

Hava Dirençli Bir Ortamda Serbest Düşme Hareketinin DeneySEL ve Kesirli Analizi

Mürsel ŞEN^{1*}

¹Milli Savunma Üniversitesi, Hava Harp Okulu Dekanlığı, Temel Bilimler Bölümü, 34149, İstanbul

¹<https://orcid.org/0000-0002-0637-8325>

*Sorumlu yazar: mürsel.sen@msu.edu.tr

Araştırma Makalesi

Makale Tarihçesi:

Geliş tarihi: 26.08.2025

Kabul tarihi: 11.12.2025

Online Yayınlanma: 15.06.2026

Anahtar Kelimeler:

Kesirli analiz

Caputo kesirli türevi

Planck birimleri

Serbest düşme hareketi

Hava direnci

ÖZ

Bu çalışmada, hava direncinin ihmal edilmediği bir ortamda küresel cisimlerin serbest düşme hareketi deneysel ve teorik olarak incelenmiştir. Newton'un ikinci yasası ve Stokes yasasından türetilen standart teorik modelin çözümü, deneysel ölçümler ile uyum içinde olmadığı görülmüştür. Bu uyumsuzluğu giderebilmek için, standart teorik model kesirli analiz kullanılarak yeniden tanımlanmış ve çözülmüştür. Denklemi boyutsuzlaştırmak için Planck zaman birimi kullanılmıştır. Hızın ve konumun zamana göre değişimleri Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden elde edilmiştir. Farklı kütlelere ve yarıçaplara sahip küresel cisimler çeşitli yüksekliklerden bırakılarak deneysel ölçümler yapılmış ve deneysel ölçümlerle uyumlu olan kesirli türev mertebeleri elde edilmiştir. Ayrıca türev mertebesinin azalan değerleri için düşme sürelerindeki değişimler incelenmiştir.

Experimental and Fractional Analysis of Free Fall Motion in a Medium with Air Resistance

Research Article

Article History:

Received: 26.08.2025

Accepted: 11.12.2025

Published online: 15.06.2026

Keywords:

Fractional calculus

Caputo fractional derivative

Planck units

Free fall motion

Air resistance

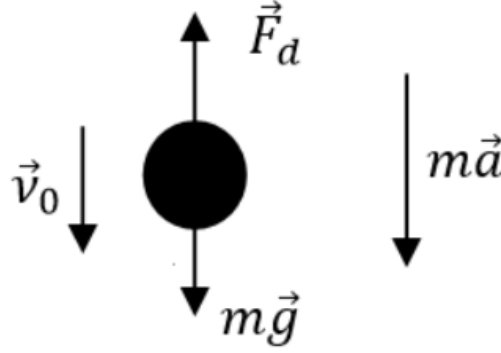
ABSTRACT

In this study, the free-fall motion of spherical objects in an environment where air resistance cannot be neglected is investigated experimentally and theoretically. The standard theoretical model derived from Newton's second law and Stokes' law is found to be inconsistent with the experimental measurements. To resolve this inconsistency, the standard theoretical model is redefined and solved using the fractional calculus. The Planck time unit has been used to make the equation dimensionless. The changes of velocity and position with respect to time are obtained in terms of the Mittag-Leffler function. Experimental measurements were obtained for spherical objects of different masses and radii dropped from various heights, and the fractional derivative orders that best matched the experimental measurements were obtained. Furthermore, the changes in fall times for decreasing values of the derivative order are investigated.

To Cite: Şen M. Hava Dirençli Bir Ortamda Serbest Düşme Hareketinin DeneySEL ve Kesirli Analizi. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2026; 9(3): 1431-1443.

1. Giriş

Fizikte bir cismin konumunun zamanla değişimi kinematik denklemler ile incelenmektedir (Rızaoğlu ve Sünel, 2006). Hava direncinin ihmal edilmediği bir ortamda m kütleli cismin h yüksekliğinden v_0 hızı ile düşmesine ilişkin diyagram Şekil 1.'de gösterilmektedir.



Şekil 1. m kütleli bir cismin serbest düşme hareketi serbest cisim diyagramı

Newton'un II. Yasası yardımıyla Şekil 1.'deki m kütleli bir cismin hava dirençli ortamda hareketi

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{F}_d \quad (1)$$

denklemleri ile ifade edilmektedir (Salahshour ve ark., 2017). Burada m $[kg]$ cismin kütlesi, a $[m/s^2]$ cismin ivmesi, g $[m/s^2]$ yerçekimi ivmesi ve F_d $[N]$ havanın direnç kuvvetidir.

$a = \frac{dv(t)}{dt}$ ve $F_d = mkv(t)$ tanımları (1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - kv(t) \quad (2)$$

biçiminde birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklem elde edilmektedir. Burada $v(t)$ $[m/s]$ cismin hızını, t $[s]$ zamanı ve k $[1/s]$ cismin şekline göre değişen sabit bir parametreyi ifade etmektedir. Denklem (2)'nin standart çözümü

$$v(t) = \frac{g}{k} + \left(v_0 - \frac{g}{k} \right) e^{-kt} \quad (3)$$

şeklindedir. $y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ tanımı ile (3) denklemini

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{g}{k} + \left(v_0 - \frac{g}{k} \right) e^{-kt} \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir ve (4) denkleminin çözümü

$$y(t) = y_0 + \frac{g}{k}t + \left(\frac{1}{k} \right) \left(v_0 - \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) \quad (5)$$

şeklinde elde edilir.

