



Dönen fonksiyonel dereceli polar ortotropik diskin gerilme analizi

Stress analysis of a rotating functionally graded polar orthotropic disk

Oğuzhan Demirel¹, Durmuş Yarımpaç^{2*}

¹ Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Matematik Bölümü, demirelemu@hotmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-2341-3401>

² Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Matematik Bölümü, durmusyayrimpac@osmaniye.edu.tr
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8763-1125>

MAKALE BİLGİLERİ

Makale Geçmişi:

Geliş 5 Eylül 2025
Revizyon 30 Ocak 2026
Kabul 23 Şubat 2026
Online 24 Mart 2026

Anahtar Kelimeler:

Elastik gerilmeler, fonksiyonel dereceli ortotropik disk, dönel disk, pseudospektral Chebyshev yöntemi, Laplace dönüşümü, modifiye Durbin yöntemi.

ÖZ

Bu çalışmada; değişken kalınlıklı, ortotropik ve fonksiyonel dereceli bir diskin zamana bağlı açısal hızla dönmesi durumu incelenmiştir. Eksenel simetri ve düzlem gerilme koşulları altında, malzemenin Poisson oranı dışındaki tüm özelliklerinin yarıçap doğrultusunda üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Analitik çözümü oldukça güç olan kısmi diferansiyel denklemin zaman bağımlılığı Laplace dönüşümü ile giderilmiş; radyal yöndeki çözüm ise Laplace uzayında pseudospektral Chebyshev yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Fiziksel uzaydaki sonuçlara modifiye edilmiş ters Durbin yöntemiyle ulaşılmıştır. Dönmenin diskin yer değiştirme ve gerilme dağılımları üzerindeki etkileri zamana ve yarıçapa bağlı olarak analiz edilmiştir. Malzeme derecelendirme indeksi, ortotropi derecesi ve eylemsizlik etkilerini bütünsel bir yaklaşımla ele alan bu çalışma; literatürdeki statik varsayımların ötesine geçerek mühendislik güvenilirliği artırılmış bir analiz çerçevesi sunmuştur.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 5 September 2025
Received in revised form 30 January 2026
Accepted 23 Şubat 2026
Available online 24 March 2026

Keywords:

Elastic stresses, functionally graded orthotropic disk, rotating disk, pseudospectral Chebyshev method, Laplace transforms, modified Durbin method.

ABSTRACT

This study investigates the rotation of a variable-thickness, orthotropic, and functionally graded disk with time-dependent angular velocity. Under axial symmetry and plane stress conditions, it is assumed that all properties of the material, except for the Poisson ratio, change exponentially in the radius direction. The time dependence of the partial differential equation, which is quite difficult to solve analytically, is eliminated using the Laplace transform; the solution in the radial direction is obtained using the pseudospectral Chebyshev method in Laplace space. Results in physical space are obtained using a modified inverse Durbin method. The effects of rotation on the displacement and stress distributions of the disk are analyzed as a function of time and radius. This study, which addresses material rating index, orthotropy degree, and inertia effects with a holistic approach, goes beyond the static assumptions in the literature and offers an analysis framework with increased engineering reliability.

Doi: 10.24012/dumf.1778849

* Sorumlu Yazar

Giriş

Dönen diskler, sanayi ve makine mühendisliğinde rulmanlar, dişli kutuları ve şanzımanlar, silindir makineleri; otomotivde motor silindirleri, amortisör ve süspansiyon sistemleri; inşaat ve malzeme işlemede silindirik asfalt makineleri, pres makineleri; enerji üretiminde türbinler, jeneratör ve motor rotorları; ip, kablo ve kayış aktarma sistemleri olarak makaralar, matbaa makineleri, çamaşır makinesi tamburu, bazı mutfak aletlerinin döner parçaları gibi ev aletleri başta olmak üzere günlük hayatın pek çok yerinde ve pek çok mühendislik alanında karşılaşılan temel yapısal elemanlardır. Bu tür yapıların analizinde, diskin dönme hızına bağlı olarak ortaya çıkan merkezkaç kuvvetleri, yapının dayanımı ve güvenliği açısından kritik rol oynar. Sabit hızla dönen disklerde oluşan gerilme ve gerinme dağılımlarının doğru şekilde hesaplanması, tasarım sürecinin temel unsurlarındandır. Bu bağlamda, disk malzemesinin yalnızca izotropik değil, aynı zamanda yönlü mekanik özelliklere sahip olması, yani ortotropik davranış göstermesi, mühendislik hesaplamalarını daha da karmaşık hale getirmektedir.

Ortotropik malzemeler, üç farklı dik doğrultuda farklı elastik özelliklere sahip olan özel bir malzeme sınıfıdır. Bu tür malzemelerin özellikleri fonksiyonel olarak derecelendirildiğinde, yani her doğrultudaki malzeme parametresi (örneğin, elastisite modülü, Poisson oranı veya yoğunluk) yarıçap boyunca sürekli bir şekilde değiştirildiğinde, yapının mekanik cevabı hem malzeme değişkenliği hem de geometrik/dinamik koşullardan etkilenmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM'ler), birden fazla malzemenin özelliklerinin sürekli ya da kademeli olarak değiştirildiği, geleneksel kompozit malzemelere alternatif olarak geliştirilen ileri mühendislik malzemeleridir. Bu malzemeler, yüksek sıcaklık dayanımı, termal şok direnci ve aşınma mukavemeti gibi üstün özellikleri sayesinde havacılık, otomotiv, enerji ve biyomedikal mühendisliği gibi birçok alanda yaygın kullanım alanı bulmuştur. Özellikle dönen diskler gibi döner simetrik yapılar için FDM'lerin kullanımı, mekanik ve termal yüklemelere karşı daha dayanıklı sistemlerin tasarlanmasına olanak tanımaktadır.

