Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 22, Sayı 2, 896-900, 2018

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 22, Issue 2, 896-900, 2018

DOI: 10.19113/sdufbed.74428

Uzaysal Kuaterniyonik Bertrand Eğri Çiftinin Frenet Çatısına Göre $n_1^* w^*$ - Smarandache Eğrisi

Süleyman ŞENYURT[*1], **Ceyda CEVAHİR**[1], **Yasin ALTUN**[1]

[1]Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 52200, Ordu

(Alınış / Received: 08.02.2017, Kabul / Accepted: 07.12.2017, Online Yayınlanma / Published Online: 27.12.2017)

Anahtar Kelimeler
Öklid uzayı,
Bertrand eğri çifti,
Darboux vektörü,
Kuaterniyonik Smarandache eğrisi

Özet: (γ, γ^*) uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti verildiğinde γ^* eğrisine ait Frenet vektörlerinin hareketine bağlı olarak oluşan w^* birim Darboux vektörü ile n_1^* aslinormal vektörü konum vektörü olarak alındığında bu vektörün çizdiği $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(w^* + n_1^*)$ Smarandache eğrisinin, Frenet vektörleri, eğriliği ve burulması hesaplandı. Daha sonra bulunan bu eğrilik ve burulma uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğrisine bağlı olarak ifade edildi. Konuya örnek verilip Maple programıyla çizimi yapıldı.

$n_1^* w^*$ - Smarandache Curve According to Frenet Frame of Spatial Quaternionic Bertrand Pair Curves

Keywords
Euclidean space,
Bertrand pair curve,
Darboux vector,
Quaternionic Smarandache curve

Abstract: In this study, we obtain Frenet vectors and curvatures of Smarandache curve, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(w^* + n_1^*)$, which forms in such a way that when we are given a spatial quaternionic Bertrand curve pair, (γ, γ^*) then the curve draws a new curve generated by the motion of its unit Darboux vector w^* and its normal vector n_1^*. The curvature and torsion which are found later are expressed depending on the spatial quaternionic Betrand curve. The subject was given an example and the drawing was made with Maple program.

1. Giriş

Kuaterniyon (dördey, dördübir) kavramı ilk kez İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında kompleks sayıların genelleştirmesiyle ortaya çıkmıştır. Her bir kuaterniyona $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ gibi dört birim eşlik etmektedir. 1987 yılında, Bharathi, K. ve Nagaraj, M., *"Quaternion Valued Function of A Real Variable Serret-Frenet Formulae"* adlı çalışmasında uzaysal kuaterniyonik bir eğrinin Serret-Frenet formüllerini hesaplamışlardır, [6]. Bu makale kuaterniyonlarla ilgili birçok çalışmaya ışık tutmuştur. Karadağ, M. ve Sivridağ, A. I., $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ deki kuaterniyonik eğriler için eğilim çizgisi ve harmonik eğrilik kavramlarını vermişlerdir, [4]. Öklid uzayında ve yarı Öklid uzayında alınan kuaterniyonik Bertrand eğri çifti ve kuterniyonik eğriler için Serret Frenet formülleri ve onlara ait teoriler, [1], [5] ve [12], nolu kaynaklarda hesaplanmıştır.
Turgut, M. ve Yılmaz, S., Minkowski uzayında bir eğrinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak alındığında bu vektörlerin çizmiş olduğu regüler eğrileri Smarandache eğrisi olarak tanımlamışlardır, [9]. Ali, A. T., bu çalışmadan yola çıkarak Öklid uzayında bir eğrinin Frenet çatısına göre Smarandache eğrilerinin Frenet aparatlarını hesaplamıştır, [8]. Şenyurt, S. ve Sivas, S. Öklid uzayında bir eğrinin asli normal vektörü ile Darboux vektörünü konum vektörü alarak elde edilen Smarandache eğrisinin eğriliklerini hesaplamışlardır, [11]. Parlatıcı H., kuaterniyonik eğrilerin Bishop çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemiştir, [2]. Son olarak, Şenyurt S. ve Çalışkan A.S., eğriyi uzaysal kuaterniyonik bir eğri alarak bu eğrinin Smarandache eğrilerinin eğriliğini ve burulmasını hesaplamışlardır, [3].