Literatürde m kütleli bir cismin hava dirençli bir ortamda hareketini inceleyen kinematik denklemlerin kesirli analiz yöntemleriyle incelenmesi üzerine birçok çalışma mevcuttur (Rosales Garcia ve ark., 2013; Rosales ve ark., 2014; Losada ve Nieto, 2015; Ebaid ve ark., 2019; Acay ve ark., 2020). Rosales Garcia ve ark., (2013); hava dirençli bir ortamda m kütleli bir cismin düşüşüne ilişkin

diferansiyel denklemleri Caputo kesirli analizi ile incelemişlerdir (Rosales Garcia ve ark., 2013). Yazarlar, boyut analizini sağlamak amacıyla birinci mertebeden türev operatörünü $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ şeklinde ele almışlardır. Burada σ parametresi S^{-1} birimindedir. Ayrıca diğer çalışmalardan farklı olarak σ parametresi ile γ kesirli türev mertebesi arasında $\gamma = \sigma k \left(0 < \sigma < \frac{1}{k}\right)$ şeklinde ilişki tanımlamışlardır (Rosales Garcia ve ark., 2013). Burada k parametresi havanın direnç kuvvetinin pozitif bir katsayısıdır.

Rosales ve ark., (2014); bir merminin hava direnci olan bir ortamda iki boyutlu hareketini ifade eden diferansiyel denklemleri Caputo kesirli analizi ile incelemişlerdir (Rosales ve ark., 2014). Yazarlar, boyut analizini sağlamak için birinci mertebeden türev operatörünü

$$\frac{d}{dt} \rightarrow k^{1-\gamma} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \quad (6)$$

biçiminde tanımlamışlardır (Rosales ve ark., 2014). Burada k ifadesinin boyutu S^{-1} şeklindedir. Merminin x-eksenindeki ve y-eksenindeki hareket denklemlerini sırasıyla

$$\frac{d^\gamma v_x}{dt^\gamma} = -k^\gamma v_x \quad (7)$$

$$\frac{d^\gamma v_y}{dt^\gamma} = -gk^{\gamma-1} - k^\gamma v_y \quad (8)$$

şeklinde tanımlamışlardır (Rosales ve ark., 2014). Denklem (7) ve Denklem (8)'in boyut analizi incelendiğinde eşitliklerin her iki yanının boyutunun $[m/s]$ olduğu görülmektedir.

Losada ve Nieto (2015); hava dirençli bir ortamda m kütleli bir cismin serbest düşmesini ifade eden diferansiyel denklemi Caputo-Fabrizio (CF) kesirli türevi ile

$$D_{CF}^\alpha v(t) = g - \frac{k}{m} v(t) \quad (9)$$

şeklinde tanımlamışlardır (Losada ve Nieto, 2015). Burada D_{CF}^α ifadesi CF kesirli türev operatörünü, k parametresi ise havanın direnç kuvvetinin pozitif bir katsayısını temsil etmektedir.

Ebaid ve ark., (2019); bir merminin hava direnci olan bir ortamda iki boyutlu hareketini ifade eden diferansiyel denklemleri Caputo kesirli analizi kullanarak yeniden çözmüşler ve deneysel veriler ile uyumunu incelemişlerdir (Ebaid ve ark., 2019). Yazarlar, boyut analizini sağlamak için birinci mertebeden türev operatörünü

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \quad (10)$$

şeklinde tanımlamışlardır (Ebaid ve ark., 2019). Burada σ parametresi S^{-1} birimindedir. Yazarlar, yatay ile 45° 'lik bir açı ve v_0 ilk hızı ile fırlatılan bir m kütleli merminin uçuş zamanının ve menzilin deneyssel verilerini uyumlu kılan kesirli türev mertebelerini elde etmişlerdir.

Acay ve ark., (2020); hava sürtünmeli bir ortamda m kütleli bir cismin serbest düşme hareketini tanımlayan (2) denklemini Atangana-Baleanu-Caputo (ABC) kesirli türevi, genelleştirilmiş kesirli türevi ve üç parametrelili ML fonksiyonu içeren genelleştirilmiş ABC kesirli türevi ile sırasıyla

$$\frac{m}{\sigma^{1-\alpha}} D_{ABC}^{\alpha} v(t) = -mg - mkv(t) \quad (11)$$

$$\frac{m}{\sigma^{1-\alpha\rho}} D_{ABC}^{\alpha,\rho} v(t) = -mg - mkv(t) \quad (12)$$

$$\frac{m}{\sigma^{1-\alpha\mu}} D_{ABC}^{\alpha,\mu,\gamma} v(t) = -mg - mkv(t) \quad (13)$$

şeklinde tanımlamışlar ve çözmüşlerdir (Acay ve ark., 2020). Denklem (11), denklem (12) ve denklem (13) incelendiğinde eşitliğin her iki yanında $\left[m/s^2 \right]$ boyutu olduğu görülmektedir. Yazarlar, boyut analizini sağlamak için birinci mertebeden türev operatörünü

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} \quad (14)$$

biçiminde tanımlamışlardır. Burada $\sigma^{1-\alpha}$ parametresinin boyut analizi $s^{1-\alpha}$ şeklindedir.

Bu çalışmada ise, hava direncinin ihmal edilmediği bir ortamda m kütleli cismin hareketini ifade eden denklem (2) ve denklem (4) Caputo kesirli türevi kullanılarak yeniden tanımlanmış ve çözülmüştür. Yukarıda belirtilen literatürdeki çalışmalardan farklı olarak denklem (2) ve denklem (4)'ün boyutunu korumak için Planck zaman sabiti t_p kullanılmıştır. Ayrıca düşük hız ve küçük cisimler için elverişli olan Stokes yasası kullanılarak k parametresi hesaplanmış, elde edilen deneysel veriler ile Caputo kesirli türevi ile elde edilen çözümler arasındaki uyum incelenmiştir.