Bu çalışmada fonksiyonel dereceli ve değişken kesitli dönen ortotropik bir diskin gerilme ve gerinim analizi dinamik olarak ele alınmıştır. Bu konu hakkında yayımlanan çalışmaların bazıları kapsamına göre aşağıda verilmeyle çalışılmıştır.

Literatürde homojen olmayan malzeme özelliklerine sahip disklerin mekanik ve termal davranışları geniş bir yer tutmaktadır. Bu kapsamda Çallıoğlu [1, 2], dönen FGM disklerin hem mekanik yükler hem de kararlı durum sıcaklık dağılımı altındaki stres karakteristiklerini incelemiştir. Malzeme davranışının plastik sınırlarına odaklanan Jahromi vd. [3], elasto-plastik stres dağılımlarını analiz ederken; Türkmen [4] ile Eker vd. [5], uniform sıcaklık yüklemesi ve iç ısı üretimi bulunan kalın cidarlı yapılarıdaki termal stres oluşumlarını detaylandırmıştır.

Ayrıca, Arefi vd. [6] tarafından sunulan çalışma, keyfi FDM özelliklerine sahip içi boş silindirlerin termo-elastik analizini gerçekleştirerek konuyu farklı geometrik formlar üzerinden genişletmiştir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) kullanılan disk tasarımlarında, disk geometrisinin ve özellikle kalınlık profiline stres dağılımı üzerindeki etkisi literatürde geniş yer tutan temel bir araştırma temasıdır. Bu bağlamda Yıldırım ve Tütüncü [7], değişken kalınlığa sahip disk yapılarında atalet-elastik instabilite olgusunu detaylıca araştırmıştır. Değişken profilli disklerin elastik analizine yönelik çalışmalarda ise Sondhi [8] ile Essa [9], üç parametrelili varyasyon fonksiyonlarını kullanarak daha esnek ve hassas modelleme yaklaşımları sunmuştur. Ayrıca, geometrik formun mekanik performansa etkisini inceleyen Zheng vd. [10, 11] ile Yıldırım [12], hiperbolik ve doğrusal olmayan kalınlık değişimlerinin santrifüj kuvvetleri altındaki davranışlarını analiz ederek, bu parametrelerin yapısal dayanım üzerindeki belirleyici rolünü ortaya koymuşlardır.

Malzemenin yön bağımlı özelliklerinin (ortotropi) disk mekanığı üzerindeki belirleyici etkisi, literatürdeki pek çok teorik ve uygulamalı çalışmanın temelini oluşturmaktadır. Bu alandaki öncü çalışmalardan Bert [13] ve Genta [14], değişken kalınlığa sahip polar-ortotropik disklerdeki yer değiştirme karakteristiklerini ve stres dağılım profillerini tanımlayan temel modeller sunmuşlardır. Yapısal verimliliği artırmaya yönelik araştırmalarda Leissa [15], stres optimizasyonu odağında malzeme tasarımı parametrelerine yoğunlaşırken; Eraslan vd. [16], bu tür karmaşık disk problemleri için kapalı formda analitik çözümler geliştirerek literatüre katkı sağlamışlardır. Ayrıca, malzeme bileşiminin etkilerini inceleyen Thakur vd. [17], yoğunluk parametresinin kauçuk esaslı ve ortotropik disklerin dinamik davranışı üzerindeki etkilerini kapsamlı bir şekilde analiz etmişlerdir.

Dönen disklerin dinamik karakteristikleri ve operasyonel stabilite limitleri, yapısal bütünlüğün korunması açısından literatürde kritik bir öneme sahiptir. Bu bağlamda Tütüncü vd. [18, 19], dış kenarından sınırlandırılmış disklerin burkulma hızlarını ve ortotropik silindirlerde meydana gelen instabilite olgularını detaylı bir şekilde araştırmışlardır. Dinamik davranışın bir diğer temel bileşeni olan titreşim karakteristikleri üzerine odaklanan Koo [20] ile Güven vd. [21], polar-ortotropik halka formundaki disklerin serbest titreşim analizlerini gerçekleştirerek, güvenli çalışma aralıklarını belirleyen kritik hız değerlerini saptamışlardır.

Dönen disklerin analizinde, ısı, manyetik ve mekanik alanların birleşik etkilerini kapsayan çoklu fizik etkileşimleri literatürde önemli bir araştırma alanını temsil etmektedir. Bu doğrultuda Ghorbanpour Arani vd. [22], manyeto-termo-elastik gerilmelerin tayini için yenilikçi yarı-analitik çözümler önermişlerdir. Isıl yüklemelerin neden olduğu tekillikler ve zamana bağlı etkiler üzerine

yoğunlaşan Alexandrova [23] ve Misra [24], sıcaklık gradyanları ile dönen ısı kaynaklarının malzeme üzerindeki stres dağılımını nasıl etkilediğini ve ortaya çıkan singularite problemlerini araştırmışlardır. Ayrıca Jalali [25], fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) disklerin termomekanik yüklemeler altındaki statik ve dinamik davranışlarını kapsamlı bir şekilde analiz ederek, karmaşık yükleme koşullarının yapısal performans üzerindeki etkilerini ortaya koymuştur.

Yüksek sıcaklık ve sürekli yükleme koşullarına maruz kalan dönen disklerde, zamana bağlı deformasyonların ve sünme (creep) mekanizmalarının analizi operasyonel ömür tayini açısından kritik bir önem arz etmektedir. Bu alanda öne çıkan çalışmalarda Sharma ve Maheshwari [26, 27], değişken kalınlık ve yoğunluk profillerine sahip fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) disklerde sünme gerilmelerini modellemişlerdir. Yazarlar, malzeme özelliklerinde ve geometri tanımlamalarında üstel varyasyon modellerini kullanarak, heterojen yapıdaki sünme davranışlarını ve gerilme yeniden dağılımını teorik bir çerçevede detaylandırmışlardır.

