dual temel değişkene ait sütunun temeldeki çiftin dual değişkenine ait satırındaki elemana bölün. Bu oran pozitif ise ve r yi geçmiyorsa bu dual değişkeni temelden çıkartın. Aksi taktirde k satırındaki primal değişkeni temelden çıkartın (3).

Dantzig metodu bütün ara çözümlerde Kuhn-Tucker şartı (3) ün sağlanmasını gözetir. Ayrıca her ara çözüm Tuhn-Tucker şartı (6) yı sağlıyacaktır. Bunlara ek olarak (4) ve (5) şartlarını da sağlıyan bir standard çözüm yukarıdaki kurallara göre bulunduğu zaman iterasyonlar durdurulacaktır. Dantzig metodu problem (1), (2) nin optimum çözümünü sınırlı sayıda adımda bulunmaktadır (4).

---

(3) wagner, s. 607

(4) İspat için bakınız :
Van de Panne, C. - Whinston, Andrew, «Simplical Methods for Quadratic Programming» - **Naval Research Logistics** Quarterly, Office of Naval Research Vol. 11, No. 4 s. 28-7-291.

3. BEALE METODUNUN ESASLARI VE KURALLARI

Dantzik metodundan farklı olarak Beale metodu problem (1), (2) nin çözümü için Kuhn-Tucker şartlarından hareket etmez. Bu metod doğrudan doğruya (1) ve (2) üzerinde çalışır.

«Beale metodunda bir başlangıç uygun çözümüne ihtiyaç vardır, $d \geq 0$ ise başlangıç uygun çözümü peşinen mevcuttur; y değişkenleri temel olan x_1 değişkenleri temel olmıyan değişkenlerdir. Sınırlar, o zaman, temel değişkenleri temel olmıyan değişkenlere göre ifade etmektedirler :

$$y = d - Ax \qquad (7)$$

Amaç fonksiyonu temel olmıyan değişkenlere göre bir kadratik form olarak ifade edilmektedir :

$$f = f_o + p'x - 1/2\ x'Cx \qquad (8)$$

Başlangıç çözümünde $f_o = 0$ dır.

Her bir çözümde hem temel değişkenler hem de amaç fonksiyonu (7) ve (8) deki gibi temel olmıyan değişkenlere göre ifade edilmektedir. Her iterasyonda yeni bir temel değişken ve temelden ayrılan değişken seçilmekte ve bunlara göre hem sınırlar hem de amaç fonksiyonu transformasyona tabi tutulmaktadır. Bu şöyle yapılmaktadır. Eğer, mesela, yeni temel değişken x_1 ise temelden çıkan değişken y_1 ise (7) nin ilk denklemi

$$y_1 = d_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n \qquad (9)$$

şu şekilde yazılmaktadır :

$$x_1 = (d_1/a_{11}) - (1/a_{11})y_1 - (a_{12}/a_{11})x_2 - \ldots - (a_{12}/a_{11})x_n \qquad (10)$$

Bu ifade (7) ve (8) de x_1 in yerine konulmakta ve bunun sonucunda temel değişkenlerin ve amaç fonksiyonunun temel olmıyan değişkenlere göre yeni bir ifadesi edilmektedir.

Yeni temel değişkenler şöyle seçilmektedir. Amaç fonksiyonunun temel olmıyan değişkenlere göre kısmi türevleri vektörü x değişkenlerinin temel olmadığı ilk durumda

$$\partial f/\partial x = p - cx \qquad (11)$$

olmaktadır. Cx terimi düşmektedir çünkü x değişkenlerinin değerleri sıfırdır.

p nin bir elemanı pozitif ise mütekabil x değişkeninin değerindeki bir artış amaç fonksiyonunun değerini yükseltir. Dolayısıyla amaç fonksiyonunun doğrusal teriminde en büyük pozitif katsayıya sahip bulunan temel olmıyan değişken yeni temel değişken seçilmektedir. Yeni temel değişken x_l olsun. (11) de buna tekabül eden denklem

$$\partial f/\partial x_l = p_l - c_{l1}x_1 - \ldots - c_{ll}\ x_l - \ldots - c_{nl}x_n \qquad (12)$$

olmaktadır.

$$x_l = p_l/\ c_{ll} \qquad (13)$$

olana kadar $\partial f/\partial x_i$ nin pozitif kalacağı açıktır. Diğer taraftan mevcut temel değişkenlerin negatif olmadan kalmaları gerekmektedir. Böylece, doğrusal programlamada olduğu gibi, x_i en çok temel değişkenlerden biri sıfır olana kadar arttırılabilir. x_i nin bu azami değeri

$$\min_i \ (d_i / a_{il} \mid a_{il} > 0) \qquad (14)$$

olmaktadır: (13) ve (14) ün değerlerini karşılaştırıp küçük olanını seçeriz.

Eğer küçük olan değer (14) de ise yukarıda anlatıldığı gibi ilgili temel değişken temelden çıkartılır. Eğer daha küçük değeri (13) verirse denklem (12) şöyle kullanılır: $\partial f/\partial x_i = u_i$ yazalım. (12) de u_i yerini x_i ye bırakarak temelden çıkacak bir temel değişken olarak kabul edilebilir. Bu durumda (12) yi problemin sınırlarına ekledik demektir. Denklem (12).

$$x_i = (p_i / c_{ii}) - (c_{1i}/c_{ii})x_1 - \ldots - (1/c_{ii})\,u_i - \ldots - (c_{ni}/c_{ii})x_n \qquad (15)$$

e dönüştürülmekte ve bu denklem hem sınırlarda hem de amaç fonksiyonunda x_i nin yerine konulmaktadır.

Yeni temel olmıyan değişkenimiz u_i işaret bakımından tahditsiz olduğu için serbest değişken adını taşımaktadır» (5). «Bu demektir ki sonraki bir aşamada $\partial f/\partial u_i$ pozitif veya negatif olursa u_i yi temele almak suretiyle amaç fonksiyonunun değeri yükseltilebilir. Beale metodunda, bu durumda, serbest değişkenler işaret bakımından tahditli diğer değişkenlere tercihan öncelikle temele alınmaktadırlar» (6). «O zamana kadar temel olmıyan bir serbest değişken temele alınırsa bu değişken ihmal edilebilir çünkü başka bir temel değişkenin diğerinin değişmesiyle söz konusu temel serbest değişken negatif olabilir. Ayrıca bu değişkenin nihai çözümdeki değeri de bizi ilgilendirmemektedir» (7). Amaç fonksiyonunun işaret bakımından tahditli temel olmıyan değişkenlere göre kısmi türevleri pozitif değilse serbest değişkenlere göre kısmi türevleri sıfır ise optimum çözüm bulunmuş demektir.

Bir konveks kadratik programlama problemini çözmek için başlangıç Beale tablosu şöyle kurulmaktadır. Bu tablonun A kısmı denilen üst kısmında d ve A matriksleri, C kısmı denilen alt kısmında p ve C matrikslerinin 1/2 katı yer almaktadır. k sütunu A

---

(5) Van de Panne, C., **Methods for Linear and Quadratic Programming**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975, s. 332 - 334.

(6) Dorn, W.S., «Nonlinear Programming-A Survey», **Management Science**, Vol. 9, No. 2, Jan. 1963, s. 189.

(7) Vajda, s., **Mathematical Programming**, Addison Wesley Publishing Company Inc., 1961, s. 224.

kısmında değişkenlerin değerlerini C kısmında kısmi türevlerin değerlerini vermektedir. C kısmının k satırı ve k sütununda yer alan eleman A kısmındaki çözüm için amaç fonksiyonunun değerini vermektedir.

Yukarıda anlatılan çeşitli işlemler Başlangıç tablosundan itibaren aşağıdaki kurallara göre yapılmaktadır :

Beale Metodu İçin Başlangıç Tablosu

		Temel Olmıyan Değişkenler k	 x	
Temel Olmıyan Değişkenler	x	0	I_n	A Kısmı
Temel Değişkenler	y	d	—A	
	k	0	1/2P	
Temel Olmıyan Değişkenler	x	1/2 p	—1/2 C	C Kısmı

Tablo 2

1 — Eğer bir serbest değişken temel değil ise ve k satırında ona ait eleman sıfır değil ise bu serbest değişkenin temele alınması gerekir. Aksi taktirde k satırında en büyük pozitif elemana sahip bulunan x değişkeninin temele alınması gerekir. k satırında hiç bir pozitif eleman yoksa çözüm maksimumdur. k satırındaki en büyük pozitif eleman anahtar sütunu tanımlar.

2 — Kural 1 tarafından seçilen elemanı C kısmındaki mütekabil köşegen elemana (eğer bu köşegen eleman negatif ise) bölün. A kısmının k sütunundaki elemanları anahtar sütundaki mütekabil negatif elemanlara bölün. Bütün bu oranların mutlak değer olarak en küçüğünü seçin. Bu da anahtar satırı tanımlar. Anahtar sütun ve anahtar satır için müşterek olan eleman anahtar sayıdır.

3 — Anahtar sütundaki elemanları anahtar sayıya bölün. Yeni anahtar sütun böyle elde edilir.

4 — Ara tablodaki bir r satırını elde etmek için anahtar sütun hariç her hangi bir c sütununu ele alın. Bu sütundaki bir elemandan yeni anahtar sütunun r satırındaki eleman ile eski anahtar satırın C sütunundaki elemanın çarpımını çıkartın. Ara tablo böylece tamamlanır.

5 — İkinci anahtar satır anahtar sütunun C kısmında köşegen olan elemanı tarafından tanımlanır. Eğer ilk anahtar satır C matriksinde bulunsaydı ikinci anahtar satır birincisinin aynısı olurdu. İkinci anahtar satırı ilk anahtar sayıya bölün.

6 — C matriksinde bir q sütununu elde etmek için ikinci anahtar satır hariç her hangi bir p satırını ele alın. Bu satırdaki bir elemandan yeni kurulan ikinci anahtar satırın q sütunundaki eleman ile birinci anahtar satırın p sütunundaki elemanın çarpımını çıkartın. Nihai tablonun C kısmı böylece tamamlanır.

7 — C kısmının simetrik olması gerekir.

8 — A kısmı değişmeden kalır (8).

Hesaplamanın bir aşaması böylece tamamlanır. Kural 1 den başlıyarak aynı süreç tekrarlanır. Beale metodu için başlangıç tablosundan itibaren yukarıdaki kurallara göre iterasyonlar yapmak suretiyle sınırlı sayıda adımda Problem (1), (2) nin optimum çözümü bulunacaktır (9).

4. ÇÖZÜM SÜRECİNDE METODLAR ARASINDA ETKİNLİK FARKLARININ ORTAYA ÇIKTIĞI DURUMLAR

Çözülmesi amaçlanan kadratik programlama probleminin formu üzerinde Giriş Bölümünde konulan varsayımlardan dolayı Dantzig ve Beale metodları için başlangıç tablosu niteliğinde olan Tablo 1 ve Tablo 2 ye bakalım. Dantzig başlangıç tablosunun y satırlarında yer alan sınırlar Beale başlangıç tablosunun A kısmında A matriksi —1 ile çarpılmış olarak bulunmaktadır. Dantzig başlangıç tablosunun F ve v satırları Beale başlangıç tablosunun C kısmında —p vektörü —1/2 ile —C matriksi 1/2 ile çarpılmak şartıyla yer almaktaaır. Beale tablolarında v ve w değişkenlerine yer verilmemiştir. Bunun sebebi bu metodun Kuhn-Tucker şartlarına dayanmaması Lagranj çarpanlarını kullanmamasıdır.