2. Materyal ve Metot

Kesirli analiz; fen, mühendislik ve son zamanlarda özellikle tıp biliminde tamsayı mertebeli kinematik diferansiyel denklemlerin türev operatörlerinin kesirli mertebeli olacak şekilde genelleştirilmesi ile ilgili matematiğin bir dalıdır (Podlubny, 1999). Yaklaşık 300 yıldan fazla bir geçmişi olan kesirli analiz ilk defa 1695 yılında L'Hospital ve Leibniz'in mektuplaşmaları sırasında $\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$ notasyonu ile gündeme gelmiştir (Podlubny, 1999; Petras, 2011). Özellikle gerçek dünya sistemlerini standart matematiğe nazaran daha iyi açıklaması, deneysel verilere ve teorik tahminlere daha iyi uyum sağlaması kesirli analizin birçok alanda uygulaması konu olmuştur (Casasanta ve ark., 2012; Çalık ve ark., 2013; Çalık ve ark., 2014; Şen ve Çalık, 2014; Şen ve ark., 2014; Ertik ve ark., 2015; Çalık ve ark., 2016; Uzun ve ark., 2018; Şen ve ark., 2019; Şirin ve Çalık, 2019; Çalık ve ark., 2020; Valentim ve ark., 2020; Martinez ve ark., 2024; Yörük ve ark., 2024; Şen ve ark., 2025). Grünwald-Letnikov (GL), Riemann-Liouville (RL) ve Caputo kesirli türev tanımları kesirli analizin en bilinen tanımlarıdır (Oldham and Spanier, 1974; Miller and Ross, 1993; Carpinteri and Mainardi, 1997; Podlubny, 1999). GL tanımı nümerik hesaplamalara ilişkin çalışmalarda, RL tanımı teorik matematik uygulamalarında

ve Caputo tanımı ise özellikle fen ve mühendislik uygulamalarında önemli roller üstlenmektedir. Sabit bir sayının RL tanımı ile türevi sıfır değilken, Caputo tanımı ile türevinin sıfır olması ve Caputo tanımının başlangıç koşullarının tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler ile aynı olmasından dolayı fizik, mühendislik ve tıp uygulamalarında Caputo tanımının kullanılması tercih edilmektedir (Podlubny, 1999; Şirin, 2011).

Caputo kesirli türevi, $y(t)$ fonksiyonu, $y, [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve $m-1 < \alpha \leq m$ ($m \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} y^{(m)}(\tau) d\tau \quad (15)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999; Kilbas ve ark., 2006). Bunun yanı sıra kesirli analiz çalışmalarında Laplace dönüşümü oldukça önem arz etmektedir. (15) denklemi ile verilen Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü ve bazı özel fonksiyonların Laplace dönüşümleri aşağıda verilmiştir (Acay ve ark., 2020);

- $L\{{}_0^C D_t^\alpha y(t)\} = s^\alpha y(s) - \sum_{k=0}^{\infty} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0)$
- $L\{E_\alpha(-at^\alpha)\} = \frac{s^\alpha}{s(s^\alpha + a)}$
- $L\{1 - E_\alpha(-at^\alpha)\} = \frac{a}{s(s^\alpha + a)}.$

Burada $E_\alpha(\cdot)$ ifadesi Mittag-Leffler (ML) fonksiyonu olup,

$$E_\alpha(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\cdot)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

biçimindedir (Podlubny, 1999). $\Gamma(\cdot)$ ise Gama fonksiyonudur (Boas, 1966).

Fiziksel süreçlerin analizinde kullanılan diferansiyel denklemler, genellikle ilgili sistemin dinamiklerini tanımlamaktadır. Bu tür denklemlerin çözümlenmesinde Planck birimleri, özellikle de Planck zamanı (t_p), önemli bir rol oynamaktadır. Çünkü Planck birimleri, fiziksel yasaların matematiksel ifadelerinin boyutsuz hale getirilmesine olanak sağlamaktadır. Bu bağlamda, Şekil 1’de gösterilen ve hava dirençli ortamda m kütleli bir cismin serbest düşme hareketini tanımlayan denklem (2), t_p birimi kullanılarak boyutsuz bir biçimde

$$t_p \frac{dv(t)}{dt} = t_p g - t_p k v(t) \quad (16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $t_p = \sqrt{\hbar G / c^5}$ biçiminde olup, $\hbar$ Planck sabiti, G gravitasyonel sabiti ve c ışık hızıdır. Denklem (16)’da birinci mertebeden türev ifadesi α . mertebeden türev ifadesine genelleştirilirse denklem (16)

$$t_p^\alpha D_C^\alpha \mathcal{V}(t) = t_p g - t_p k \mathcal{V}(t) \quad (17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada D_C^α ifadesi Caputo kesirli türev operatörüdür. (17) denkleminde eşitliğin sol tarafında t_p ifadesinin α kesirli türev mertebesini bir üst olarak almasının sebebi $\mathcal{V}(t)$ 'nin boyutunu korumak içindir. Çünkü bir denklem ancak boyutları tutarlıysa geçerli olmaktadır. Bu sebeple (17) denkleminin boyut analizi $t^\alpha \frac{L/T}{T^\alpha} = T \frac{L}{T^2} - T \frac{1}{T} \frac{L}{T} \rightarrow \frac{L}{T} = \frac{L}{T} - \frac{L}{T}$ biçiminde olmalıdır. Denklem (17)'ye Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{V}(s) = \left(\nu_0 - \frac{g}{k} \right) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + t_p^{1-\alpha} k} + \left(\frac{g}{k} \right) \frac{1}{s} \quad (18)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathcal{V}(s)$, $\mathcal{V}(t)$ ifadesinin Laplace dönüşümü; s , Laplace dönüşüm parametresidir. (18) ifadesine ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{V}(t) = \left(\nu_0 - \frac{g}{k} \right) E_\alpha(-t_p^{1-\alpha} k t^\alpha) + \frac{g}{k} \quad (19)$$

çözümü elde edilir. Elde edilen (19) denklemini, bir cismin hava dirençli ortamda hızının zamanla değişiminin Caputo kesirli türevi ile çözümüdür. $\alpha=1$ için (19) denklemini denklem (3)'e eşit olmaktadır.