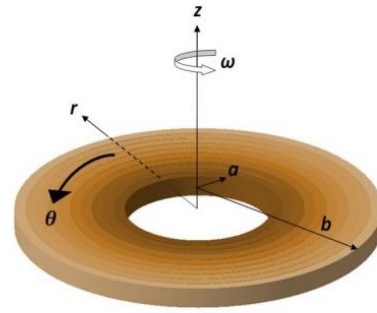
Dönen sistemlerin gerçek zamanlı çalışma senaryolarında karşılaşılan dinamik yükleme koşulları ve karmaşık sınır etkileşimleri, güncel literatürde giderek daha fazla dikkat çekmektedir. Bu çerçevede Dai [28], değişken açısal hızla maruz kalan fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) dairesel disklerin mekanik davranışlarını ve ivmelenme etkilerini kapsamlı bir şekilde incelemiştir. Literatürdeki en güncel çalışmalardan biri olan Motameni vd. [29] ise, rijit bir inklüzyon üzerine monte edilmiş ve değişken açısal hız altında çalışan polar ortotropik FDM disklerin stres alanlarını analiz etmiştir. Bu çalışma, hem malzeme anizotropisini hem de özel geometrik kısıtlamaları aynı anda modelleyerek, modern rotor sistemlerinin yapısal analizi için ileri düzey bir perspektif sunmuştur.

Bu çalışmada, zamana bağlı bir açısal hızla dönen fonksiyonel dereceli ortotropik diskin aksel simetri varsayımı ve düzlem gerilme koşulları altında gerilme dağılımları sayısal olarak elde edilmiştir. Etkisi az olduğu düşünülen Poisson oranı [30] dışındaki malzeme özelliklerinin yarıçap doğrultusunda üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında temel denge, uygunluk ve malzeme bağıntı denklemleri, ortotropik ve fonksiyonel yapıya uygun olarak elde edilmiştir. Yer değiştirmeye bağlı olarak elde edilen değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümünün geleneksel yöntemlerle elde edilmesi zordur. Bu sebeple kısmi diferansiyel denklemin zaman bağımlılığı Laplace dönüşümü ile ortadan kaldırıldıktan sonra, radyal yöndeki çözüm pseudospektral Chebyshev yöntemi ile Laplace uzayında çözüldükten sonra, modifiye edilmiş ters Durbin yöntemi ile fiziksel uzaydaki sonuçlar elde edilmiştir. Dönmenin diskin yer değiştirme ve gerilme dağılımları üzerindeki etkileri zamana ve yarıçapa bağlı olarak analiz edilmiştir. Bu çalışma, literatürde genellikle statik varsayımlar veya

hesaplama kolaylığı nedeniyle ihmal edilen eylemsizlik teriminin [29], zamana bağlı değişken açısal hızla dönen fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) ortotropik disklerin dinamik davranışı üzerindeki etkisini sistematik olarak incelemektedir. Bu eksikliği gidermek amacıyla sunulan analiz yaklaşımı, eylemsizlik terimini hesaplamalara entegre ederek fiziksel doğruluğu ve mühendislik güvenilirliği artırılmış özgün bir dinamik model ortaya koymuştur.

Materyal ve Yöntem

İç yarıçapı a , dış yarıçap b olan ve sabit hızla dönen fonksiyonel derecelendirilmiş bir diski ele alalım. Bu diskin şematik gösterimi Şekil 1'de verilmiştir [38].



Şekil 1. Sabit açısal hızla dönen diskin şematik gösterimi.

Burada; h_b kalınlık, E_r radyal yöndeki Young modülü, E_θ açısal yöndeki Young modülü, ν ortotropi parametresi, r radyal eksen, ω dönme hızındaki değişimi, u radyal yer değiştirmeyi, ε_r radyal yöndeki elastik gerilmeyi, ε_θ açısal yöndeki elastik gerilme değerlerini göstermektedir. Kalınlığın üstel olarak değiştiğini varsayalım;

$$h(r) = h_b e^{g\left(\frac{r}{b}\right)} \quad (1)$$

Burada Elastiklik modülü ve Poisson oranı şu şekilde derecelendirilmiştir;

$$E(r) = E_0 e^{m\left(\frac{r}{b}\right)}, \quad \rho(r) = \rho_0 e^{n\left(\frac{r}{b}\right)}, \quad \nu_{\theta r} = \phi \nu_{r\theta} \quad (2)$$

Gerinim yer değiştirme ilişkileri [35];

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u(r, t)}{r} \quad (3)$$

ve radyal ve açısal gerilmeler [35],

$$\sigma_r(r, t) = \frac{E_r(r)}{1 - \phi \nu_{r\theta}^2} \left[\frac{\partial u(r, t)}{\partial r} + \phi \nu_{r\theta} \frac{u(r, t)}{r} \right] \quad (4)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = \frac{\phi E_r(r)}{1 - \phi \nu_{r\theta}^2} \left[\nu_{r\theta} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} + \frac{u(r, t)}{r} \right] \quad (5)$$

ve açısal hız değişimi [29],

$$\omega(t) = \omega_0 \cos^2(\alpha t) \quad (6)$$

olmak üzere eylemsizlik terimi dikkate alınarak elde edilen denge denklemi aşağıdaki şekildedir;

$$\frac{\partial}{\partial r} [r \sigma_r(r, t) h(r)] - \sigma_\theta(r, t) h(r) + \rho(r) h(r) \omega^2(t) r^2 = \rho(r) \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} \quad (7)$$

Denge denklemi (7) nin başlangıç

$$u(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

ve sınır koşulları,

$$u(a, t) = 0, \quad \sigma_r(b, t) = 0 \quad (9)$$

şeklinde alınmıştır. Gerinim-yer değiştirme (3) ve gerilme-gerinim denklemleri (4-5) ile değişken kesit (1), malzeme özellikleri (2) ve açılma hızı (6), denge denkleminde (7) yerine yazılırsa, yer değiştirmeye bağlı kısmi diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + P_1 \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} + P_2 u(r, t) + P_3 \cos^4(\alpha t) = P_4 \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} \quad (10)$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$P_1 = \frac{1}{r} + \frac{m+g}{b}, \quad P_2 = -\frac{\phi}{r^2} + \frac{(m+g)\phi v_{r\theta}}{br}$$

$$P_3 = \frac{\rho_0 \omega_0^2 (1 - \phi v_{r\theta}^2)}{E_0} r e^{\frac{(n-m)r}{b}}, \quad P_4 = \frac{\rho_0 (1 - \phi v_{r\theta}^2)}{h_b E_0 r} e^{\frac{(n-m-g)r}{b}} \quad (11)$$

radyal değişkene bağlı katsayılarıdır.