Standard Dantzig tablosu standard bir çözüm ihtiva eden bir tablodur. Beale anlamında standart tablo ise C kısmının k satırında serbest değişkenlere ait teriflerin sıfır yani amaç fonksiyonunun serbest değişkenlere göre kısmi türevlerinin sıfır olması halinde ortaya

(8) Dorn, s. 191- -193

(9) İspat için bakınız :
Beale, E.M.L., «On Quadratic Programming», **Naval Research Logistics Quarterly**, Office of Naval Research, Vol. 6, No. 3, 1959, S. 234 - 235.

çıkar. Başlangıç tablolarından itibaren Dantzig ve Beale tabloları standard oldukları müddetçe temel değişkenler cümlesine alınacak değişkenin seçimi ile ilgili kurallar her iki metodda aynıdır. Dantzig metodunun tamamlayıcı temel dual değişkeni en negatif olan primal değişkenin temele alınmasına dair kuralı ile Beale metodunun C tablosunda k satırında en pozitif katsayıya sahip bulunan değişkenin temele alınmasına dair kuralı aynı değişkenin temele alınmasına yol açmaktadır. Temelden çıkarılacak olan değişkenin seçimi için de her iki metodda aynı oranlar hesaplanmaktadır.

Eğer, minimum pozitif oran Dantzig tablosunda bir primal değişken ile ilgili ise yani Beale tablosunun A kısmında ise her iki metodda da temelden çıkartılacak olan değişken aynı ve anahtar sayı işaret farkıyla aynıdır. Bu durumda Dantzig metodu önce bir primal iterasyon yaparak seçilen primal değişkeni temele alır ve seçilen primal değişkeni temelden çıkarır. Standard olmıyan bir tablo elde eder çünkü yeni temel değişkenin tamamlayıcısı olan dual değişken hâlâ temelde ve negatiftir. Bunun üzerine Dantzig metodu temel olmıyan tamamlayıcı değişkenler çiftindeki dual değişkeni temele almak ve temel olan tamamlayıcı değişkenler çiftindeki dual değişkeni temelden çıkarmak üzere bir dual iterasyon yapar ve standard bir tablo elde eder. Duale metodu ise dual değişkenleri kullanmadığı ve dolayısıyla Dantzig anlamında standard olmıyan tablolar elde etmediği için sadece bir adet iterasyon yaparak seçilen değişkeni temele alır, seçilen değişkeni temelden çıkartır ve Beale anlamında bir standard tablo elde eder yani Dantzig metodunun iki iterasyonda vardığı noktaya bir iterasyon yaparak ulaşır (10). Bu nokta $Ax+y=d$ sınırlarının tayin ettiği uygun çözüm alanının bir köşe noktasıdır. Sınırlardan birisi bağlayıcı kılınmıştır. Bu noktaya tekabül eden Dantzig ve Beale tablolarındaki çözümler aynıdır.

Eğer temelden çıkartılacak değişkenin seçimi için hesaplanan minimum pozitif oran Dantzig tablosunda yeni temel değişken ile ilgili v_i dual değişkenine ait satırda ise bu oran Beale tablosunda C kısmının yeni temel değişkenle ilgili satırında bulunacaktır. Bu durumda her iki metodla da yapılan iterasyon sonucunda çözüm vektörü bir sınırı bağlayıcı kılamıyacaktır.

Bu durumda Dantzig metodu bir adet primal iterasyon yaparak

(10) Dual değişkenleri kullanmadığı için Beale metodu bazı durumlarda daha az bazı durumlarda ise daha fazla iterasyon yapmaktadır. Beale metodunun Dantzig metoduna göre daha az iterasyon yaptığı durum budur. Daha fazla iterasyon yaptığı durum ise aşağıda ele alınacaktır.

seçilen x_i primal değişkenini temele alacak ve tamamlayıcısı olan v_i dual değişkenini temelden çıkartacak - bir standard tablo elde edecektir. Çözüm vektörü uygun çözüm alanının bir köşe noktasına geçemediği yani sınırlardan biri ile ilgili primal boş değişken temelden çıkmadığı için yeni standard tabloda (dejenerasyon yoksa) m+1 adet pozitif primal değişken bulunacaktır. Bu standard tablodaki çözüm Tablo 1 deki denklem sisteminin bir temel primal uygun çözümüdür fakat $Ax+y=d$ sisteminin bir temel çözümü değildir.

Aynı durumda Beale metodu boş değişkeni işaret bakımından tahditsiz bir serbest değişken u_i olan bir sınırı $\partial f/\partial x_i + u_i = 0$ probleme eklemekte ve bu sınırda x_i nin katsayısı üzerinde bir iterasyon yaparak x_i değişkenini temel değişkenler cümlesine u_i serbest değişkenini temel olmıyan değişkenler cümlesine almaktadır. Bu işlem Bale tablosunun C kısmında seçilen (Dantzig anahtar sayısının yarısı olan) ve köşegende bulunan anahtar sayı üzerinde bir iterasyon yapmak demektir. Bu iterasyon sonunda Beale anlamında bir standard tablo elde edilecektir (11). m+1 adet y ve x değişkeninin (dejenerasyon bulunmaması halinde) pozitif olduğu yeni çözüm Beale tablosunun A kısmından okunabilir. Yeni tablonun A kısmında m+1 sınıra ait satırlar yer alacaktır. Elde edilen standard Dantzig ve Beale tablolarında uygun çözüm alanının aynı kenar noktasına tekabül eden aynı çözümler yer alacaktır.

Tekrarlarsak, bu durumda her iki metod da bir iterasyon yaparak aynı ve kendi anlamlarında standard çözümlere ulaşmışlardır. Şu farkla ki Beale metodu dual değişkenleri kullanmamasına karşılık yeni bir sınır getirmiş ve bir serbest değişkeni temel olmıyan değişkenler cümlesine eklemiştir. Beale metodunda serbest değişkenlerin temel olmıyan değişkenler cümlesine eklenmesi çözümün sonraki aşamalarında Beale metodunun yapması gereken iterasyon sayısının Dantzig metodununkinden daha fazla olabileceğine dair bir tehlike işaretidir. Bunu ileride göreceğiz.

Uygun çözüm alanının bir yüzünde uygun yönde ilerliyen çözüm vektörünü sınırlardan biri durdurmuyorsa yani amaç fonksiyonunun artan değişkene göre kısmi türevi daha önce sıfır oluyorsa «Beale metodu $u_i = 0$ sınırını çözüm vektörünün optimum uzunlukta iler-

---

(11) Temel olmıyan değişkenler cümlesine alınan u_i serbest değişkeninin k satırı katsayısının sıfır olacağının ispatı için bakınız :
Vajda, s. 228 - 229.

lemesi için bir hile olarak kullanmaktadır» (12). Buna mukabil dual değişkenlere yer veren Dantzig metodu aynı işi x_i değişkeninin dual tamamlayıcısı olan v_i değişkenini temelden çıkartarak yapmaktadır. Her iki metodda da çözüm vektörü ilk sınırlara ($Ax+y=d$) ait uygun çözüm alanının bir köşe noktasına varmadan aynı noktada durmuştur. Ancak, bu durumda, Beale metodu yeni bir sınırı öyle bir şekilde getirmektedir ki yeni çözüm $Ax+y=d$ ve $u_i=0$ sınırlarının bir köşe noktasını teşkil etmektedir. Yeni çözümde (dejenerasyon yoksa) $m+1$ adet pozitif değişken ve problemde artık $m+1$ adet sınır vardır. «Bu bakımdan, Beale metodu, her bir çözümünün sınırların bir uç noktasına tekabül ettiği doğrusal programlama için simpleks metoduna çok yakındır» (13).

Dantzig ve Beale metodlarında meydana gelebilecek çeşitli durumları inceliyebilmek için bazı tanımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Dantzig metodunda standard tablolar üzerinde iki çeşit primal iterasyon yapıldığını yukarıda gördük. Bunlardan birincisinde -ki buna primal standard iterasyon denilmektedir, bir primal değişken temele alınmakta ve temelden tamamlayıcısı olan dual değişken çıkartılmaktadır. Aynı metodla standard olmıyan bir primal iterasyon yapılması halinde bir primal değişken temele alınmakta fakat başka bir primal değişken temelden çıkartılmaktadır. Sonuç olarak standard olmıyan bir tablo elde edilmektedir. Beale anlamında standard bir iterasyonu standard bir Beale tablosundan standard bir Beale tablosuna geçiren bir iterasyon olarak tanımlarsak yukarıda gördüğümüz üzere standard olan ve olmıyan Dantzig iterasyonlarına standard Beale iterasyonları tekabül etmektedir. Standard olmıyan Beale iterasyonunu standard bir Beale tablosundan standard olmıyan bir Beale tablosuna geçiren iterasyon olarak tanımlıyalım. Standard olmıyan bir Beale iterasyonunun standard olmıyan bir Dantzig iterasyonuna hangi durumlarda tekabül edeceğini, standard olmıyan Beale iterasyonlarının hangi durumlarda yapılacağını göstermek için henüz birikimimiz yeterli değildir. Bunlar ileride gösterilecektir.

Dual iterasyonlar standard olmıyan tablolar üzerinde yapılmaktadır. Dual standard Dantzig iterasyonunda temel olmıyan tamamlayıcı değişkenler çiftindeki dual değişken temele alınmakta temel tamamlayıcı değişkenler çiftindeki dual değişken temelden çıkartılmaktadır. Sonuç olarak standard bir tabloya kavuşulmaktadır. Standard olmıyan dual Dantzig iterasyonunda ise temel olmıyan ta-

---

(12) Wagner, s. 606.
(13) Panne, s. 336.

mamlayıcı değişkenler çifttindeki dual değişken temele alınmakta buna mukabil bir temel primal değişken temelden çıkartılmaktadır. Sonuç olarak yine standard olmıyan bir tablo elde edilmektedir. Beale anlamında dual iterasyonlar aşağıda anlatılacaktır.

Problem (1), (2) de m adet sınır bulunduğuna göre her iki metoda ait başlangıç tablolarındaki başlangıç çözümlerinde m adet temel y değişkeni yer alacaktır. Sınırlar için bu temel uygun çözümden hareketle her iki metodla problemin çözümüne girişilirse çözüm sürecinde ne gibi durumlarla karşılaşılabileceğini görelim. Bu durumlar üçe ayrılmıştır (14).

A DURUMU

Başlangıç tablolarından itibaren ard arda Dantzig anlamınaa standard olmıyan primal ve standard dual iterasyonlar (ikili iterasyonlar) gelebilir. Bu duruma A Durumu diyelim. Başka bir ifade ile A Durumu çözüm vektörünün uygun çözüm alanının köşelerini takip ederek ilerlemesi durumudur. Dantzig başlangıç tablosunun y satırları ve w sütunlarında yer alan matriks boş bir matriks olduğu için her bir ikili iterasyonun ikincisini teşkil eden dual iterasyon standard olacaktır. Bir iterasyon devresinin uzunluğunu standard bir tablodan başka bir standard tabloya geçmek için yapılan iterasyon sayısı ile ölçelim. A durumunda orijinden itibaren çözüm vektörü $Ax+y=d$ sınırlarının bir köşe noktasından öbür köşe noktasına geçerken Dantzig metodu bir iterasyon devresini iki iterasyonda tamamlayacak yani, her bir köşe noktasına geçmek için iki iterasyon yapacaktır. Bu durumda temel primal değişkenlerin sayısı m de kalacaktır (15).

Aynı A durumunda Beale metodu bir iterasyon devresini bir iterasyonda tamamlar, uygun çözüm alanının bir köşe noktasından öbür köşe noktasına, yukarıda gördüğümüz gibi bir iterasyonda geçer (16). Temel değişkenlerin sayısı m de kalır ve dolayısıyla Beale metodu probleme yeni bir sınır eklemez, temel olmıyan değişkenler cümlesine serbest değişken sokmaz.

A durumunda yapılan iterasyon sayısı bakımından Beale metodu daha etkindir. Beale metodunun vardığı çözüme Dantzig metodu iki misli iterasyon yaparak ulaşmaktadır.