Hava dirençli ortamda bir cismin konumunun zamanla değişimi

$$\frac{d\mathcal{Y}(t)}{dt} = \left(\nu_0 - \frac{g}{k} \right) E_\alpha(-t_p^{1-\alpha} k t^\alpha) + \frac{g}{k} \quad (20)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (16)'ya benzer şekilde (20) denklemini boyutsuz hale getirmek için eşitliğin her iki tarafı t_p Planck zamanı ile çarpılırsa

$$t_p \frac{d\mathcal{Y}(t)}{dt} = t_p \left(\nu_0 - \frac{g}{k} \right) E_\alpha(-t_p^{1-\alpha} k t^\alpha) + t_p \frac{g}{k} \quad (21)$$

olur. Denklem (21)'de birinci mertebeden türev ifadesi α . mertebeden türev ifadesine genelleştirilirse denklem (21)

$$t_p^\alpha D_C^\alpha \mathcal{Y}(t) = t_p \left(\nu_0 - \frac{g}{k} \right) E_\alpha(-t_p^{1-\alpha} k t^\alpha) + t_p \frac{g}{k} \quad (22)$$

şeklinde yazılır. (22) denkleminde eşitliğin sol tarafında t_p ifadesinin α kesirli türev mertebesini bir üst olarak almasının sebebi $\mathcal{Y}(t)$ 'nin boyutunu korumak içindir. Bu doğrultuda denklem (22)'nin

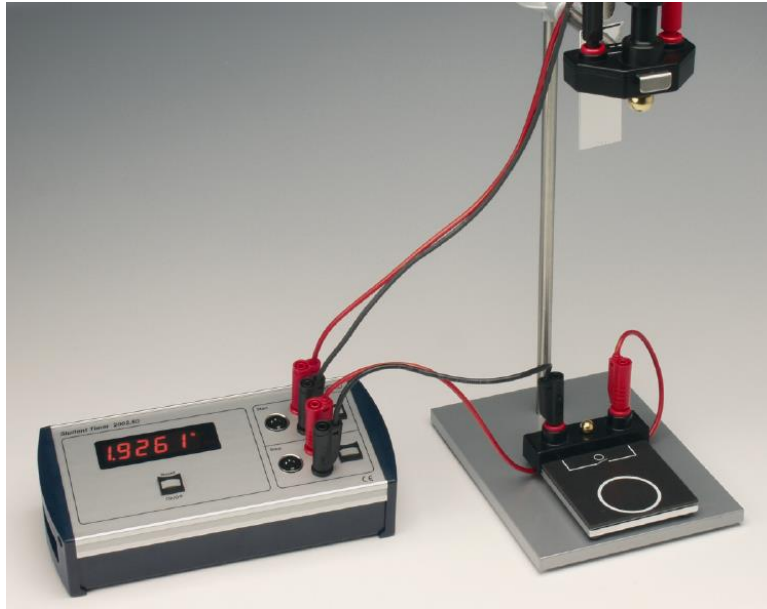
boyut analizi $t^\alpha \frac{L}{T^\alpha} = T \left(\frac{L}{T} - \frac{L/T^2}{1/T} \right) + T \frac{L/T^2}{1/T} \rightarrow L = L + L$ şeklinde olmalıdır. Denklem (17)'nin çözümüne benzer işlemler takip edilirse Denklem (22)'nin çözümü

$$\mathcal{Y}(t) = \nu_0 + t_p^{1-\alpha} \frac{g}{k} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{1}{k} \right) \left(\nu_0 - \frac{g}{k} \right) (1 - E_\alpha(-t_p^{1-\alpha} k t^\alpha)) \quad (23)$$

şeklinde elde edilir. $\alpha=1$ için (23) denklemini (5) denklemine eşit olmaktadır.

3. Bulgular ve Tartışma

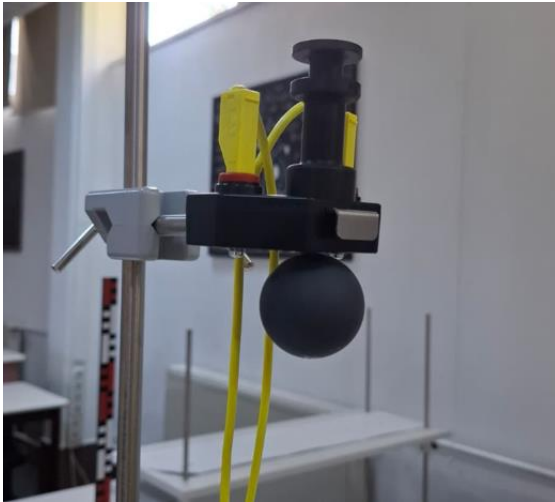
Bu çalışmada kütleleri $m_1=0,00282$ kg (siyah cisim), $m_2=0,00365$ kg (beyaz cisim) ve yarıçapları sırasıyla $r_1=0,019$ m (siyah cisim), $r_2=0,020$ m (beyaz cisim) olan iki farklı küresel cismin $h_1=0,6$ m, $h_2=0,8$ m, $h_3=1,0$ m, $h_4=1,2$ m yüksekliklerinden ilk hızı $v_0=0$ m/s serbest bırakılarak yere ulaşma süreleri deneysel ve teorik olarak incelenmiştir. Deneysel ölçümler her bir kütle ve yükseklik için on defa tekrarlanarak ortalamasının alınması ile elde edilmiştir. Standart teorik hesaplamalar denklem (5) kullanılarak elde edilmiştir. Deneysel ölçümler ile standart teorik hesaplamalar arasında uyumsuzluk görülmüştür. Bu uyumsuzluğu giderebilmek için denklem (2) ve denklem (4) Planck zaman birimi (t_p) ve Caputo kesirli türevi kullanılarak denklem (17) ve denklem (21) olarak yeniden tanımlanmışlardır. Bu denklemlerin çözümleri sırasıyla denklem (19) ve denklem (23) şeklinde elde edilmiştir.