Çözüm Yöntemi

Deplasman denklemi (10), birleştirilmiş Laplace-pseudospektral Chebyshev-Durbin yöntemleri ile sayısal olarak çözülmüştür. Yer değiştirmeye bağlı kısmi diferansiyel denklemi Laplace dönüşümü ile adi diferansiyel denkleme dönüştürülüp, Laplace uzayında radyal yönde pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözüldükten sonra modifiye edilmiş Durbin yöntemi ile fiziksel uzaydaki çözüm elde edilmiştir.

Laplace dönüşümü

Deplasmana bağlı lineer kısmi diferansiyel denklemindeki zamana bağımlılığı ortadan kaldırmak için Laplace dönüşümü kullanılmıştır. Kısmi diferansiyel denklemin (10), başlangıç koşulları (8) kullanılarak Laplace dönüşümü alınır,

$$\bar{U}''(r, s) + P_1 \bar{U}'(r, s) + (P_2 - P_4 s^2) \bar{U}(r, s) = RHS(r, s) \quad (12)$$

Laplace uzayında radyal yönde türevli adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada $\mathcal{L}[u(r, t)] = \bar{U}(r, s)$ iken, $(\cdot)'$, r yönündeki türevi, s ise Laplace parametresini göstermektedir. Laplace uzayında dönüştürülmüş sınır koşulları ise,

$$\bar{U}(a, s) = 0, \quad \bar{U}'(b, s) + \frac{\phi v_{r\theta}(b)}{b} \bar{U}(r, s) = 0 \quad (13)$$

ve sağ taraf (RHS) fonksiyonu

$$RHS = -P_3 \mathcal{L}[\cos^4(\alpha t)]$$

şeklinde dir.

Pseudospektral Chebyshev Yöntemi (PCY)

Bu çalışmada spektral bir yöntem kullanılacaktır. Bu yöntem kullanılırken çözüm aralıklarının periyodik olup olmadığına göre yöntem seçimi yapılabilir. Periyodik aralıkları içeren problemler için genelde Fourier

pseudospektral yöntemleri tercih edilirken, periyodik olmayan aralıkları içeren problemler için Legendre spektral, Legendre pseudospektral, Chebyshev spektral ve Chebyshev pseudospektral yöntemleri tercih edilir. Belirtilen aralıkta, hatayı minimumda tutacak ağ noktaları seçilir ve bu noktalardaki interpolasyon polinomu bulunur. Pseudospektral Chebyshev Yönteminde (PCY), sınıra yakın yerlerde daha sık, sınırdan uzaklaştıkça ise daha az sıklıkta dağılım sergileyen Gauss-Lobatto noktaları genelde tercih edilen nokta dağılımıdır.

Pseudospektral Chebyshev yönteminde [31-32], diferansiyel denklemdaki türev terimleri, diferansiyel matris operatörü yardımıyla doğrusal bir denklem sistemine dönüştürülür. Diferansiyel matrisi elde etmek için öncelikle bir Lagrange interpolasyon polinomu oluşturmak gerekir. Lagrange interpolasyonunda, interpolasyon noktaları

$$\eta_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (14)$$

bu polinomun sıfırları olarak alınır, hata en aza indirilir. Chebyshev yerleşim noktalarının sınırlarında ızgara yoğunluğu nedeniyle, problemin çözümünde daha az nokta kullanarak yüksek hassasiyette çözümler elde edilir. Lagrange interpolasyonu ile Gauss-Lobatto noktaları kullanılarak elde edilen diferansiyel matris D , sol taraftan bir kere $\bar{U}(r, s)$ vektörü ile çarpıldığında bu vektörün birinci türevine $\bar{U}'(r, s) = D_N \bar{U}(r, s)$, iki kere çarpıldığında bu vektörün ikinci türevine $\bar{U}''(r, s) = D_N^2 \bar{U}(r, s)$ karşılık gelir. Bu şekilde türevli ifadelerle yüksek hassasiyetli bir yaklaşım sağlanırken, adi diferansiyel denklem lineer denklem sistemine indirgenir.

İkinci dereceden sınır değer problemi (12) PCY kullanılarak,

$$M \bar{U} = RHS(r, s) \quad (15)$$

$$M = D^2 + P_1 D + P_2 - P_4 s^2$$

doğrusal bir sisteme dönüştürülür. Bu doğrusal denklem sisteminin aşikâr olmayan çözümü, sınır koşulları sisteme entegre edildikten sonra herhangi bir ayrıklaştırma yöntemi kullanılarak bulunur.