---

(14) Bakınız : Panne, S. 343 - 344.

(15) Bakınız : Ek Tablo 1 in ilk beş satırı, Ek Tablo3.

(16) Bakınız : Ek Tablo 2 nin ilk üç satırı, Ek Tablo 4.

A Durumunda Genel Dantzig Tabloları

Alt Tablo	T.D.	T.D.D.	x^1	x^2	w^1	w^2
	F	0	$-p^{1'}$	$-p^{2'}$	$-d^{1'}$	$-d^{2'}$
0	v^1	$-p^1$	$-C_{11}$	0	$-A'_{11}$	$-A'_{21}$
	v^2	$-p^2$	0	0	$-A'_{12}$	$-A'_{22}$
	y^1	d^1	A_{11}	A_{12}	0	0
	y^2	d^2	A_{21}	A_{22}	0	0
			x^1	y^1	v^1	w^2
	F	$p^{2'}A_{12}^{-1}d^1$	$-p^{1'}+A_{11}A_{12}^{-1}p^{2'}$	$p^{2'}A_{12}^{-1}$	$-d^{1'}$	$1d^2$
	v^1	$-p^1$	$-C_{11}$	0	$-A'_{11}$	$-A'_{21}$
	v^2	$-p^2$	0	0	$-A'_{12}$	$-A'_{22}$
1	x^2	$A_{12}^{-1}d^1$	$A_{11}A_{12}^{-1}$	A_{12}^{-1}	0	0
	y^2	$d^2-A_{22}A_{12}^{-1}d^1$	$A_{21}-A_{22}A_{12}^{-1}A_{11}$	$-A_{22}A_{12}^{-1}$	0	0
			x^1	y^1	v^2	w^2
	F	$2p^{2'}A_{12}^{-1}d^1$	$-p^{1'}+A_{11}A_{12}^{-1}p^{2'}$	$p^{2'}A_{12}^{-1}$	$-d^{1'}A'^{-1}_{12}$	$-d^{2'}+d^{1'}A'^{-1}_{12}A'_{22}$
	v^1	$-p^{1'}+A'_{11}A'^{-1}_{12}p^2$	$-C_{11}$	0	$-A'_{11}A'^{-1}_{12}$	$-A'_{21}+A'_{11}A'^{-1}_{12}A'_{22}$
	w^1	$A'^{-1}_{12}p^2$	0	0	$-A'^{-1}_{12}$	$A'^{-1}_{12}A'_{22}$
2	x^2	$A_{12}^{-1}d^1$	$A_{11}A_{12}^{-1}$	A_{12}^{-1}	0	0
	y^2	$d^2-A_{22}A_{12}^{-1}d^1$	$A_{21}-A_{22}A_{12}^{-1}A_{11}$	$-A_{22}A_{12}^{-1}$	0	0

Tablo 3

A Durumunda Genel Beale Tabloları

Alt Tablo		k	x^1	x^2	
	x^1	0	I_{n-r}	0	
	x^2	0	0	I_r	A Kısmı
0	y^1	d^1	$-A^{11}$	$-A_{12}$	
	y^2	d^2	$-A_{21}$	$-A_{22}$	
	k	0	$1/2\ p^{1'}$	$1/2\ p^{2'}$	
	x^1	$1/2\ p^1$	$-1/2\ C^{11}$	0	C Kısmı
	x^2	$1/2\ p^2$	0	0	

Alt Tablo		k	x^1	y^1	
1	x^1	0	I_{n-r}	0	A Kısmı
	x^2	$A_{12}^{-1}d^1$	$-A_{11}A_{12}^{-1}$	$-A_{12}^{-1}$	
	y^1	0	0	I	
	y^2	$d^2-A_{22}A_{12}^{-1}d^1$	$-A_{21}+A_{22}A_{12}^{-1}A_{11}$	$A_{12}^{-1}A_{22}$	
	k	$d^1A_{12}^{-1}p^{2'}$	$1/2\ (p^{1'}-A_{11}A_{12}^{-1}p^{2'})$	$-1/2\ A_{12}^{-1}p^{2'}$	C Kısmı
	x^1	$1/2\ (p^1-A_{11}A_{12}^{-1}p^2)$	$-1/2\ C_{11}$	0	
	y^1	$-1/2\ A_{12}^{-1}p^2$	0	0	

Tablo 4

A durumunun sonunda elde edilen Dantzig ve Beale çözümlerinin ve ilgili tablolardaki alt matrikslerin (bazıları işaret farklarıyla)aynı olduklarını genel tablolar üzerinde göstermemiz ileride bazı pratik sonuçlar çıkarırken faydalı olacağı için gerekmektedir.

A durumunda r adet primal x değişkeninin temele alındığını ve r adet primal y değişkeninin temelden çıkartıldığını varsayalım. O halde, Dantzig metodu için genel başlangıç tablosu olan Tablo 3.0 daki değişkenleri şu şekilde kısımlara ayıralım. Temelde kalacak olan dual ve primal değişkenleri sırasıyla v^1 ve y^2 vektörleri, temelden çıkacak olan dual ve primal değişkenleri sırasıyla v^2 ve y^1 vektörleri temsil etsin. Temele alınacak olan primal ve dual değişkenleri sırasıyla x^2 ve w^1, temel dışında kalacak olan primal ve dual değişkenleri de sırasıyla x^1 ve w^2 vektörleri temsil etsin. Gövdedeki matrikslerde buna göre kısımlara ayrılmıştır.

Önce Tablo 3.0 da rxr matriks A_{12} üzerinde blok halinde pivolama yapılırsa r adet standard olmıyan iterasyon toplu olarak tamamlanır. Tablo 3.1 de $-A'_{12}$ blok pivot seçilerek r adet dual standard iterasyon toplu olarak yapılır ve A durumunun sonundaki standard tabloya Tablo 3.2 de ulaşılır.

Beale metodu için genel başlangıç tablosu olan Tablo 4.0 daki değişken ve matriksler de aynı esaslara göre kısımlara ayırılmıştır. rxr matriks $-A_{12}$ üzerinde blok halinde pivotlama yapılınca A durumunun sonundaki standard Beale tablosu Tablo 4.1 de elde edilmektedir.

Tablo 3.2 ve Tablo 4.1 deki çözümlerin aynı oldukları görülmektedir. Bu tablolarda yer alan alt matriksler de çarpıldıkları skalarlar arasındaki (başlangıç tablolarında aynen mevcut olan) farklar dışında aynıdırlar. A durumu sona erdiği yani çözüm vektörü en son köşe noktasına vardığı zaman Tablo 4.1 deki alt matrikslerden ve simetri özelliklerinden yararlanarak Tablo 3.2 yi kurmak, yani son Beale tablosundan aynı noktaya tekabül eden Dantzig tablosuna geçmek mümkündür. Bilgisayarın bu geçiş için harcıyacağı zaman bir tek iterasyon için harcıyacağı zamana göre çok düşüktür.

B DURUMU

Şimdi yine $Ax+y=d$ sınırları için ilk temel uygun çözüme, her iki metod için başlangıç tablolarına dönelim. Dantzig metodu ard arda standard iterasyonlar yapabilir. Bu durumda da B durumu diyelim. B durumunun başlamasıyla birlikte çözüm vektörü uygun çözüm alanının bir yüzünde zikzaklar çizmeye başlar ve bu durumun sonunda uygun çözüm alanının o yüzü itibariyle maksimum çözüme ulaşır. Bu çözüme de geçici maksimum çözüm diyelim. B durumunda standard olmıyan iterasyon yapılmadığı için çözüm vektörü hiç bir sınıra çarpmamış, uygun çözüm alanının sadece bir yüzünde kalmıştır. Bu durumda Dantzig metodunun ard arda yaptığı standard iterasyonların sayısı C matriksinin rankını aşamaz. Bu ranka da k diyelim. B durumunda Dantzig metodu bir iterasyon devresini yalnız bir iterasyonda tamamlar, her standard iterasyonla temele yeni bir primal değişken sokar ve temeldeki primal değişkenlerin sayısını en çok $m+k$ ya çıkarır.

B durumunda Beale metodu da bir iterasyon devresini bir iterasyonda tamamlayıp Dantzig metodundaki kadar iterasyon yapmaktadır. Şu farkla ki her iterasyon ile probleme geçici bir sınır, temel olmıyan değişkenler cümlesine bir serbest değişken eklemektedir. Beale metodunun B durumunun sonunda vardığı çözüm problemin ılk sınırları $(Ax+y=d)$ ve eklediği geçici sınırlar itibariyle bir köşe noktasıdır fakat problemin ilk sınırları itibariyle çözüm vektörünür üzerinde zikzaklar çizdiği yüzdeki Dantzig metodunun bulduğu geçici maksimum noktadır. Her iki metodda B durumunun sonunda aynı çözüme varırlar çünkü uygun çözüm alanının aynı yüzündeki aynı geçici maksimum çözümü aramaktadırlar.

B durumunda ypılan iterasyon sayısı bakımından her iki metodun da etkinlikleri aynıdır. Eşit sayıda iterasyon yaparak (en çok k adet) aynı geçici maksimum çözüme ulaşırlar. B durumunun sonunda elde edilen Dantzig ve Beale tabloları arasındaki ilişkiyi ileride

B Durumunda Genel Dantzig Tabloları

Alt Tablo	T.D.	T.D.D.	x^1	x^2	w
0	F	0	$-p^{1'}$	$-p^{2'}$	$-d'$
	v^1	$-p^1$	$-C_{11}$	$-C_{12}$	$-A'_1$
	v^2	$-p^2$	$-C_{21}$	$-C_{22}$	$-A'_2$
	y	d	A_1	A_2	0
			x^1	v^2	w
1	F	$p^{2'}C_{22}^{-1}p^2$	$-p^{1'}+p^{2'}C_{22}^{-1}C_{21}$	$-p^{2'}C_{22}^{-1}$	$-d'+p^{2'}C_{22}^{-1}A'_2$
	v^1	$-p^1+C_{12}C_{22}^{-1}p^2$	$-C_{11}+C_{12}C_{22}^{-1}C_{21}$	$-C_{12}C_{22}^{-1}$	$-A'_1+C_{12}C_{22}^{-1}A'_2$
	x^2	$C_{22}^{-1}p^2$	$C_{22}^{-1}C_{21}$	$-C_{22}^{-1}$	$C_{22}^{-1}A'_2$
	y	$d-A_2C_{22}^{-1}p^2$	$A_1-A_2C_{22}^{-1}C_{21}$	$A_2C_{22}^{-1}$	$-A_2C_{22}^{-1}A'_2$

Tablo 5

atıfta bulunmak üzere göstermemiz gerekmektedir. B durumunda k adet primal x değişkeninin temele alındığını ve k adet dual v değişkeninin temelden çıkartıldığını varsayalım. O zaman Dantzig metodu için genel başlangıç tablosu olan Tablo 5.0 daki değişkenler şu şekilde kısımlara ayrılırlar. Temelde kalacak olan dual ve primal değişkenler sırasıyla v^1 ve y vektörleri ile, temelden çıkartılacak olan dual değişkenler v^2 vektörü ile temsil edilirler. Temele alınacak olan primal değişkenleri x^2, temel dışında kalacak olan primal ve dual değişkenleri de sırasıyla x^1 ve w vektörleri temsil etmektedir. Gövdedeki matriksler de buna göre kısımlara ayrılmıştır. Tablo 5.0 da kxk matriks $-C_{22}$ blok pivot olarak seçilip k adet standard iterasyon top!u olarak yapılmış ve B durumunun sonundaki standard tabloya Tablo 5.1 de ulaşılmıştır.

Beale metodu için genel başlangıç tablosu olan Tablo 6.0 da aynı esaslara göre kısımlara ayrılmıştır. C kısmındaki kxk matriks $-1/2\, C_{22}$ üzerinde blok halinde pivotlama yapılarak B durumunun sonundaki standard tabloya Tablo 6.1 de ulaşılmıştır.