2. Materyal ve Metot

$$\mathbb{Q} = \{q \mid q = d + ae_1 + be_2 + ce_3, d, a, b, c \in \mathbb{R}, e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3\}$$

cümlesine bir kuaterniyon denir. Burada

$$\begin{aligned} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 &= -1, \\ e_1 \times e_2 = -e_2 \times e_1 &= e_3, \\ e_1 \times e_3 = -e_3 \times e_1 &= e_2, \\ e_2 \times e_3 = -e_3 \times e_2 &= e_1 \end{aligned} \quad (1)$$

şeklinde verilir. Bir $q \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunda $S_q = d$ ve $V_q = ae_1 + be_2 + ce_3$ alınırsa

$$q = S_q + V_q \quad (2)$$

şeklinde yazılır, [10]. $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$ $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$ kuaterniyonu için kuaterniyonik toplama, kuaterniyonik çarpma

[*] *İlgili yazar: senyurtsuleyman@hotmail.com*

ve kuaterniyonik eşlenik işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} q_1+q_2 &= S_{q_1}+V_{q_1}+S_{q_2}+V_{q_2} \\ &= S_{q_1+q_2}+V_{q_1+q_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} q_1\times q_2 &= S_{q_1}S_{q_2}-\langle V_{q_1},V_{q_2}\rangle+S_{q_1}V_{q_2} \\ &\quad +S_{q_2}V_{q_1}+V_{q_1}\wedge V_{q_2}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\bar{q} = S_{q_1}-V_{q_1} \tag{5}$$

şeklinde verilir. Burada $\langle\rangle$ ve $\wedge$ sırasıyla iç çarpım ve vektörel çarpımdır. $q_1,q_2\in\mathbb{Q}$ reel kuaterniyonları için

$$\begin{aligned} &\langle,\rangle|_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R}, \\ &\langle q_1,q_2\rangle|_{\mathbb{Q}}=\frac{1}{2}(q_1\times\bar{q}_2+q_2\times\bar{q}_1) \end{aligned} \tag{6}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona kuaterniyonik iç çarpım denir. $q\in\mathbb{Q}$ kuaterniyonunun normu

$$N(q)=\sqrt{q\times\bar{q}} \tag{7}$$

şeklinde verilir, [10]. $\mathbb{Q}_H=\{q:q+\bar{q}=0\}$ cümlesine uzaysal kuaterniyonların cümlesi,

$$\begin{aligned} &\gamma:[0,1]\to\mathbb{Q}_H, \\ &\gamma(s)=\sum_{i=1}^{3}\gamma_i(s)e_i,\ (1\le i\le 3) \end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde tanımlanan eğriye uzaysal kuaterniyonik eğri denir, [6].

Teorem 2.1. *$\gamma:[0,1]\to\mathbb{Q}_H$ eğrisi yay parametresi ile verilirse Frenet vektörleri*

$$t(s)=\gamma'(s),\ \ n_1(s)=\frac{\gamma''(s)}{N(\gamma''(s))},\ \ n_2(s)=t(s)\times n_1(s) \tag{9}$$

şeklinde verilir, [4].

Teorem 2.2. *$\gamma:[0,1]\to\mathbb{Q}_H$, uzaysal kuaterniyonik eğrisine ait Frenet formülleri;*

$$\begin{cases} t'(s)=k(s)n_1(s) \\ n_1{}'(s)=-k(s)t(s)+r(s)n_2(s) \\ n_2{}'(s)=-r(s)n_1(s) \end{cases} \tag{10}$$

bağıntısı ile verilir, [4].