Modifiye Edilmiş Durbin Yöntemi

Laplace uzayında elde edilen yer değiştirme değerlerinin fiziksel uzaydaki sayısal değerlerinin ters dönüşüm formülleri ile bulunması zor ve pratik değildir. Bunun yerine sayısal değerlerin fiziksel uzaydaki değerlerini hesaplamak için modifiye edilmiş Durbin [33] yöntemi kullanılmıştır. Fourier cosinüs seri yaklaşımına dayanan ve Dubner ve Abate'nin [34] geliştirdiği ters dönüşüm yönteminden esinlenen bu yöntemde Fourier cosinüs ve sinüs seri yaklaşımları birlikte kullanılmıştır. Bu yöntem sonlu Fourier kosinüs serisine dayanan Dubner ve Abbate

[34] metodunun geliştirilmiş metodu olup aşağıdaki formüllerle verilir;

$$u(t) = \frac{2e^{a\lambda t}}{T} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\bar{U}(a)\} + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} [A(k) + iB(k)] w^{jk}\right\} \right] \quad (16)$$

$$A(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \bar{U}(a + i(k + nN) \frac{2\pi}{T}) \right\} \quad (17)$$

$$B(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Im} \left\{ \bar{U}(a + i(k + nN) \frac{2\pi}{T}) \right\} \quad (18)$$

Burada

$$w = e^{\frac{2\pi i}{N}}, \quad s_k = a + i \frac{2\pi k}{T} \quad (19)$$

dönüşüm parametrelerini göstermektedir. Bu yöntemdeki sonuçların iyileştirilmesi için Narayanan [35] tarafından önerilen Lanczos faktörü her bir terimle ayrı ayrı çarpılmıştır. Yöntemin son zamandaki uygulamaları ve detaylı çözüm açıklamaları için [36-37] çalışmaları incelenebilir.

Tablo 1. Disk üzerinde oluşan radyal yöndeki gerilmenin karşılaştırılması ($g = 0.5, m = -0.5, n = 0.5, \omega_0 = 1, \alpha = 0.5, t = 0.2, \phi = 0.5$).

σ_r		
r	Analitik [29]	PCY
0.5000	0.553596204	0.553596204
0.5085	0.538194074	0.538194078
0.5335	0.496009157	0.496009157
0.5732	0.436406272	0.436406275
0.6250	0.368914101	0.368914101
0.6853	0.300110035	0.300110037
0.7500	0.233597496	0.233597496
0.8147	0.171430788	0.171430790
0.8750	0.115432249	0.115432249
0.9268	0.067818401	0.067818403
0.9665	0.031165144	0.031165144
0.9915	0.007956643	0.007956645
1.0000	-0.000000000	0.000000000

Bulgular ve Tartışma

Bu çalışmada, sabit açısal hızla dönen bir fonksiyonel dereceli ortotropik diskin aksenal simetri varsayımı ve düzlem gerilme koşulları altında gerilme dağılımları sayısal olarak elde edilmiştir. Yer değiştirmeye bağlı olarak elde edilen düzensiz kısmi diferansiyel denklemin sayısal analizi birleştirilmiş Laplace-pseudospektral Chebyshev ve modifiye edilmiş ters Durbin yöntemi ile ele alınmıştır. Analizlerde, $g = -0.3, m = -0.5, n = 0.2, \omega_0 = 1$ ve $\phi = 0.5$ alınmıştır.

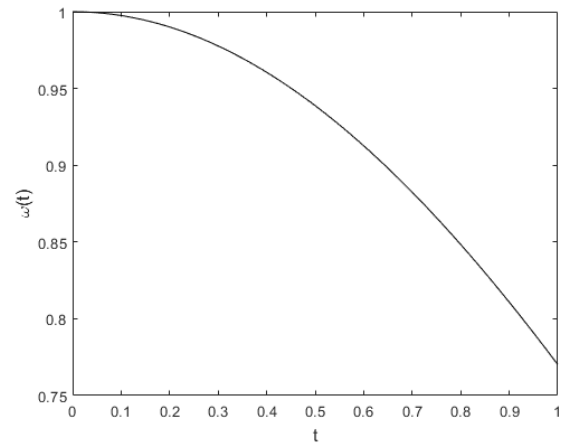
Birleştirilmiş yöntemin doğruluğunu test etmek için eylemsizlik teriminin ihmal edildiği literatürde mevcut olan analitik çalışma [29] ile farklı parametre değerleri için karşılaştırılmış, sonuçlar Tablo 1-2 de listelenmiştir.

Tablo1-2'deki sonuçlar incelendiğinde, radyal yönde sadece 12 noktada yapılan hesaplamalar ile birleştirilmiş Laplace-Chebyshev-Durbin yöntemi ile yaklaşık sonuçların elde edildiği görülmüştür. Tablo 1-2'deki sonuçların sonsuzluk normuna göre hatası 10^{-10} mertebesindedir.

Tablo 2. Disk üzerinde oluşan açısal yöndeki gerilmenin karşılaştırılması ($g = 0.5, m = -0.5, n = 0.5, \omega_0 = 1, \alpha = 0.5, t = 0.2, \phi = 0.5$).

σ_θ		
r	Analitik [29]	PCY
0.5000	0.083039431	0.083039431
0.5085	0.085071386	0.085071387
0.5335	0.089785637	0.089785637
0.5732	0.094175177	0.094175178
0.6250	0.095685166	0.095685166
0.6853	0.093281368	0.093281369
0.7500	0.087278101	0.087278101
0.8147	0.078746087	0.078746087
0.8750	0.069055763	0.069055763
0.9268	0.059626879	0.059626880
0.9665	0.051776847	0.051776847
0.9915	0.046587073	0.046587073
1.0000	0.044773441	0.044773441

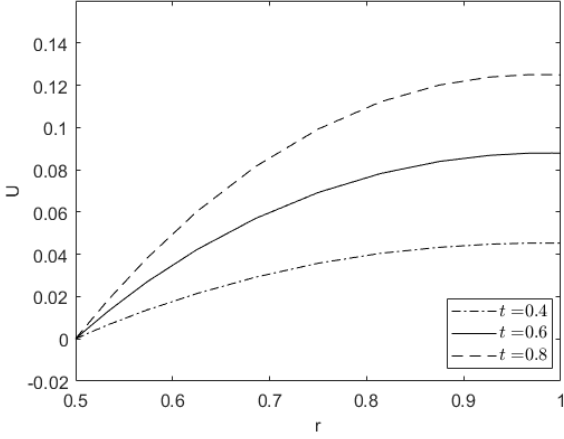
Eylemsizlik teriminin etkisini incelemeye önce bu çalışmada ele alınan zaman aralığında açısal hızın grafiği Şekil 2'de verilmiştir. İlk andan, $t = 1$ anına kadar açısal hızdaki azalma oranı %23 civarındadır. Açısal hızdaki bu oranda bir azalmada sistemin ivmeye karşı direncini temsil eden eylemsizlik teriminin modele dahil edilmesi, yalnızca matematiksel bir detay değil, fiziksel doğruluk ve mühendislik güvenilirliği açısından önemlidir. Bu sebeple bu çalışmada eylemsizlik terimi modele dahil edilmiştir.