B durumunun sonunda Tablo 6.1 deki alt matriksleri gerekli skalarlarla çarparak Tablo 5.1 i kurmak yani son Beale tablosundan son Dantzig tablosuna geçmek mümkündür. Ne var ki, geçiş bakımından son Dantzig tablosunun y satırları ve w sütunlarındaki $-A_2C_{22}^{-1}\,A'_2$

B Durumunda Genel Beale Tabloları

Alt Tablo		k	x^1	x^2	
0	x^1	0	I_{n-k}	0	
	x^2	0	0	I_k	A Kısmı
	y	d	$-A_1$	$-A_2$	
	k	0	$1/2\ p^{1'}$	$1/2\ p^{2'}$	
	x^1	$1/2\ p^1$	$-1/2\ C_{11}$	$-1/2\ C_{12}$	C Kısmı
	x^2	$1/2\ p^2$	$-1/2\ C_{21}$	$-1/2\ C_{22}$	
		k	x^1	u^2	
1	x^1	0	I_{n-k}	0	
	x^2	$C_{22}^{-1}p^2$	$-C_{22}^{-1}C_{21}$	$-2C_{22}^{-1}$	A Kısmı
	y	$d-A_2C_{22}^{-1}p^2$	$-A_1+A_2C_{22}^{-1}C_{21}$	$2A_2C_{22}^{-1}$	
	k	$1/2\ p^{2'}C_{22}^{-1}p^2$	$1/2\ (p^{1'}-p^{2'}C_{22}^{-1}C_{21})$	0	
	x^1	$1/2\ (p^1-C_{12}C_{22}^{-1}p^2)$	$1/2\ (-C_{11}+C_{12}C_{22}^{-1}C_{21})$	0	C Kısmı
	u^2	0	0	$-2C_{22}^{-1}$	

Tablo 6

alt matriksi eksik kalmaktadır. Son Beale tablosunun A kısmında y satırları ve u^2 sütunlarının kesiştikleri yerde $2A_2C_{22}^{-1}$ matriksi zaten mevcuttur. Bu durumda yapılması gereken bu $2A_2C_{22}^{-1}$ matriksini —1/2 A'_2 matriksiyle arkadan çarparak sonucu son Dantzig tablosunun ilgili yerine yerleştirmektir. A_2 alt matriksi ilk Beale tablosunda mevcuttur. Bilgisayarın bu geçiş için harcıyacağı zaman bir tane iterasyon için harcadığı zamana göre çok düşüktür.

C DURUMU

Çözüm sürecindeki standard bir ara çözümden hareket edelim. Bu ara çözümde temel primal değişkenlerin sayısı m den fazla olsun. Bu demektir ki daha önce Dantzig metodunda ard arda standard iterasyonlar yapılmış, Beale metodunda da ard arda geçici sınırlar eklenmiş yani temel olmıyan değişkenler cümlesine serbest değişkenler alınmıştır. Yeni temel primal değişken seçilmiştir. Fakat, temelden çıkartılacak değişkenin bir primal değişken olduğu yani standard olmıyan bir Dantzig iterasyonunun yapılacağı anlaşılmıştır. Bu duruma da C Durumu diyelim.

B durumunun sonunda çözüm vektörü probleme ait uygun çözüm alanının ilk yüzünde bir geçici maksimum çözüme ulaşmıştır. Bu geçici maksimum çözüm problemin gerçek maksimum çözümü (uygun çözüm alanının bir yüzü değil bütünü itibariyle maksimum çözüm) olabilir. Bu taktirde her iki metodda da iterasyonlar durdurulur. Aksi taktirde, çözüm vektörü uygun çözüm alanının yeni bir yüzüne çarpacak, bir sınırı bağlayıcı kılacaktır. Demek ki çözüm sürecinde C durumu B durumundan sonra gelmekte B durumunun sonunda gerçek maksimum çözüm bulunamamışsa C durumuna geçilmektedir (17).

C durumunda Dantzig metodu önce, B durumunun sonunda elde edilen standard tablo üzerinde standard olmıyan bir primal iterasyon yapar ve standard olmıyan bir tablo elde eder. Çözüm vektörü uygun çözüm alanının önceki yüzünden yeni yüzüne geçmiştir. Bundan sonra Dantzig metodu ya (1) bir tane dual standard iterasyon yapar, standard bir tablo elde eder ve uygun çözüm alanının yeni yüzündeki geçici maksimum çözümü bulur, ya da (2) bir veya daha fazla standard olmıyan dual iterasyon yapar, sonra bir dual standard iterasyon yapar ve standard bir tablo elde ederek uygun çözüm alanının yeni yüzündeki geçici maksimum çözümü bulur.

C durumunda Beale metodu da B durumunun sonundaki standard Beale tablosu üzerinde işaret farkıyla aynı anahtar sayıyı kullanarak bir iterasyon yapar. İşte, standard olmıyan Beale iterasyonu budur, çünkü bu itersyonla standard olmıyan bir Beale tablosu elde edilecektir. Bu tablonun C kısmında bütün serbest değişkenlerin k satırı katsayıları pozitif veya negatiftir. Çözüm vektörü aynı şekilde uygun çözüm alanının yeni yüzüne geçmiştir. Yeni yüzdeki geçici maksimum noktanın bulunması için eski yüzdeki maksimizasyonda kullanılan bütün eski geçici sınırların kaldırılması yani ilgili serbest değişkenlerin temel olmıyan değişkenler cümlesinden çıkartılması gerekmektedir (18). Dual standard Beale iterasyonlarında tetemel olmıyan değişkenler cümlesinden uygun çözüm alanının eski yüzü ile ilgili bir serbest değişken çıkartılmakta ve yerine yeni yüzle ilgili bir serbest değişken alınmaktadır. Başka bir ifade ile, eski yüzdeki geçici maksimumun bulunması için kullanılan geçici bir sınır kaldırılmakta yerine yeni yüzdeki geçici maksimumun bulunması için kullanılan yeni bir sınır konmaktadır. Beale metodu B durumunda eklenen geçici sınır sayısında (bu sayıya s diyelim) dual

(17) Bakınız : Ek Tablo 9, son üç satır, Ek Tablo 10, son dört satır
(18) Bakınız : Panne, s. 346.

standard Beale iterasyonu yaparak standard bir Beale tablosuna uygun çözüm alanının yeni yüzündeki Dantzig metodunun bulduğu geçici maksimum çözüme ulaşabilir. C durumunda Beale metodu devamlı dual standard iterasyonlar yapmış ise iterasyon devresini s adet iterasyonla tamamlıyarak yeni yüzdeki Dantzig metodunun bulduğu geçici maksimum noktaya ulaşır.

C durumunda Beale metodu standard olmıyan dual iterasyonlar da yapabilir. Mesela, bir eski serbest değişkenin değeri sıfır olmaktan çıkartılıp arttırılır veya azaltılırken ilgili yeni serbest değişkenin değerinden yani amaç fonksiyonunun eski serbest değişkene göre kısmi türevinden önce temel bir değişken sıfır olabilir. O zaman temel olmıyan değişkenler cümlesinden eski serbest değişkenin çıkartılması yerine söz konusu temel değişkenin alınması gerekir. Standard olmıyan dual Beale iterasyonu budur. Halbuki, söz konu temel değişkenin değeri Dantzig metodunun yeni yüzde bulduğu geçici maksimum çözümde sıfır olmıyabilir. Bu durumda, Beale metodu yine s adet standard olan ve olmıyan dual iterasyon yaparak bir iterasyon devresini tamamlar. Fakat, uygun çözüm alanının yeni yüzünde bulduğu geçici maksimum çözüm Dantzig metodunun bulduğundan farklı olur. Söz konusu değişkenlerin tekrar temel değişkenler cümlesine alınması, Dantzig metodunun bulduğu geçici maksimuma ulaşılması için ilave iterasyon yapılması bir başka iterasyon devresine girilmesi gerekmektedir.

Sonuç olarak, Beale metodunun uygun çözüm alanının yeni yüzünde Dantzig metodunun bulduğu geçici maksimum çözümü bulması için en az s adet, arada standard olmıyan dual iterasyonlar yapılmışsa s den daha çok sayıda iterasyon yapması gerekir. C durumunda yapılan iterasyon bakımından Dantzig metodunun Beale metodundan daha etkin olduğu görülmektedir.

5. METODLAR'IN ETKİNLİKLERİNE GÖRE PROBLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Yapılan araştırmalara göre amaç fonksiyonunun kadratik kısmı hakim olan problemlerin çözümünde Dantzig metodu daha etkindir. Bu problemlere D tipi problemler diyelim. Bir problemi Dantzig metodunun daha az iterasyonla çözmesi için o problemin çözüm sürecinin C durumuna girmesi gerekir. Çünkü, yukarıda gördüğümüz gibi çözüm sürecinde Dantzig metodunun daha az sayıda iterasyon yaptığı yegane durum C durumudur. C durumuna girmesi için de çözüm sürecinin her iki metodunda aynı sayıda iterasyon yaptığı B durumundan geçmesi gerekir.

D tipi problemlerin çözüm süreçlerinin hangi durumlardan geçeceği amaç fonksiyonundaki kadratik kısmın hakimiyet derecesine bağlıdır. Bu derece en yüksek olduğu zaman çözüm süreci B durumundan başlar ve bu durumun sonunda problemin maksimum çözümü bulunur. Maksimum çözüm probleme ait uygun çözüm alanının içindedir. Metodlar arasında etkinlik farkı bulunmaz, her iki metod da aynı sayıda standard iterasyon yaparak problemi çözer. Kadratik kısmın hakimiyet derecesi biraz daha azalırsa çözüm süreci B durumundan başlar, bu durumun sonunda uygun çözüm alanının ilk yüzü itibariyle bir geçici maksimum çözüm bulunur, C durumuna geçer ve bu durumun sonunda uygun çözüm alanının ikinci yüzünde problemin maksimum çözümü bulunur. C durumundaki üstünlüğünden dolayı Dantzig metodu diğerine göre daha az iterasyonla problemi çözmüş olur. Kadratik kısmın hakimiyet derecesi daha da azalırsa C durumunun sonunda uygun çözüm alanının ikinci yüzünde bulunan geçici maksimum çözüm (k çözümü diyelim) problemin gerçek maksimum çözümü değildir. Bu durumda Dantzig metodu k çözümünden itibaren ard arda standard iterasyonlar yapabilir ve ardından standard olmıyan bir iterasyonla uygün çözüm alanının bir başka yüzüne geçebilir ve diğer metoda göre üstünlüğünü korumuş olur. Aynı durumda - kadratik kısmın hakimiyet derecesi düşük ise - k çözümünden itibaren Dantzig metodu standard olmıyan bir iterasyonla uygun çözüm alanının yeni bir yüzüne geçebilir. Bu da Dantzig metodunun diğerine göre etkinlik bakımından üstünlüğünü azaltıcı bir etki yapar.

Araştırmalar amaç fonksiyonunun doğrusal kısmı hakim olan problemlerin çözümünde Beale metodunun daha etkin olduğunu göstermektedir. Bu tip problemlere de B tipi problemler diyelim. Bir problemin çözümünde Beale metodunun daha etkin olması için o probleme ait çözüm sürecinin A durumundan geçmesi gerekir çünkü sadece A durumunda Beale metodu daha avantajlıdır.