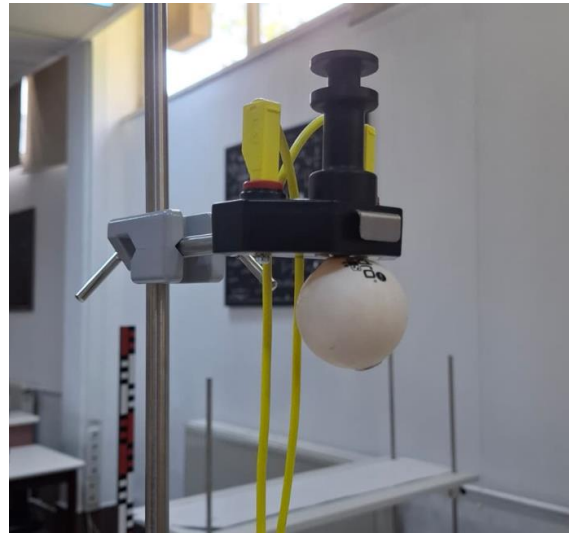
Şekil 2. Serbest düşme deney seti

Deneyler Milli Savunma Üniversitesi Hava Harp Okulu Fizik Bölümü Laboratuvarında gerçekleştirilmiştir. Deneysel ölçümler Frederiksen marka (Versiyon: 2017.08.25/HS) serbest düşme deney seti yardımıyla elde edilmiştir. Deney setine ilişkin görsel Şekil 2.'de sunulmuştur. Deneyde kullanılan siyah cisme ve beyaz cisme ait görseller sırasıyla Şekil 3. ve Şekil 4.'te verilmiştir. Deneysel ölçümler ile standart teorik ve kesirli teorik hesaplamaların karşılaştırılmasında sırasıyla denklem (5) ve denklem (23) kullanılmıştır. Hesaplamalarda yerçekimi ivmesi $g=9,806650$ m/s² ve havanın viskozitesi $\eta=0,000018$ Pas olarak alınmıştır. Stokes Yasasının ($C=6\pi\eta r$) kütleyle bölünmesi ile her bir cisim için k parametresi hesaplanmıştır. Cisimlerin kütleleri, kütlelerin k parametrelerine ilişkin değerleri, deneysel ölçümler ve standart sapmaları, standart ve kesirli teorik hesaplamalar ile α türev mertebeleri Tablo 1.'de verilmiştir. Tablo 1.'in birinci sütununda cisimlerin

kütleleri, ikinci sütununda ise k parametreleri verilmiştir. Üçüncü sütununda cisimlerin serbest bırakıldığı yükseklikler, dördüncü ve beşinci sütunda sırasıyla cisimlerin yere düşme sürelerinin deneysel sonuçları ve standart teorik hesaplamaları verilmiştir. Altıncı sütunda deneysel sonuçları sağlayan kesirli analiz hesaplamaları, yedinci sütunda deneysel sonuçlarla kesirli hesaplamaları uyumlu kılan α kesirli türev mertebeleri verilmiştir. Kesirli türev mertebeleri, sembolik hesaplama yeteneğine sahip yüksek düzeyde matematiksel işlem yapabilen bir yazılım kullanarak hesaplanmıştır. Tablo 1.'de görüldüğü gibi, farklı kütlelere ve yarıçaplara sahip küresel cisimlerin farklı yüksekliklerden serbest düşme sürelerinin standart teorik hesaplamaları, deneysel sonuçların standart sapmaları da dikkate alındığında oldukça farklıdır. Serbest düşme sürelerinin standart teorik sonuçları deneysel sürelerden sistematik olarak daha küçüktür. Bu durum hava direncinin, standart teorik modelin çözümü olan denklem (5)'de eksik temsil edildiğini göstermektedir. Denklem (23) kullanılarak hesaplanan kesirli teorik sonuçlar ile deneysel ölçümler ise birebir uyum içindedir. m_1 ve m_2 kütleli cisimlerin k parametrelerinin doğruluğu incelendiğinde Ebaid ve arkadaşlarının (Ebaid ve ark., 2019) yapmış oldukları çalışmalarla uyum içindedir.



Şekil 3. Siyah cisim



Şekil 4. Beyaz cisim

Bunun yanı sıra, gerek m_1 kütlesi için gerek m_2 kütlesi için artan yükseklik ile birlikte α türev mertebelerinin azaldığı görülmektedir. Bu durum düşme süresinin artmasının sistemin kesirli davranışının daha belirgin hale gelmesine neden olduğunu anlatmaktadır. Cismin havada daha uzun süre kalması daha fazla hava direncine ve daha fazla enerji kaybına neden olmaktadır. Türev mertebelerindeki bu azalış, hava direncinin zamanla biriken etkilerini daha belirgin hale getirmektedir. Her iki cisim içinde yüksekliğin artması ile α değerinin bu denli azalması klasik Newton mekaniğiyle açıklanamayan enerji sönüm etkilerinin Caputo kesirli analizi ile açıklanabileceğini göstermektedir. Tablo 1.'de m_1 ve m_2 kütlelerinin serbest bırakılma yükseklikleri aynı olmasına rağmen deneysel ölçümlerle eşdeğer kılan α türev mertebelerinin birbirlerinden farklı olduğu görülmektedir. Örneğin,