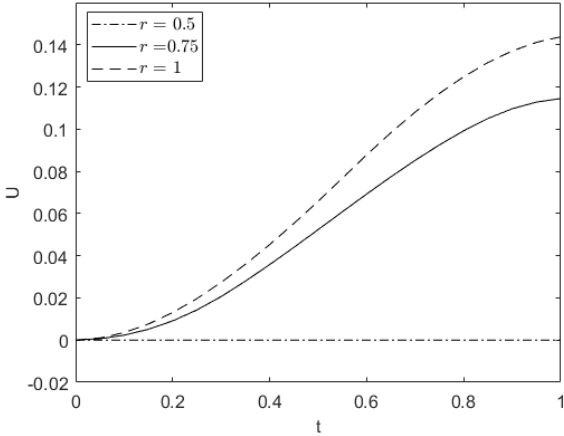
Şekil 2. Açısal hızın değişimi.

Şekil 3 ve 4'te bakıldığında, zaman ilerledikçe ve diskin dış cidarına ($r = 1$) yaklaştığında deplasman değerlerinin arttığı görülmektedir. Santrifüj kuvvetleri radyal yönde dışa doğrudur ve bu kuvvetin büyüklüğü yarıçap ile doğru

orantılıdır. Zamanla artan açılma hızı, bu radyal genişmeyi daha da belirginleştirir. Dış cidardaki maksimum yer değiştirme, yatak boşlukları ve komşu bileşenlerle olan toleranslar için kritik bir çalışma boşluğu sınırı belirler. Özellikle türbin tasarımlarında, bu genişmenin öngörülemezliği disk ile gövde arasında sürtünmeye ve katastrofik arızalara yol açabilir.

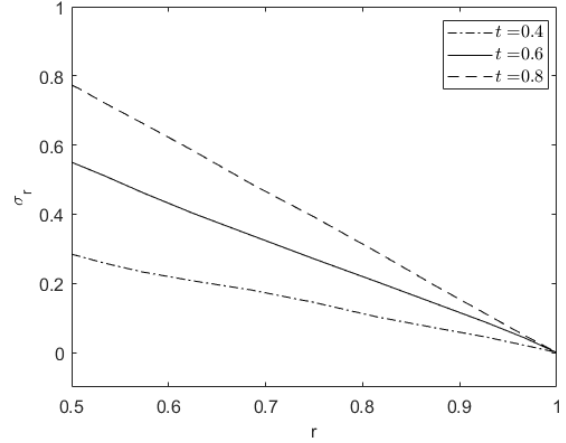


Şekil 3. Radyal yönde farklı zaman değerleri için deplasmanın mukayesesi.

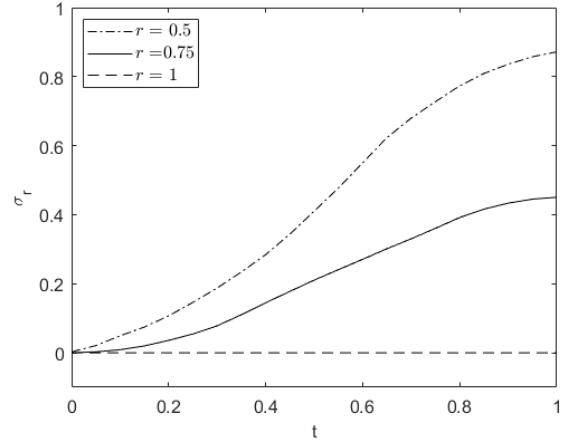


Şekil 4. Zaman yönünde iç, orta ve dış cidar noktalarında deplasmanın mukayesesi.

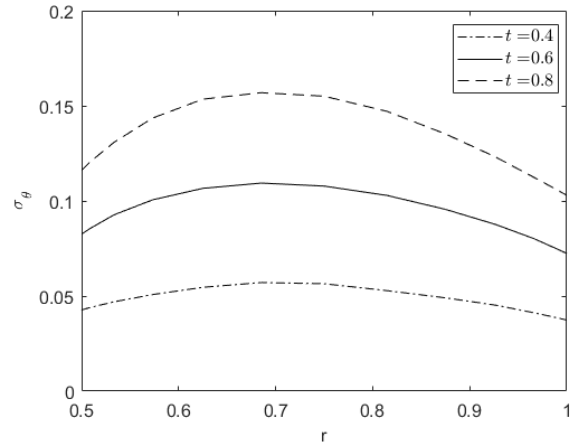
Şekil 5 ve 6'da radyal gerilmenin dış cidarda ($r = 1$) her zaman sıfır olduğu, ancak iç cidarda ($r = 0.5$) zamanla arttığı gözlemlenmektedir. Dış sınırın serbest olması radyal gerilmeyi burada sıfırlar. Ancak dönmenin yarattığı iç eylemsizlik kuvvetleri, diskin iç kısmında birikerek radyal yönde çekme gerilmesi oluşturur. Tasarımda kritik eşik iç cidar üzerindedir. Eğer disk bir shaft üzerine preslenmişse, artan radyal gerilme shaft-disk bağlantısının gevşemesine veya iç cidarda radyal çatlakların başlamasına neden olabilir.