B tipi problemlerde amaç fonksiyonundaki doğrusal kısmın hakimiyetininin en yüksek derecesinde çözüm süreci A durumundan başlar ve bu durumda sona erer. Problem esas itibariyle bir doğrusal programlama problemidir ve maksimum çözüm uygun çözüm alanının bir köşe noktasındadır. Çözüm vektörü köşeleri izliyerek optimum köşeye varır. Dantzig metodunun yaptığının yarısı kadar iterasyonla problemi çözen Beale metodu daha etkindir. Doğrusal kısmın hakimiyet derecesi biraz daha azalırsa maksimum çözüm uygun çözüm alanının bir kenarında veya bir yüzünde teşekkül edebilir. Çözüm süreci A durumundan başlar, optimum çözümün yer aldığı kenar veya yüze ait bulunan köşeye kadar köşeleri izliyerek A durumunun sonunda varır. Buraya kadar Beale metodu daha etkindir. Bunun ardından standard Beale iterasyonlarıyla serbest değişkenler eklenerek uygun çözüm alanının söz konusu kenar veya yüzündeki optimum çözüm bulunur. A durumundaki avantajından dolayı Beale metodu problemi daha az iterasyon yaparak çözmüş olur. Doğrusal kısmın hakimiyet derecesi düşükse A durumunun sonundan itibaren Beale metodu serbest değişkenler ekliyerek standard iterasyonlar yapabilir ve bunların ardından standard olmıyan bir iterasyon yapması, uygun çözüm alanının yeni bir yüzüne geçmesi gerekebilir. Bu da Beale metodunun diğerine göre üstünlüğünü azaltıcı bir etki yapar.

Bazı problemlerin amaç fonksiyonlarında doğrusal ve kadratik kısımların birbirlerine karşı hakimiyetleri bulunmıyabilir. Belirsiz problemler olarak adlandıracağımız bu tip problemlerin çözüm süreçleri ard arda bir metodun sonra öbür metodun avantajlı olduğu durumlara girebilir. Dolayısıyla, belirsiz problemlerin çözümünde hangi metodun etkin olduğu söylenemez.

Bir problemin amaç fonksiyonunda hangi kısmın hakim olduğunun ve bu hakimiyetin derecesinin tayini bizim için pratik bakımdan önem taşıyan bir meseledir. Bu meseleye çözüm getirmek amacıyla önce genel problem (1), (2) ye ait Dantzig başlangıç tablosunu (F satırı ve w sütunları hariç) kuralım.

Anahtar satırın seçiminde hesaplanan bütün oranları her bir x değişkeni için hesaplıyalım. x_l değişkeni için v_l satırından hesaplanan pozitif orana (p_l/c_{ll}) dual oran diyelim. x_l değişkeni için y satırlarından hesaplanan minimum pozitif orana da $[\min\limits_{i} (d_i/a_{il}) \; i=1,\ldots,m]$ primal oran diyelim. Problem (1), (2) ile ile ilgili olarak her bir x değişkeni için hesaplanan primal ve dual oranlar genel ifadelerle Tablo 7 de gösterilmiştir. Aynı oranlar Beale başlangıç tablosundan da hesaplanabilirdi.

x Değişkenleri İçin Primal ve Dual Oranlar

x_1	x_2	......	x_n		
p_1/c_{11}	p_2/c_{22}	......	p_n/c_{nn}		Dual Oranlar
$\min\limits_{i} (d_i/a_{i1})$	$\min\limits_{i} (d_i/a_{i2})$	......	$\min\limits_{i} (d_i/a_{in})$	$i = 1,\ldots,m$	Primal Oranlar

Tablo 7

Genel konveks kadratik proglramlama problemi (1), (2) de amaç fonksiyonundaki doğrusal ve kadratik kısımların ağırlıkları p,C,A ve d matrikslerinde yer alan elemanların mutlak büyüklüklerine bağlıdır. Diğerleri sabit kalırken p vektörünün pozitif elemanları büyürse veya C matriksinin elemanları küçülürse veya A matriksinin elemanları büyürse veya d vektörünün elemanları küçülürse amaç fonksiyonunda doğrusal kısmın ağırlığı artar ve buna paralel olarak Tablo 7 de x değişkenleri için primal oranlar minimum olmaya meyleder. Söz konusu matrikş ve vektörlerdeki elemanların mutlak büyüklükleri yukarıdakinin tersi yönde değişirse amaç fonksiyonunda kadratik kısmın ağırlığı artar ve Tablo 7 de x değişkenleri için dual oranlar minimum olmaya meyleder.

Bu durumda, bir problemin çözümüne girişmeden önce Tablo 7 yi örnek olarak o problemdeki bütün x değişkenleri için söz konusu oranları hesaplamak gerekir. x değişkenlerinin çoğu için primal oranlar minimum ise B tipi bir problem söz konusudur. Doğrusal kısmın hakimiyet derecesini de primal oranı minimum olan x değişkenlerinin sayısı tayin edecektir. Bu sayı arttıkça doğrusal kısmın hakimiyet derecesi yükselir. x değişkenlerinin hepsi için primal oranlar minimum olabilir. Bu doğrusal kısmın hakimiyetinin en yüksek derecesidir. Primal oranları minimum olan x değişkenlerinin sayısı azaldıkça doğrusal kısmın hakimiyet derecesi de düşer. x değişkenlerininin çoğu için dual oranlar minimum ise D tipi bir problem söz konusudur. Kadratik kısmın hakimiyet derecesi dual oranı minimum olan x değişkenlerinin sayısına bağlıdır. Kadratik kısmın hakimiyet derecesinin en yüksek seviyelerinde bütün x değişkenleri için dual oranlar minimumdur. Kadratik kısmın hakimiyet derecesi dual oranı minimum olan x değişkenlerinin sayısına paralel olarak azalır. Primal oranı minimum olan ve dual oranı nimum olan x değişkenlerinin sayıları birbirlerine ne kadar yaklaşırlarsa problemin belirsiz olması ihtimali o kadar kuvvet kazanır.

Şimdi, B ve D tipi problemleri hipotetik örnekler üzerinde görelim. Üç değişkenli ve iki sınırlı bir problemi temel problem olarak aldık :

$$\text{maksimize edin } f=\theta\,(3x_1+2x_2+2x_3) - 2x^2_1-2x^2_2-x^2_3+x_2x_3 \quad (16)$$

Sınırlar

Problem 1

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3 &\leq 4 \\ x_1+2x_2+x_3 &\leq 4 \\ \theta x_1,x_2,x_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Bu temel problemin amaç fonksiyonundaki doğrusal ve kadratik kısımların ağırlıklarını sadece doğrusal kısma (p vektörüne) bir θ parametresi takarak değiştirdik. θ nın değeri sıfır olmaktan çıkıp arttıkça (16) daki amaç fonksiyonunda doğrusal kısmın ağırlığı artmakta ve kadratik kısmın ağırlığı azalmaktadır. Bu problem $\theta \geqq 0$ için Wolfe metodunun uzun formuyla çözülmüş ve çeşitli θ değerleri karşılığında maksimum çözümün uygun çözüm alanı ABCDEF nin neresinde teşekkül edeceği bulunmuştur. Buna göre maksimum çözüm $0 \leqq \theta \leqq 0.767$ için uygun çözüm alanının içinde, $0.767 \leqq \theta \leqq 5.66$ için BCEF yüzünde, $5.66 \leqq \theta \leqq 6.66$ için CE kenarında, $\theta \geqq 6.66$ için C köşesinde teşekkül etmektedir.

Problem 1 e ait başlangıç tablosunda çeşitli θ değerleri karşısında her x değişkeni için primal ve dual oranlar hesaplanıp Tablo 8 de sunulmuştur. Bu tabloya göre $0 \leqq \theta \leqq 2.66$ aralığında x de-

θ	x_1	x_2	x_3	
0	0	0	0	
0.5	0.375	0.25	0.5	
1.0	0.75	0.5	1.0	
2	1.5	1.0	2.0	
2.1	1.575	1.05	2.1	Dual Oranlar
2.66	2.0	1.33	2.66	
2.8	2.1	1.4	2.8	
4.0	3.0	2.0	4.0	
6.0	4.5	3.0	6.0	
7.0	5.25	3.5	7.0	
	2.0	2.0	2.0	Primal Oranlar

Tablo 8

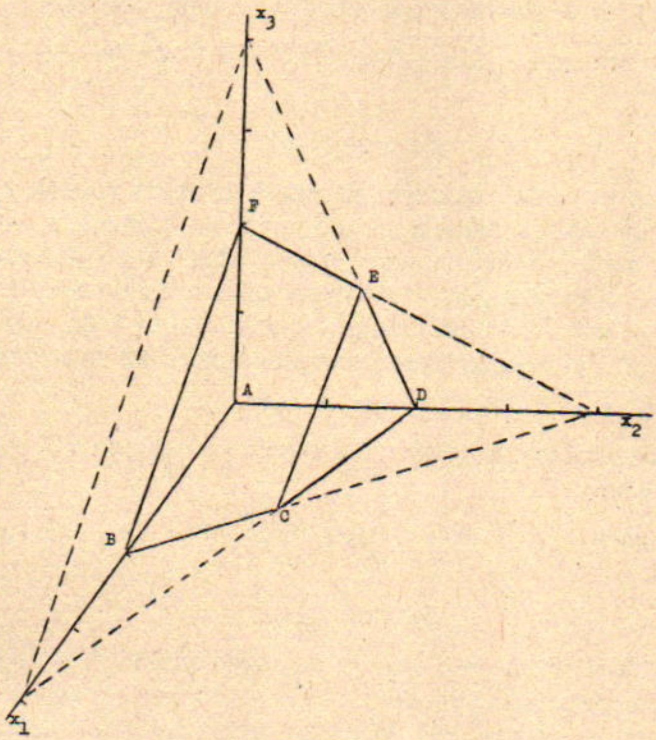
ğişkenlerinin çoğu için dual oranlar minimumdur ve Problem 1 bir D tipi problemdir. $0 \leqq \theta \leqq 2.0$ ağırlığında bütün xler için dual oranlar minimumdur, kadratik kısmın hakimiyet derecesi yüksektir ve bu derece θ arttıkça düşmektedir. $2.0 \leqq \theta \leqq 2.66$ aralığında x değişlerinin çoğu için dual oranlar minimumdur ve kadratik kısmın hakimiyet derecesi önceki aralığa göre daha düşüktür. $2.66 \leqq \theta \leqq 4.0$ aralığında x değişkenlerinin çoğu için primal oranlar minimumdur, Problem 1 bir B tipi problemdir, doğrusal kısmın hakimiyet derecesi henüz düşüktür. $\theta \geqq 4.0$ halinde bütün x değişkenleri için primal oranlar minimumdur. Bu B tipi problemlerde doğrusal kısmın hakimiyet derecesi θ ile birlikte yükselmektedir.

$\theta = 6$ iken Problem 1 aşağıdaki probleme dönüşür :

maksimize edin $f = 18x_1 + 12x_2 + 12x_3 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_2x_3$

Problem 1.1

Sınırlar (17)



Problem 1 e Ait Uygun Çözüm Alanı

Şekil 1

$\theta = 6$ iken bütün x değişkenleri için primal oranların minimum olduğu Tablo θ de görülmektedir. Problem 1.1 amaç fonksiyonundaki doğrusal kısmın hakimiyet derecesi yüksek olan bir B tipi problemdir ve optimum çözümü uygun çözüm alanının CE kenarındadır. Bu problem sırasıyla Dantzig ve Beale metodlarıyla çözülmüş ve elde edilen ara çözümler Ek Tablo 1 ve Ek Tablo 2 de sunulmuştur. Problem 1.1 in çözümü süreci A durumundan başlamış ve çözüm vektörü orijinden itibaren B ve C köşelerine geçmiş, E köşesine kârlı olarak geçmesi mümkün olmamıştır. A durumunun sonundan (C köşe noktasından) itibaren her iki metodda bir adet standard iterasyonla CE kenarındaki maksimum çözümü bulmuştur. A durumundaki avantajından dolayı Beale metodu bu problemi üç iterasyonla çözmüştür. Dantzig metodu ise beş tane iterasyon yapmıştır.