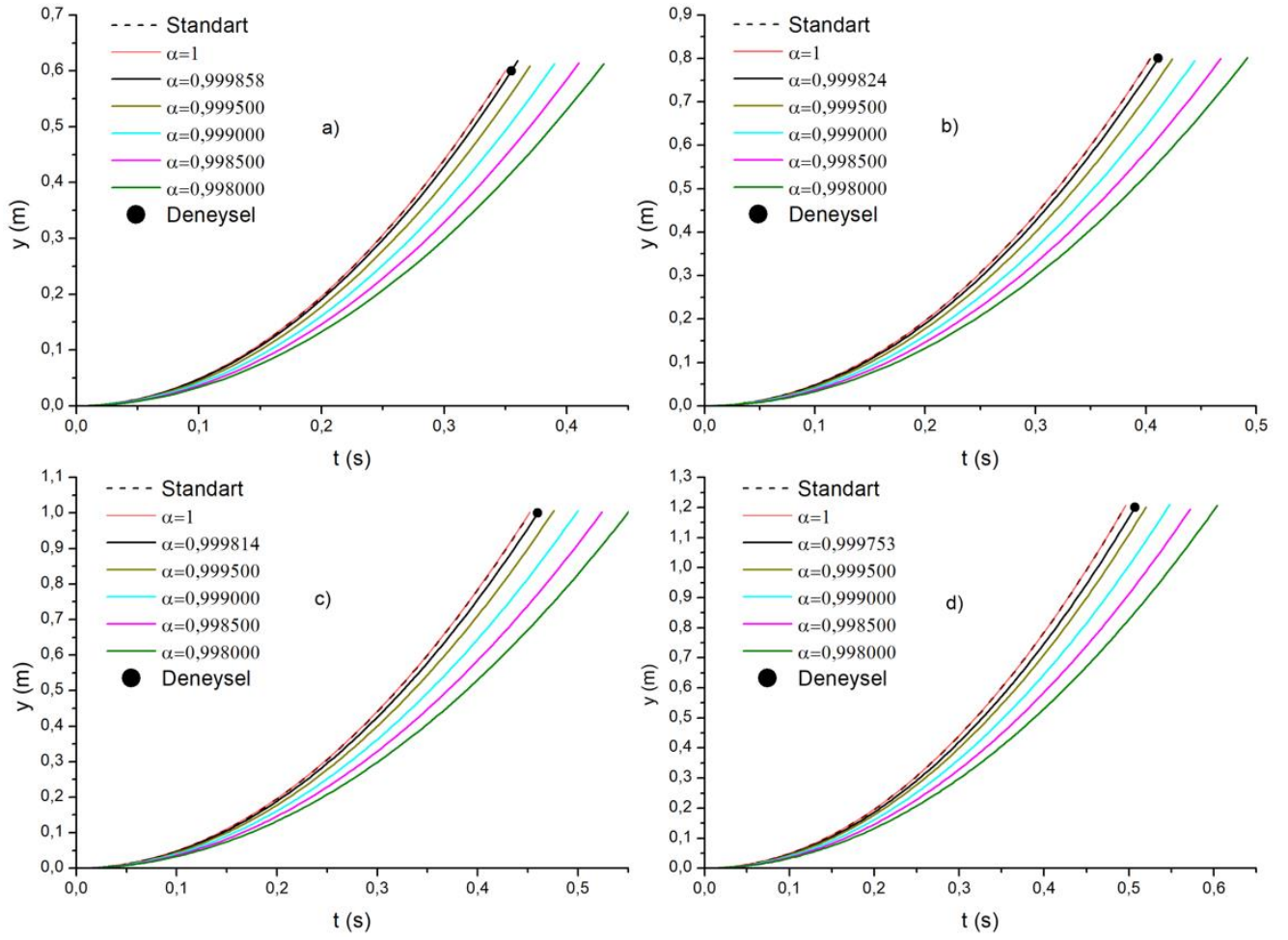
m_1 kütlelerinin 0,6 m yükseklikten düşüş süresinin türev mertebesi $\alpha=0,999858$ iken m_2 kütlelerinin 0,6 m yükseklikten düşüş süresinin türev mertebesi $\alpha=0,999812$ şeklinde elde edilmiştir. Serbest düşen cisimlerin yarıçapları arttıkça cisme etki eden hava direnci kuvveti artar. Bu da sistemin daha fazla enerji kaybetmesine neden olur. $r_1 < r_2$ olması nedeniyle m_1 kütlelerinin α türev mertebeleri, m_2 kütlelerinin α türev mertebelerinden büyüktür.

Tablo 1. Farklı yüksekliklerden serbest bırakılan cisimlerin deneysel, standart ve kesirli teorik ortalama süreleri

Kütle: m (kg)	k (1/s)	Yükseklik: h (m)	Ortalama düşme süresi: t (s)			
			Deneysel	Standart	Kesirli	α
$m_1=0,00282$	$k_1=0,002285$	$h_1=0,6$	0,354737 $\pm$ 0,002701	0,349855	0,354737	0,999858
		$h_2=0,8$	0,411005 $\pm$ 0,001326	0,403986	0,411005	0,999824
		$h_3=1,0$	0,459964 $\pm$ 0,000947	0,451678	0,459964	0,999814
		$h_4=1,2$	0,506937 $\pm$ 0,001482	0,494797	0,506937	0,999753
$m_2=0,00365$	$k_2=0,001858$	$h_1=0,6$	0,356343 $\pm$ 0,000828	0,349846	0,356343	0,999812
		$h_2=0,8$	0,411936 $\pm$ 0,001575	0,403975	0,411936	0,999800
		$h_3=1,0$	0,461982 $\pm$ 0,001285	0,451664	0,461982	0,999769
		$h_4=1,2$	0,508738 $\pm$ 0,000804	0,494780	0,508738	0,999716