Şekil 5. Radyal yönde farklı zaman değerleri için radyal gerilmelerin mukayesesi.



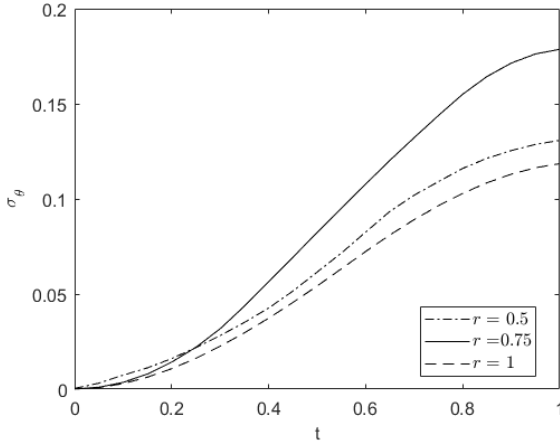
Şekil 6. Zaman yönünde iç, orta ve dış cidar noktalarında radyal gerilmelerin mukayesesi.



Şekil 7. Radyal yönde farklı zaman değerleri için teğetsel gerilmelerin mukayesesi.

Şekil 7 ve 8'de teğetsel gerilmelerin dağılımı incelendiğinde, maksimum gerilmenin diskin orta bölgelerine doğru ($r \approx 0.7$) yoğunlaştığı ve zamanla arttığı

görülmektedir. Ortotropi derecesi ve FD malzeme gradyanı, gerilmenin üniform dağılmasını engeller. Dönmenin etkisiyle oluşan teğetsel zorlanmalar, malzemenin direncine bağlı olarak belirli bir yarıçapta tepe noktası yapar. Maksimum gerilme noktasının iç veya dış cidardan iç kısımlara kayması, malzemenin yorulma ömrünü bu bölgede sınırlar. Mühendisler için bu durum, disk üzerinde yapılacak delik, kanal veya bağlantı unsurlarının bu kritik gerilme halkasından uzak tutulması gerektiğini ifade eder.



Şekil 8. Zaman yönünde iç, orta ve dış cidar noktalarında teğetsel gerilmelerin mukayesesi.

Sonuç

Bu çalışmada, zamana bağlı bir açısal hızla dönen bir fonksiyonel dereceli ortotropik diskin aksel simetri varsayımı ve düzlem gerilme koşulları altında gerilme dağılımları sayısal olarak elde edilmiştir. Etkisi az olduğu düşünülen Poisson oranı dışındaki malzeme özelliklerinin yarıçap boyunca üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında geleneksel yöntemlerle analitik olarak çözülmesi zor olan kısmi bir diferansiyel denklem, birleştirilmiş Laplace-pseudospektral Chebyshev-Durbin yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Birleştirilmiş yöntemin doğruluğunu test etmek için eylemsizlik teriminin ihmal edildiği literatürde mevcut olan analitik çalışma ile farklı parametre değerleri için sonuçlar tablo formunda karşılaştırılmış, sonsuzluk normuna göre hatası 10^{-10} mertebesinde olduğu görülmüştür. Dönmenin diskin yer değiştirme ve gerilme dağılımları üzerindeki etkileri zamana ve yarıçapa bağlı olarak analiz edilmiş ve tartışılmıştır. Sonuç olarak bu çalışma; malzeme derecelendirme indeksi, ortotropi derecesi ve eylemsizlik etkilerini bütünlük bir yapıda ele alarak, literatürdeki statik varsayımların ötesinde, mühendislik güvenilirliği artırılmış bir analiz çerçevesi sunmaktadır.

Etik kurul onayı ve çıkar çatışması beyanı

Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur.

Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Kaynaklar

- [1] H. Çallıoğlu, "Stress analysis of functionally graded isotropic rotating discs," *Advanced Composite Letters*, vol. 17, no 5, pp. 147-153, 2008.
- [2] H. Çallıoğlu, "Stress analysis in a functionally graded disc under mechanical loads and a steady state temperature distribution," *Sadhana*, vol. 36, pp. 53-64, 2011.
- [3] B.H.Jahromi, H.Nayeb-Hashemi and A.Vaziri, "Elasto-plastic stresses in a functionally graded rotating disk," *ASME J.of Engineering Materials and Technology*, vol. 134, no 2, pp. 021004, 2012.
- [4] D. Türkmen, "Functionally graded discs subjected to uniform temperature loading," *Science and Engineering of Composite Materials*, vol. 17, no 1, pp. 39-46, 2010.
- [5] M. Eker, D. Yarimpabuç and K. Çelebi, "Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation," *Engineering Computations*, vol. 38, no 1, pp. 371-391, 2021.
- [6] M. Arefi, I. Nahas and M. Abedi, "Thermo-elastic analysis of a rotating hollow cylinder made of arbitrary functionally graded materials," *J. of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 45, no 4, pp. 41-60, 2015.
- [7] S. Yıldırım and N. Tütüncü, "On the inertio-elastic instability of variable-thickness functionally-graded disks," *Mechanics Research Communications*, vol. 91, pp. 1-6, 2018.
- [8] L. Sondhi, A. K. Thawait, S. Sanyal and S. Bhowmick, "Stress and deformation analysis of variable thickness clamped rotating disk of functionally graded orthotropic material," *Materials Today: Proceedings*, vol. 18, pp. 4431-4440, 2019.
- [9] S. Essa and H. Argeso, "Elastic analysis of variable profile and polar orthotropic fgm rotating disks for a variation function with three parameters," *Acta Mechanica*, vol. 228, no 11, pp. 3877-3899, 2017.
- [10] Y. Zheng, H. Bahaloo, D. Mousanezhad, E. Mahdi, A. Vaziri and H. Nayeb-Hashemi, "Stress analysis in functionally graded rotating disks with non-uniform thickness and variable angular velocity," *International J. of Mechanical Sciences*, vol. 119, pp. 283-293, 2016.
- [11] Y. Zheng, H. Bahaloo, D. Mousanezhad, A. Vaziri and H. Nayeb-Hashemi, "Displacement and stress fields in a functionally graded fiber-reinforced rotating disk with nonuniform thickness and variable angular velocity," *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 139, no 3, pp. 031010, 2017.
- [12] V. Yıldırım, "A parametric study on the centrifugal force-induced stress and displacements in power-law graded hyperbolic discs," *Latin American J. of Solids and Structures*, vol. 15, no 4, pp. e34, 2018.
- [13] C. W. Bert, "Displacements in a Polar-orthotropic disk of varying thickness," *ZAMP Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 14, pp. 101-111, 1963.