$\theta = 7$ iken Problem 1 aşağıdaki probleme dönüşür :

maksimize edin $f = 21x_1 + 14x_2 + 14x_3 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_2x_3$

Problem 1.2

Sınırlar (17)

Doğrusal kısmının hakimiyet derecesi daha da yüksek olan bu B tipi problem esas itibariyle bir doğrusal programlama problemidir. Çözüm süreci A durumundan başlamakta ve bu durumun sonunda C köşe noktasında maksimum çözüm bulunmaktadır. Ara çözümler Ek Tablo 3 ve Ek Tablo 4 dedir. Bölüm 4 de öngörüldüğü üzere Dantzig metodu Beale metoduna göre iki misli iterasyon yapmaktadır.

Şimdi de Problem 1 de $\theta = 2.8$ kılalım ve aşağıdaki B tipi problemi elde edelim :

maksimimze edin $f = 8.4x_1 + 5.6x_2 + 5.6x_3 - 2x_1^2 - x^2_2 - x^2_3 + x_2x_3$

Problem 1.3

Sınırlar (17)

Tablo 8 e göre bu problemde x değişkenlerinin hepsi değil çoğu için primal oranlar minimumdur. Ve amaç fonksiyonunda doğrusal kısmın hakimiyet derecesi ilk iki örnek probleme göre düşüktür. Bu problem her iki metodla da çözülmüş ve ara çözümler Ek Tablo 5, Ek Tablo 6 da verilmiştir. Problem 1.3 ün maksimum çözümü uygun çözüm alanının BCEF yüzündedir. Çözüm vektörü orijinden itibaren B köşe noktasına geçmiş, BC kenarında ilerlemiş ve BCEF yüzündeki optimum çözüme ulaşmıştır. Buna paralel olarak çözüm süreci A durumundan başlamış, bu durumun sonundan (B köşesinden) itibaren her iki metod da iki adet standard iterasyon yaparak optimum çözümü bulmuştur. A durumundaki avantajından dolayı Beale metodu bu problemi daha az iterasyonla çözmüştür.

$\theta = 0.5$ iken Problem 1 aşağıdaki D tipi probleme dönüşür :

Maksimize edin $f = 1.5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_1^2 - 2x^2_2 - x^2_3 + x_2x_3$

Problem 1.4

Sınırlar (17)

Bütün x değişkenleri için dual oranlar minimum olan, dolayısıyla amaç fonksiyonunda kadratik kısmı yüksek derecede hakim olan bu D tipi problemin optimum çözümü uygun çözüm alanının içindedir. Çözüm süreci B durumunda başlamakta ve aynı durumda sona ermektedir. C durumuna geçilmediğini, yani çözüm vektörü hiç bir sınıra çarpmadığına göre Ek Tablo 7 ve Ek Tablo 8 de görüldüğü üzere her iki metod da bu problemi üç adet iterasyon yaparak çözmektedir.

$\theta = 1$ iken Problem 1 aşağıdaki D tipi probleme dönüşür :

maksimize edin $f = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_2x_3$

Problem 1.5

Sınırlar (17)

Tablo 8 e göre bu problemde bütün x değişkenleri için dual oranlar minimumdur. Amaç fonksiyonunda kadratik kısmın hakimiyet derecesi yüksek ama bir önceki probleme göre düşüktür. Problem 1.5 in çözüm süreci B durumunda başlamış ve bu durumun sonunda uygun çözüm alanının ABCD yüzündeki Ek Tablo 9 ve Ek Tablo 10 un iki numaralı satırlarında verilen geçici maksimum çözüme ulaşılmıştır. Bu çözüme kadar her iki metod da aynı sayıda iterasyon yapmıştır. Daha sonra C durumuna geçilmiş, her iki metod da birer adet standard olmıyan iterasyon yapmış, Ek Tablo 9 ve 10 un üçüncü satırlarında yer alan standard olmıyan çözüm elde edilmiştir. Bunun ardından Dantzig metodu tek standard dual iterasyonla BCEF yüzündeki optimum çözüme ulaşmıştır. Ek Tablo 9 un dördüncü satırına bakınız. Buna mukabil Beale metodu Ek Tablo 10 un üçüncü satırından itibaren aynı optimum çözüme ulaşmak için u_1 ve u_2 serbest değişkenlerini temel olmıyan değişkenler cümlesinden çıkarmış, fazladan bir iterasyon yapmıştır.

$\theta = 2.1$ iken aşağıdaki D tipi problem elde edilir :

maksimize edin $f = 6.3x_1 + 4.2x_2 + 4.2x_3 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_2x_3$

Problem 1.6

Sınırlar (17)

Tablo 8 e göre bu problemde x değişkenlerinin hepsi değil çoğu için dual oranlar minimumdur. Dolayısıyla, bu problemin amaç fonksiyonunda kadratik kısmın hakimiyet derecesi Problem 1.4 ve Problem 1.5 e göre daha düşüktür. Çözüm süreci B durumunda başlamış ve bu durumda tek iterasyon yapılmıştır. Çözüm vektörü ABCD yüzü itibariyle geçici maksimum çözümü AB kenarında bulmuştur. Ek Tablo 11 ve 12 nin birinci satırlarına bakınız. Bundan sonra C durumuna girilmiş çözüm vektörü BCEF yüzüne BC kenarında çarpmış ve her iki metod da tek dual standard iterasyonla BCEF yüzündeki geçici maksimum noktayı BC kenarında bulmuştur. Ek Tablo 11 ve 12 nin iki ve üçüncü satırlarına bakınız. C durumunun sonunda bulunan geçici maksimum çözüm gerçek maksimum çözüm değildir. Bu çözümden sonra her iki metod da bir adet standard primal iterasyonla BCEF yüzündeki gerçek maksimum çözümü bulmuştur. Bu çözüm Ek Tablo 11 ve 12 nin son satırlarındadır. Her iki metod da bu problemi aynı sayıda iterasyon yaparak çözmüştür. Bunun sebebi B durumunda sadece bir adet iterasyon yapılmasıdır.

Bir problemin amaç fonksiyonunda hangi kısmın hakim olduğunun ve bu hakimiyetin derecesinin o probleme ait başlangıç tablosunda bütün x değişkenleri için hesaplanan primal ve dual oranlardan yararlanarak yaklaşık olarak tayin edilebileceğini küçük boyutlu örnek problemler üzerinde gösterdik. Doğrusal kısmının hakimiyet dereceleri farklı B tipi ve kadratik kısmının hakimiyet dereceleri D tipi örnek problemleri çözdük. Bu örnek problemlerin hepsi üç değişken ve iki sınırlı idi. Bunlardan B tipi olanlarını Beale metodu en çok iki eksik, D tipi olanlarını Dantzig metodu en çok bir eksik iterasyonla çözmüştür. Problemin boyutu büyürse metodlar arasındaki etkinlik farkının artma eğilimi göstereceğini, yeni örnek problemler kurup çözerek değil, bir takım genel ifadelerle izah edelim.

Problemdeki x değişkenlerinin sayısı artarsa ne olur? (a) Problem D tipi ise Beale metodu B durumunda uygun çözüm alanının ilk yüzündeki geçici maksimumu ararken temel olmıyan değişkenler cümlesine daha çok serbest değişken ekliyecek ve C durumunda uygun çözüm alanının yeni yüzünde bunları atmak için o kadar ilave iterasyon yapacaktır. Sonuç olarak, metodların yaptıkları iterasyon sayıları arasındaki fark Dantzig metodu lehine daha da büyüme eğilimi gösterecektir. (b) Problem B tipi ise x değişkenlerinin sayısı ile birlikte uygun çözüm alanının incelenebilecek köşe noktalarının sayısı da arttığına göre Beale metodunun lehine olan iterasyon farkı daha da büyüme eğilimi gösterecektir.

Sınır sayısının artması probleme ait uygun çözüm alanının köşe ve yüz sayısını arttırır. (a) Çözüm sürecinde incelenebilecek köşe sayısının artması problem B tipi ise Beale metodunun lehine olan iterasyon farkını büyütme eğilimini doğurur. (b) Çözüm sürecinde incelenebilecek yüz sayısının artması Problem D tipi ise Dantzig metodunun lehine olan iterasyon farkını büyütme eğilimi yaratır.

Amaç fonksiyonunda kadratik kısım hakim olan problemlerde Dantzig metodunun, doğrusal kısım hakim olan problemlerde Beale metodunun yapılan iterasyon sayısı bakımından daha etkin olduğunu teyid eden, iterasyon başına kullanılan bilgisayar zamanı ve çözümde kullanılan hafıza birimi sayısı bakımından metodların etkinliklerine göre kadratik programlama problemlerini sınıflandıran bir araştırmaya çalışmamızda yer vermekte yarar gördük. Raymond R Braitsch 1972 yılında Beale, Dantzig, Wolfe metodları ve Wolfe metodunun tadil edilmiş bir biçiminin bilgisayar üzerinde bir karşılaştırmasını yapmıştır. Araştırmacının yalnız Dantzig ve Beale metodları ile ilgili olarak elde ettiği sonuçlar bizim çalışmamızı ilgilendirmektedir. Zaten araştırmanın sonuçları da Beale ve Dantzig metodlarının hem yapılan iterasyon sayısı hem de iterasyon başına kullanılan bilgisayar zamanı bakımından diğer metodlara göre daha etkin olduğunu göstermektedir. Şimdi, bu araştırmanın (19) esaslarını ve bizi ilgilendiren sonuçlarını aktaralım.

Genel konveks kadratik programlama problemi (1), (2) Giriş Bölümünde verilen varsayımlarla araştırmanın esasını teşkil etmiştir. Bir kadratik programlama metodunun optimum çözüme ulaşma hızını tayin eden faktörler -ki bunların çoğu (1), (2) deki matriks ve vektörlerle ilgilidir- tesbit edilmiş ve şöyle sıralanmıştır:

1 — Kural. Temel değişkenler cümlesine alınacak değişkenin seçimi için Bölüm 2 ve 3 de verilen kurallar uygulanmıştır.

2 — Büyüklük. Problemin büyüklüğü x değişkenlerin sayısı veya sadece mxm büyüklüğünde kare A matriksleri kullanıldığına göre A matriksindeki sınırların sayısı ile tanımlanmıştır. 15, 20 ve 25 büyüklüğünde problemler kurulmuştur.

3 — Pozitif p. p vektöründeki pozitif katsayıların sayısıdır. Problemlerde 3,9 ve 15 pozitif p seviyeleri kullanılmıştır.

4 — Rank. Kadratik matriks C nin rankıdır. 3 ve 15 rankları kullanılmıştır.

5 — Aralık. Bilgisayarla C matriksini türetmek için tesadüfi sayılar aralıkları kullanılmıştır. Eğer, r bir tesadüfi sayıyı gösterirse kullanılan aralıklar $-20 \leq r \leq 20$ ve $-180 \leq r \leq 180$ dir.

6 — p Aralığı. p vektörünü türetmek için tesadüfi sayılar aralığı kullanılmıştır. Kullanılan aralıklar $1 \leq r \leq 20$ ve $1 \leq r \leq 180$ dir.

7 — d Aralığı. d vektöründe kullanılan tesadüfi sayı aralıkları p aralıklarının aynısıdır.

---

(19) Braitsch Raymond, R., «A Computer Comparison of Four Quadratic Programming Algorithms «Management Science», Vol. 18, No. 11, July 1972.

8 — A Aralığı. A matriksini meydana getiren tesadüfi sayılar için sadece $1 \leq r \leq 180$ seviyesi kullanılmıştır.

Faktoriyel bir modele başvurulmuş ve her iki metod için 2 den 7 ye kadar bütün faktörlerin bütün kombinezonları (144 hücre) bilgisayarda koşulmuştur.