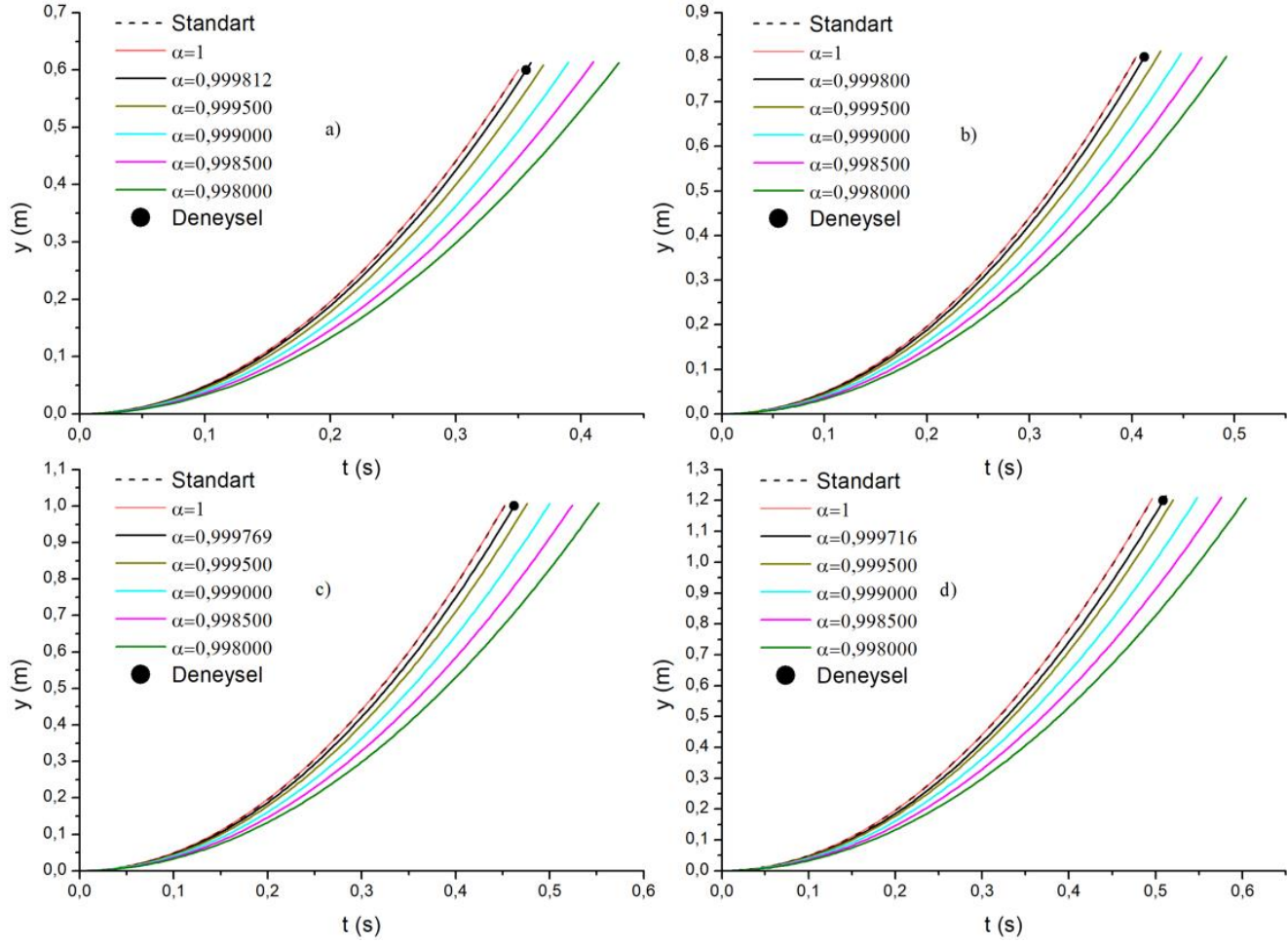
Not: $k=(6\pi\eta)/m$ formülü ile hesaplanmıştır.

Şekil 5 ve Şekil 6 incelendiğinde $\alpha=1$ türev mertebesi için denklem (23)'ün denklem (5)'e eşit olduğu görülmektedir. Ayrıca α türev mertebesinin azalan değerleri için hava direncinin ihmal edilmediği bir ortamda cisimlerin yere düşme sürelerinde artışlar görülmektedir. Bu artışlar artan zaman ile α türev mertebesinin etkisinin daha belirgin hale geldiğini anlatmaktadır. Kısacası uzun süreli düşüşlerde cisim limit hıza ulaşana dek kesirli mertebe parametresinin kritik bir rol oynayacağı aşikârdır.



Şekil 5. Farklı kesirli türev mertebelerinde serbest düşen m_1 kütleli cismin konum-zaman grafikleri

a) $h_1=0,6$ m için b) $h_2=0,8$ m için c) $h_3=1,0$ m için d) $h_4=1,2$ m için



Şekil 6. Farklı kesirli türev mertebelerinde serbest düşen m_2 kütleli cismin konum-zaman grafikleri