- [14] G. Genta and M. Gola, "The stress distribution in orthotropic rotating disks," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, no 3, pp. 559-562, 1981.
- [15] A. W. Leissa and M. Vagins, "The design of orthotropic materials for stress optimization," *International Journal of Solids and Structures*, vol.14, no 6, pp. 517-526, 1978.
- [16] A. N. Eraslan, Y. Kaya and E. Varli, "Analytical solutions to orthotropic variable thickness disk problems," *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, vol. 22, no 1, pp. 24-30, 2016.
- [17] P. Thakur, N. Gupta, M. Sethi and K. Gupta, "Effect of density parameter in a disk made of orthotropic material and rubber," *Journal of Rubber Research*, vol 23, no 3, pp. 193-201, 2020.
- [18] N. Tütüncü and A. Durdu, "Determination of buckling speed for rotating orthotropic disk restrained at outer edge," *AIAA Journal*, vol. 36, no 1, pp. 89-93, 1998.
- [19] N. Tütüncü and M. Öztürk, "Stress redistribution and instability in rotating orthotropic cylinders," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol 23, no 9, pp. 941-950, 2004.
- [20] K. N. Koo, "Vibration analysis and critical speeds of polar orthotropic annular disks in rotation," *Composite Structures*, vol 76, no 1-2, pp. 67-72, 2006.
- [21] U. Güven, A. Çelik and C. Baykara, "On transverse vibrations of functionally graded polar orthotropic rotating solid disk with variable thickness and constant radial stress," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 23, no 12, pp. 1279-1284, 2004.
- [22] A. Ghorbanpour Arani, A. Loghman, A. R. Shajari and S. Amir, "Semi-analytical solution of magneto-thermo-elastic stresses for functionally graded variable thickness rotating disks," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 24, pp. 2107-2118, 2010.
- [23] N. N. Alexandrova and P. M. V. Real, "Singularities in a solution to a rotating orthotropic disk with temperature gradient," *Meccanica*, vol. 41, no 2, pp. 197-205, 2006.
- [24] J. C. Misra and R. M. Achari, "Thermal stresses in orthotropic disk due to rotating heat source," *Journal of Thermal Stresses*, vol 6, no 2-4, pp. 115-123, 1983.
- [25] M. H. Jalali and M. R. Jalali, "Stress analysis of rotating functionally graded polar orthotropic disk under thermomechanical loading," *J. of Vibroengineering*, vol. 22, no 3, pp. 640-656, 2020.
- [26] S. Sharma and K. Maheshwari, "Creep stresses in functionally graded thin rotating orthotropic disk with variable thickness and density," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2061, no 1, pp. 020036, 2019.
- [27] K. Maheshwari and S. Sharma, "Creep stresses in functionally graded thin rotating orthotropic disk with exponentially variable thickness and density," *AIP Conference Proceedings*, vol. 2214, no 1, pp. 020011, 2020.
- [28] T. Dai and H. L. Dai, "Investigation of mechanical behavior for a rotating fgm circular disk with a variable angular speed," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, pp. 3779-3787, 2015.
- [29] A. Motameni, Ö.C. Farukoğlu, İ. Korkut, R. Gürbüz, "Stress field analysis of functionally graded polar orthotropic disk on a rigid inclusion subjected to variable angular velocity," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 38, no 1, pp. 323-332, 2024.
- [30] M.Eker, D. Yarımabaç, K. Çelebi, "Mechanical Behavior of Functionally Graded Pressure Vessels Under the Effect of Poisson's Ratio," *European Mechanical Science*, vol. 2, no 2, pp. 52-59, 2018.
- [31] A. Yıldırım, D. Yarımabaç, K. Çelebi, "Transient thermal stress analysis of functionally graded annular fin with free base", *Journal of Thermal Stresses*, 43(9), 1138-1149, 2020.
- [32] A. Yıldırım, D. Yarımabaç, V. Arıkan, M. Eker, K. Çelebi, "Nonlinear thermal stress analysis of functionally graded spherical pressure vessels", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 200, 104830, 2022.
- [33] F. Durbin, "Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method," *The Computer Journal*, vol. 17, pp. 371- 376, 1974.
- [34] R. Dubner and J. Abate, "Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier Cosine transform," *JACM*, vol. 15, no 1, pp. 115-123, 1968.
- [35] G.V. Narayanan, "Numerical operational methods in structural Dynamics," Minneapolis, University of Minnesota, 1979.
- [36] F.F. Calim, "Free and forced vibration of non-uniform composite beams," *Composite Structures*, vol. 88, pp. 413-423, 2009.
- [37] I. Keles, C. Conker, "Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol 30, no 3, pp. 449-455, 2011.
- [38] V. Yıldırım, "Centrifugal Force-Induced Elastic Field for a Stress-Free Annulus Made of Functionally Graded Polar Orthotropic Material from Circular Plates to Rings," *Athens Journal of Sciences*, Vo 6, no 4, pp. 231-252, 2019