Farklı Faktör Seviyeleri için Ortalama İterasyon Sayıları

Faktör		Dantzig	Beale
Büyüklük	15	6.9	7.8
	20	7.5	8.7
	25	7.8	9.3
Pozitif p	3	4.5	4.6
	9	7.8	8.8
	15	9.9	12.4
Rank	3	7.3	8.6
	15	7.5	8.7
C Aralığı	$-20 \leq n_v \leq 20$	6.1	4.8
	$-180 \leq n_v \leq 180$	8.7	12.4
p Aralığı	$1 \leq \|n_v\| \leq 20$	7.9	10.1
	$1 \leq \|n_v\| \leq 180$	6.9	7.1
d Aralığı	$1 \leq n_v \leq 20$	7.2	7.7
	$1 \leq n_v \leq 180$	7.6	9.5
Algoritma Ortalamaları		7.4	8.6

Tablo 9

Her bir kombinezon için on defa örnekleme yapılarak on farklı problem kurulmuş ve tesadüfi olarak türetilen her problem iki metodla da çözülmüştür.

«Deneyin Tablo 9 da verilen sonuçlarından bazıları amaç fonksiyonunda doğrusal ve kadratik kısımların nisbi önemlerine göre açıklanabilir. p aralığının genişletilmesinin veya C aralığının daraltılmasının amaç fonksiyonundaki doğrusal kısmı kuvvetlendireceği açıktır. Ayrıca, d aralığını daraltmak veya A aralığını genişletmek de doğrusal kısmın önemini arttırır çünkü bu suretle x değerlerinin küçülmesi doğrusal kısmın katkısından daha çok kadratik kısmın katkısını azaltır.

Tablo 9 da yer alan üç durumda yani p aralığının genişletilmesi C ve d aralıklarının daraltılması durumlarında ortalama iterasyon sayısı azalmıştır. Bu sonuç akla uygundur çünkü kadratik kısmın önemsiz olduğu ve problemin bir doğrusal programlama problemi haline geldiği uç durumda her iki metod da uygun çözüm alanının bir köşe noktasından yanındakine geçen simpleks metoda dönüşür. Kadratik kısmın hakim olduğu problemlerde optimum çözüm uygun çözüm alanının bir yüzünde yer alır. Bu da yüzler üzerinde optimizasyon yapmak yani primal temel değişkenlerin sayısını arttırmak gereğinden dolayı iterasyonların sayısını çoğaltır.

Kadratik programlama probleminin bir doğrusal programlama problemine dönüştüğü durumda Dantzig metodu diğerinin iki misli iterasyon yapmaktadır. Tablo 9 da C aralığının daraltılmasının amaç fonksiyonunun doğrusal kısmını başka her hangi bir faktör değişikliğinden daha fazla kuvvetlendirdiğini görüyoruz. Sadece bu durumda Beale metodu Dantzig metoduna kıyasla daha az iterasyon yapmıştır. Başka seviyeler kullanılsa idi geniş p ve dar d aralıklarında Beale metodunun daha az iterasyon yaptığı görülebilirdi.

Amaç fonksiyonunda kadratik kısım daha önemli oldukça ortalama iterasyon sayısı Beale metodunda Dantzig metoduna kıyasla daha çok artmakta, yapılan iterasyon sayısı bakımından fark Dantzig metodu lehine büyümektedir.» (20).

«Programlama tekniklerinin yol açtığı büyük farklardan dolayı çeşitli metodlar için gereken bilgisayar zamanlarının doğru ölçülerini elde etmek zordur. Daha güvenilir bir ölçü her bir iterasyonda transformasyona tabi tutulması gereken tablo elemanlarının sayısına dayandırılabilir. Bu sayede bazı teorik kolaylıklardan yararlanarak zaman etkinliklerini arttırmak mümkündür. Bu kolaylıklar simetrik olduğu için Beale tablosunun C kısmının sadece yarısını transformasyona tabi tutmak, standard Dantzig tablolarında simetri ilişkilerinden dolavı bazı transformasyonları elimine etmek ve Beale metodunda serbest değişkenlerden dolayı ayırılan boş hafı-

---

(20) Braitsch, S. 637—638.

za birimlerini (bu serbest değişkenlerin sayısı C matriksinin rankını aşamadığı için) azaltmaktır. Metodlar için zaman ve depolama örnekleri sıralarsak bazı parametreleri tahmin etmemiz gerekir. Bu da hesaplarımızda hatalara sebep olabilir. Onun için zaman ve depolama hesaplarında küçük farklar varsa hükümler verilmiyecektir. Deneyde Dantzig tablolarının yaklaşık olarak % 70 i standard formda idi. Bütün tablo transformasyonlarının 1 birim zaman tuttuğu varsayıldı. Bilgisayar üzerinde yapılan testlerde 1.6 birim zaman tutan Beale amaç tablosu transformasyonu bunun istisnasıdır. Beale tablolarında serbest değişkenlerden dolayı eklenen değişkenleri transformasyona tabi tutmak için gerekli zaman ihmal edilmiştir çünkü hem bunu tahmin etmek zordur, hem de mevcut verilere göre hüküm verilirse zaman tahminini en çok yüzde bir kaç etkiliyebilir. Problem parametrelerinin çeiştli kombinezonları için zaman ve depolama tahminleri aşağıdaki tabloda sıralanmıştır.

Bazı Problem Parametrelerinin Fonksiyonu Olarak Zaman ve Depolama İhtiyaçları

Sınır Sayısı	x Değişkenlerinin Sayısı	C Matriksinin Rankı	Metod	İterasyon Başına Zaman (m^2 birim)	Depolama (m^2 hafıza birimi)
m	m	m	B	1.8	2.5
			D	2.6	4
m	2m	2m	B	5.2	8
			D	6	9
m	4m	4m	B	16.8	28
			D	16.3	25
m	4m	m	B	16.8	16
			D	16.3	25

Bir Birim $\approx$ IBM 360—75 de 23×10^{-6} saniye

Tablo 10

x değişkenlerinin sayısı sınırların sayısını büyük ölçüde aşmadığı taktirde Beale metodunun iterasyon başına daha az zaman tutmasının sebebi Beale tablolarının temel olmıyan değişkenlere göre düzenlenmesidir. A matriksinin yaklaşık olarak kare olduğu veya C nin rankının büyük olmadığı durumlarda depolama bakımından Beale metodu daha avantajlıdır. Bunun sebebi C nin rankı büyük değilse serbest değişkenlerden dolayı temel olmıyan değişkenler cümlesinden çıkartılacak değişkenlere ait satırları tutmak için ayırılan beş hafıza birimlerinin azaltılmasıdır» (21).

6 — SONUÇ VE TEKLİFLER

Amaç fonksiyonunda kadratik kısmın hakim olduğu D tipi problemleri Dantzig metodu, doğrusal kısmın hakim olduğu B tipi problemleri Beale Metodu, Braitsch Araştırmasının da teyid ettiği üzere, yapılan iterasyon sayısı bakımından daha etkin olarak çözmektedir. Bunun sebebi, D tipi problemlere ait çözüm sürecinin Dantzig metodunun avantajlı olduğu C durumundan geçmesi, B tipi problemlere ait çözüm sürecinin Beale metodunun daha avantajlı olduğu A durumundan başlamasıdır. Çözüm sürecindeki A ve C durumlarında bir metodun diğerine göre neden daha az iterasyon yaptığı Bölüm 4 de etraflı olarak anlatılmıştır. Amaç fonksiyonundaki kısımların iterasyon sayısı bakımından metodların etkinliklerini tayin eden ağırlıkları ile başlangıç tablosundan hesaplanan minimum pozitif oranlar arasında direkt ilişki bulunduğu için problemleri bu oranlara göre B tipi, D tipi ve belirsiz olarak sınıflara ayırdık. D tipi problemlerde Dantzig metodunun, B tipi problemlerde Beale metodunun daha etkin olduğunu ve çözüm süreçlerinin öngörülen durumlara girdiğini küçük boyutlu hipotetik problemler üzerinde gösterdik.

Bir konvesk kadratik programlama probleminin en az bilgisayar maliyetiyle çözmek amacıyla hangi şartlar altında Beale metodunun hangi şartlar altında Dantzig metodunun kullanılması gerektiğine dair bazı öneriler buraya kadar yapılan açıklamaların ışığında belirlenmiş ve aşağıda maddeler halinde sıralanmıştır.

A — x Değişkenlerinin Sayısı ile Sınırlarının Sayısı Yaklaşık Olarak Eşit Olan Problemler

Bu gruba giren problemlerin çözümünde iterasyon başına kullanılan bilgisayar zamanı ve ihtiyaç duyulan hafıza birimi bakımından Beale metodunun lehine Tablo 10 da görüldüğü üzere önemli

(21) Braitsch, S. 640—641.

bir fark vardır. Dolayısıyla, bu gruba giren problemlerin sonuna kadar Beale metodu ile çözülmesinde yarar görmekteyiz. En kötü ihtimalle amaç fonksiyonunun kadratik kısmı yüksek derecede hakim ve çözüm süreci C durumuna giren bir problemle karşılaşılabilir. Braitsch deneyleri itibariyle böyle bir problemin çözümünde Beale metodu diğerine göre en çok % 42 daha fazla iterasyon yapmaktadır (Tablo 9). Buna mukabil, Dantzig metodu bir iterasyonu % 44 daha fazla bilgisayar zamanında tamamlamaktadır (Tablo 10). Sonuç olarak Beale metodu bu gruba giren fakat iterasyon sayısı bakımından en avantajsız olduğu problemi dahi yaklaşık olarak Dantzig metodunun kullanacağı kadar bilgisayar zamanında çözebilmektedir.

B — x Değişkenlerinin Sayısı Sınırlarının Sayısının Yaklaşık İki Katı Olan Problemler

Tablo 10 daki tahminlere göre bu gruba giren problemlerde Dantzig metodu bir iterasyonu diğer metoda göre % 15 daha fazla zamanda tamamlamaktadır. Bu bakımdan (1) Problem B tipi veya belirsiz ise çözüme Beale metodu ile başlayıp sonuna kadar bu metodu uygulamakta yarar vardır. (b) Problem D tipi ise çözüme yine Beale metodu ile başlanılmalıdır. Çözüm sürecini başlangıçtan itibaren B durumuna sokup bu durumun sonundaki geçici maksimum noktaya ulaşılmalıdır. Bu noktaya k noktası diyelim. Dantzig metodu da k noktasına aynı sayıda iterasyon yaparak fakat % 15 daha fazla bilgisayar zamanı kullanarak ulaşırdı. Bunun için k noktasına kadar Beale metodu ile gelinmeli, B durumunda harcanan bilgisayar zamanı böylelikle azaltılmalıdır. k noktasından itibaren çözüm süreci C durumuna girerse bu durumda Dantzig metodu daha etkin olduğu için k noktasındaki Beale tablosundan aynı noktaya tekabül eden Dantzig tablosuna geçip k noktasından itibaren çözüme Dantzig metodu ile devam edilebilir. Dördüncü bölümde bu geçişin mümkün olduğu gösterildi. Geçiş için harcanan bilgisayar zamanı bir iterasyon için harcanan zamana göre çok küçüktür. Beale tablosu için kullanılan hafıza birimleri olduğu gibi Dantzig tablosuna tahsis edilmektedir.

Metod değiştirmeye karar verirken Dantzig metodunun bir iterasyonu % 15 daha fazla bilgisayar zamanında tamamladığını unutmamalıyız. Bu bakımdan, Dantzig metoduna geçmekle tasarruf edilecek iterasyon sayısı dikkate alınmalıdır. Bu sayı Beale metodunun k noktasına kadar temel olmıyan değişkenler cümlesine eklediği serbest değişken sayısına bağlıdır. Eğer B durumunda yeterli miktarda serbest değişhen eklenmişse k noktasından itibaren Dantzig metoduna geçmekle tasarruf edilen iterasyon sayısı iterasyon başına zaman artışını ve geçiş için harcanan zamanı telafi eder. Eğer D tipi problemin amaç fonksiyonundaki kadratik kısmın hakimiyet derecesi yüksek ise çözüm sürecinin B durumunda eklenen serbest değişken sayısı önemlidir ve k noktasından itibaren metod değiştirilmelidir. Kadratik kısmın hakimiyet derecesindeki veya C matriksinin rankındaki azalışa paralel olarak k noktasında metod değiştirmenin yararı da azalır.