a) $h_1=0,6$ m için b) $h_2=0,8$ m için c) $h_3=1,0$ m için d) $h_4=1,2$ m için

4. Sonuçlar

Bu çalışmada, hava direnci etkisinin ihmal edilmediği serbest düşme hareketi hem deneysel hem de kesirli analiz yöntemi ile incelenmiştir. Standart teorik modelin (Denklem (5)), ölçülen düşme sürelerini sistematik olarak olduğundan kısa tahmin ettiği görülmüştür. Planck zaman birimi (t_p) ve Caputo kesirli türevi kullanılarak yeniden tanımlanan model (Denklem (23)) ile elde edilen sonuçlar ise deneysel verilerle yüksek uyum göstermiştir. Elde edilen bulgular, kesirli türev mertebesinin (α) yükseklik ve dolayısıyla düşme süresi arttıkça azaldığını ortaya koymuştur. Bu durum, uzun süreli düşüşlerde hava direncinin biriken etkilerinin klasik Newton mekaniği ile tam olarak açıklanamayacağını, ancak kesirli analiz yaklaşımı ile modellenebileceğini göstermektedir. Ayrıca farklı yarıçaplara sahip cisimlerin α değerlerindeki farklılık, hava direncinin yüzey alanına bağlı etkisini doğrulamaktadır. Sonuç olarak, kesirli analiz yöntemi, düşük hız ve küçük cisimler için Stokes yasası altında hava direncini içeren hareketlerin daha doğru tahmin edilmesini sağlamaktadır ve klasik modele kıyasla deneysel verilerle daha iyi uyum göstermektedir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarı herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazar makaleye %100 oranda katkı sağlamış olduğunu beyan eder.

Kaynakça

- Acay B., Ozarslan R., Bas E. Fractional physical models based on falling body problem. *AIMS Mathematics* 2020; 5(3): 2608-2628.
- Boas ML. *Mathematical method in the physical sciences*. New York: John Wiley and Sons; 1966.
- Carpinteri A., Mainardi F. *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. Wien: Springer Verlag; 1997.
- Casasanta G., Ciani D., Garra R. Non-exponential extinction of radiation by fractional calculus modelling. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 2012; 113(2): 194-197.
- Çalık AE., Ertik H., Öder B., Şirin H. A fractional calculus approach to investigate the alpha decay processes. *International Journal of Modern Physics E* 2013; 22(7): 1350049.
- Çalık AE., Şirin H., Ertik H., Öder B., Şen M. Half-lives of spherical proton emitters within the framework of fractional calculus. *International Journal of Modern Physics E* 2014; 23(9): 1450044.
- Çalık AE., Şirin H., Ertik H., Şen M. Analysis of charge variation in fractional order LC electrical circuit. *Revista Mexicana de Fisica* 2016; 62(5): 437-441.
- Çalık AE., Şirin H., Şen M. Experimental and fractional analysis of half-value thicknesses of polyethylene absorber. *Revista Mexicana de Fisica* 2020; 66(2): 232-238.
- Ebaid A., El-zahar ER., Aljohani AF., Salah B., Krid M., Machado JT. Analysis of the two-dimensional fractional projectile motion in view of the experimental data. *Nonlinear Dynamics* 2019; 97: 1711-1720.
- Ertik H., Çalık AE., Şirin H., Şen M., Öder B. Investigation of electrical RC circuit within the framework of fractional calculus. *Revista Mexicana de Fisica* 2015; 61: 58-63.
- Kilbas AA., Srivastava HM., Trujillo JJ. *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier; 2006.
- Losada J., Nieto JJ. Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications, An International Journal* 2015; 1(2): 87-92.
- Martinez R., Gallegos A., Macias-Diaz JE. A fractional tumor-growth model and the determination of the power law for different cancers based on data fitting. *Applied Mathematics Letters* 2024; 147: 108840.
- Miller KS., Ross B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York: John Wiley and Sons; 1993.

- Oldham KB., Spanier J. The Fractional calculus. San Diego: Academic Press; 1974.
- Petras I. Fractional-order nonlinear systems modeling, Analysis and Simulation. Berlin: Springer-Verlag; 2011.
- Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press; 1999.
- Rızaoğlu E., Sünel N. Klasik Mekanik. Tokat: Seçkin Yayınları; 2006.
- Rosales Garcia JJ., Guia Calderon M., Martinez Ortiz J., Baleanu D. Motion of a particle in a resisting medium using fractional calculus approach. Proceedings of the romanian academy, Series A 2013; 14(1): 42-47.
- Rosales JJ., Guia M., Gomez F., Aguilar F., Martinez J. Two dimensional fractional projectile motion in a resisting medium, Central European Journal of Physics 2014; 12(7): 517-520.
- Salahshour S., Ahmadian A., Ismail F., Baleanu D. A fractional derivative with non-singular kernel for interval-valued functions under uncertainty. Optik 2017; 130: 273-286.
- Şen M., Çalık AE. Calculation of half-value thickness for aluminum absorbers by means of fractional calculus. Annals of Nuclear Energy 2014; 63: 46-50.
- Şen M., Çalık AE., Ertik H. Determination of half-value thickness of aluminum foils for different beta sources by using fractional calculus. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms 2014; 335: 78-84.
- Şen M., Çalık AE., Senturk I., Şirin H. A generalization of cell survival models via fractional approach. Physica Scripta 2025; 100(3): 035019.
- Şen M., Çalık AE., Şirin H. Theoretical investigation of tenth-value thicknesses of aluminium absorbers. AIP Conference Proceedings 2019; 2178(1): 030058.
- Şirin H. Transport olayının istatistiksel mekanik yöntemlerle incelenmesi. Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, sayfa no:83, İzmir, Türkiye, 2011.
- Şirin H., Çalık AE. Newton'un soğuma kanunu: Kesirsel bir yaklaşım. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi 2019; 19(1): 60-66.
- Uzun M., Şirin H., Çalık AE., Atman KG. Graybody radiation phenomena in a fractional manner. X-Ray Spectrometry 2018; 47(5): 405-409.
- Valentim Jr CA., Oliveira NA., Rabi JA., David SA. Can fractional calculus help improve tumor growth models?. Journal of Computational and Applied Mathematics 2020; 379: 112964.
- Yörük E., Çalık AE., Atman KG., Şirin H. A fractional approach to cluster radioactivity. International Journal of Modern Physics E 2024; 33(01n02): 2450008.