C — x Değişkenlerinin Sayısı Sınırlarının Sayısının Yaklaşık Dört Katı Olan Problemler

Tablo 10 daki tahminlere göre bu gruba giren problemlerin çözümünde iterasyon başına kullanılan bilgisayar zamanı ve ihtiyaç duyulan hafıza birimi bakımından metodlar arasında önemli bir fark yoktur. Bu nedenle, çözüme hangi metodla başlanacağına karar vermeden önce problemin amaç fonksiyonunda hangi kısmın hangi derecede hakim olduğu araştırılmalıdır.

(1) Problem B tipi ise çözüme Beale metodu ile başlanılmalıdır. Amaç fonksiyonunda doğrusal kısmın hakimiyet derecesi yüksek ise çözümün sonuna kadar aynı metod uygulanmalıdır. Amaç fonksiyonunda doğrusal kısmın hakimiyet derecesi düşük ise çözüm süreci önce A durumuna sokulmalı primal oranları minimum olan x değişkenleri teker teker temele alınmalı uygun çözüm alanının bir köşesinden yandaki köşesine geçerek ilerlenilmelidir. Artık yeni bir köşe noktasına geçmek amaç fonksiyonunun değerini düşürecek ise çözüm vektörü en son köşenin (r köşesi diyelim) ait olduğu yüz üzerindeki geçici maksimum noktayı arıyacak ard arda standard iterasyonlar yapılacaktır. Bunların ardından Beale anlamında standard olmıyan bir iterasyon gelebilir yani çözüm vektörü uygun çözüm alanının yeni bir yüzüne atlıyabilir. En son köşede (r köşesinde) önemli miktarda bağlayıcı kılınmamış sınır var ise bu ihtimal kuvvetlenir. Bu ihtimale dayanarak r köşesinden itibaren Dantzig metoduna geçmekte yarar vardır. Çözüm vektörü r köşesinin ait olduğu yüzden yeni bir yüze atlamazsa Dantzig metodu r köşesinden itibaren Beale metodu ile aynı sayıda standard iterasyon yaparak optimum çözümü bulur. Eğer çözüm vektörü ihtimal verildiği gibi uygun çözüm alanının yeni bir yüzüne geçerse artık Dantzig metodu kullanıldığı için iterasyon sayısı bakımından tasarruf yapılır. Böyle hareket etmekle elde edilen fayda şudur. Uygun çözüm alanının r köşe noktasına kadar Beale metodu ile gelerek

iterasyon tasarrufu yapılır. Dantzig metodu aynı r köşesine iki misli iterasyon yaparak gelirdi. r köşe noktasında Dantzig metoduna geçmek suretiyle hem standard olmıyan Beale iterasyonuna karşı tedbir alınmakta hem de Dantzig metodunun Beale metoduna karşı Tablo 10 da görülen (küçük de olsa) avantajlarından yararlanılmaktadır. r köşe noktasında metod değiştirmenin mümkün olduğu dördüncü bölümde gösterildi. Bilgisaraya verilen komutla bu geçiş bir iterasyona göre çok kısa zamanda sağlanabilir.

Eğer, probleme ait amaç fonksiyonundaki C matriksinin rankı düşük ise ve çözümde kullanılan hafıza birimi sayısı çözüm için kullanılan bilgisayar zamanından önemli ise r noktasında metod değiştirmenin gereği kalmaz.

(2) Problem D tipi ise çözüme Dantzig metodu ile başlanmalı ve sonuna kadar aynı metod uygulanmalıdır. Amaç fonksiyonunda kadratik kısmın hakimiyet derecesi düşükse çözüm sürecinde C durumundan sonra gelebilen ve Dantzig metodunun üstünlüğünü azaltan standard olmıyan primal iterasyona karşı alınacak bir tedbir yoktur. Çözüm süreci C durumundan geçtiği için tablolar arasındaki irtibat kaybolmuştur. C durumunun sonundaki Beale tablosunun C kısmında yeni serbest değişkenlere ait köşegen elemanlar C durumunun sonundaki Dantzig tablosunda bulunmamaktadır. Dolayısıyla metod değiştirmek mümkün değildir.

Eğer, probleme ait C matriksinin rankı düşük ise ve çözümde kullanılan hafıza birimi sayısı çözüm için kullanılan bilgisayar zamanından önemli ise D tipi problemlerin çözümünde Beale metodu tercih edilebilir.

(3) Problem belirsiz ise C matriksinin rankı yüksek olduğu taktirde çözümde Dantzig metodunu uygulamak gerekir çünkü Tablo 10 da görüldüğü üzere iterasyon başına bilgisayar zamanı ve kullanılan hafıza birimi sayısı bakımından Dantzig metodunun diğerine göre az da olsa bir üstünlüğü bulunmaktadır. C matriksinin rankı düşük ise Beale metodu tercih edilmelidir.

EKLER :

Problem 1.1 in Dantzig Metodunda Ara Çözümleri

Alt Tablo	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	y_1	y_2	w_1	w_2
0				—18	—12	—12	4	4		
1	2			—10	—12	—12		2		
2	2				—7	—2		2	5	
3	1.333	1.333			—0.333	—0.666			6.333	
4	1.333	1.333				—0.666			6.222	0.222
5	1.222	1.333	0.111						6.48	0.148

Ek Tablo 1

Problem 1.1 in Beale Metodunda Ara Çözümleri

	A Kısmı					C Kısmındaki k Sütunu Katsayıları					
Alt Tablo	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	u_3
0				4	4	9	6	6			
1	2				2		3.5	1	—2.5		
2	1.333	1.333						0.333	—3.11	—0.11	
3	1.222	1.333	0.111						—3.24	—0.074	0

Ek Tablo 2

Problem 1.2 nin Dantzig Metodunda Ara Çözümleri

Alt Tablo	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	v_1	v_2	v_3	y_1	y_2
0						—21	—14	—14	4	4
1	2					—13	—14	—14		2
2	2			6.5			—7,5	—1		2
3	1.333	1.333		7.83			—0.83	0,33		
4	1.333	1.333		7.54	0.55			0.33		

Ek Tablo 3

Problem 1.2 nin Beale Metodunda Ara Çözümleri

Alt Tablo	A Kısmı x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	C Kısmında k Sütunu Katsayıları x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
0				4	4	10.5	7	7		
1	2				2		3.75	0.5	—3.25	
2	1.333	1.333						—0.165	—3.77	—0.275

Ek Tablo 4

Problem 1.3 İçin Dantzig Metodunda Ara Çözümler

Alt Tablo	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	v_1	v_2	v_3	y_1	y_2
0						—8.4	—5.6	—5.6	4	4
1	2					—0.4	—5.6	—5.6	0	2
2	2			0.2			—5.4	—5.2		2
3	1.46	1.08		1.28				—4.12		0.38
4	0.82	0.94	0.71	2.56						0.58

Ek Tablo 5

Problem 1.3 İçin Beale Metodunda Ara Çözümler

Alt Tablo	A Kısmı x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	C Kısmında k Sütunu Katsayıları x_1	x_2	x_3	y_1	u_2	u_3
				4	4	4.2	2.8	2.8			
1	2				2		2.7	2.6	—0.1		
2	1.46	1.08			0.38			2.06	—0.64	0	
3	0.82	0.94	0.71		0.58				—1.28	0	0

Ek Tablo 6

Problem 1.4 İçin Dantzig Metodunda Ara Çözümler

Alt Tablo	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	v_1	v_2	v_3	y_1	y_2
0						—1.5	—1	—1	4	4
1	0.375						—1	—1	3.25	3.625
2	0.375	0.25						—1.25	3	3.125
3	0.375	0.43	0.71						1.39	2.05

Ek Tablo 7

Problem 1.4 İçin Beale Metodunda Ara Çözümler

	A Kısmı					C Kısmında k Sütunu Katsayıları					
Tablo	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3
0				4	4	0.75	0.5	0.5			
1	0.375			3.25	3.625		0.5	0.5	0		
2	0.375	0.25		3	3.125			0.625	0	0	
3	0.375	0.43	0.71	1.39	2.05				0	0	0

Ek Tablo 8

Problem 1.5 İçin Dantzig Metodunda Ara Çözümler

Alt Tablo	x_1	x_2	w_3	w_1	w_2	v_1	v_2	v_3	y_1	y_2
0						—3	—2	—2	4	4
1	0.75						—2	—2	2.5	3.25
2	0.75	0.5						—2.5	2	2.25
3	0.75	7.22	0.888					—0.946		0.918
4	0.603	0.689	1.05	0.2936						0.967

Ek Tablo 9

Problem 1.5 İçin Beale Metodunda Ara Çözümler

Alt	A Kısmı					C Kısmında k Sütunu Katsayıları					
Tablo	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	y_1	u_1	u_2
0				4	4	1.5	1	1			
1	0.75			2.5	3.25		1	1		0	
2	0.75	0.5		2	2.25			1.25		0	0
3	0.75	0.722	0.888		0.918				—0.21	0.25	0.105
4	0.594	0.756	1.026		0.866				—0.156	0	0.078
5	0.603	0.689	1.05		0.967				—0.1468	0	0

Ek Tablo 10

Problem 1.6 İçin Dantzig Metodunda Ara Çözümler

Alt Tablo	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	v_1	v_2	v_3	y_1	y_2
0						—6.3	—4.2	—4.2	4	4
1	1.575						—4.2	—4.2	0.85	2.425
2	1.575	0.85					—0.8	—5.05		0.725
3	1.495	1.01		0.16				—4.89		0.485
4	0.73	0.84	0.84	1.66						2.785

Ek Tablo 11

Problem 1.6 İçin Beale Metodunda Ara Çözümler

Alt	A Kısmı					C Kısmında k Sütunu Katsayıları				
Tablo	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	u_1	y_1
0				4	4	3.15	2.1	2.1		
1	1.575			0.85	2.425		2.1	2.1	0	
2	1.575	0.85			0.725			1.725	0.4	—0.4
3	1.495	1.01			0.485			2.445	0	—0.08
4	0.73	0.84	0.84		2.785				0	—0.83

Ek Tablo 12

K A Y N A K L A R

(Kitaplar)

1. PRAFFENBERGER Roger-WALKER David, **Mathematical Programming for Economics and Business,** The Iowa State University Press, 1976.

2. WAGNER Harvey, M., **Principles of Operations Research,** Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi, 1974.

3. HADLEY, G., **Nonlinear and Dynamic Programming,** Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964.

4. VAN DE PANNE, C., **Methods for Linear and Quadratic Programming,** North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.

5. VAJDA, S, **Mathematical Programming,** Addison Wesley Publishing Company

(Makaleler)

1. VAN DE PANNE, C-WHİNSTON Andrew, «Simplical Methods For Quadratic Programming» **Naval Research Logistics Quarterly,** Office of Naval Research, Vol. 11, No. 4, Dec. 1964.

2. DORN W.S., «Nonlinear Programming-A Survey», **Management Science,** Vol. 9, No. 2, Jan. 1963

3. BEALE E.M.L., «On Quadratic Programming», **Naval Research Logistics Quarterly,** Office of Naval Research, Vol. 6, No. 3, 1959..

4. BRAİTSCH Raymond R., «A Computer Comparison of Four Quadratic Programming Algorithms «**Management Science,** Vol. 18, No. 11, July 1972.