$\gamma:I\to\mathbb{Q}_H$ uzaysal kuaterniyonik eğrisinin $\{t(s),n_1(s),n_2(s)\}$ Frenet çatısı her s anında bir eksen etrafında belli bir açısal hızla hareket eder. Bu eksene uzaysal kuaterniyonik eğrisinin ani dönme ekseni (Darboux ekseni) denir. Darboux ekseni yönündeki vektör D ile gösterilirse

$$D=r(s)t(s)+k(s)n_2(s) \tag{11}$$

bulunur. Burada k ve r sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır. D ile n_2 arasındaki açı α ile gösterilirse

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{k(s)}{\sqrt{k(s)^2+r(s)^2}} \\ \sin\alpha=\dfrac{r(s)}{\sqrt{k(s)^2+r(s)^2}} \end{cases} \tag{12}$$

şeklindedir. D yönündeki birim vektör w ile gösterilirse

$$w=\sin\alpha t(s)+\cos\alpha n_2(s) \tag{13}$$

olur, [3].

Tanım 2.3. $\gamma:I\to\mathbb{Q}_H$ ve $\gamma^*:I\to\mathbb{Q}_H$ diferensiyellenebilir uzaysal kuaterniyonik eğrilerin aslinormal vektörleri lineer bağımlı ise (γ,γ^*) ikilisine bir uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti denir, [1].

Teorem 2.4. *(γ,γ^*) kuaterniyonik Bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktalarındaki teğet vektörleri arasındaki açı sabittir. γ eğrisinin aslinormal vektörü $n_1(s)$ ile gösterilirse bu iki eğri arasında*

$$\gamma^*(s)=\gamma(s)+\lambda n_1(s),\ \lambda=sbt \tag{14}$$

bağıntısı vardır.

(γ,γ^*) kuaterniyonik Bertrand eğri çiftinin karşılıkları noktalarındaki teğet vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması arasında

$$\begin{cases} t^*(s)=\cos\theta t(s)+\sin\theta n_2(s) \\ n_1{}^*(s)=n_1(s) \\ n_2{}^*(s)=-\sin\theta t(s)+\cos\theta n_2(s) \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} k^*(s)\dfrac{ds^*}{ds}=\cos\theta k(s)-\sin\theta r(s) \\ r^*(s)\dfrac{ds^*}{ds}=\sin\theta k(s)+\cos\theta r(s) \end{cases} \tag{16}$$

bağıntıları vardır, [1].

3. Bulgular

Bu çalışmada, (γ,γ^*) Bertrand eğri çifti verildiğinde, γ^* eğrisinin $n_1{}^*$ asli normal vektörü ile w^* birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen yeni vektörün çizdiği regüler Smarandache eğrisi tanımlanmıştır. Sonra bu eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplanarak γ eğrisinin eğriliklerine bağlı olarak karşılıkları yazılmıştır. Konu ile ilgili örnek verilip Maple programı ile çizimi yapılmıştır.

Tanım 3.1. (γ,γ^*) uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti ve γ^* eğrisinin Frenet çatısı $\{t^*(s),n_1{}^*(s),n_2{}^*(s)\}$ olsun.

$$\beta(s)=\beta_{n_1{}^*w^*}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(n_1{}^*(s)+w^*(s)\right) \tag{17}$$

vektörünün çizdiği regüler eğriye $n_1{}^*w^*$- uzaysal kuaterniyonik Smarandache eğrisi denir.

Bu tanımda $w^*(s)$ ifadesini (13) ye benzer şekilde ifade edip yerine yazılırsa β eğrisinin $\{t^*(s),n_1{}^*(s),n_2{}^*(s)\}$ çatısına göre ifadesi

$$\beta(s)=\frac{\left(\sin\alpha^*t^*(s)+n_1{}^*(s)+\cos\alpha^*n_2{}^*(s)\right)}{\sqrt{2}} \tag{18}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.2. *$n_1{}^* w^*$- Smarandache eğrisinin Frenet vektörleri*

$$t_\beta(s) = \frac{(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s))t^*(s) + \left(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*\right)n_2{}^*(s)}{\sqrt{(\alpha^{*'})^2 + N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*)}},$$

$$n_{1\beta}(s) = \frac{\omega t^*(s) + \phi n_1{}^*(s) + \sigma n_2{}^*(s)}{\sqrt{\omega^2+\phi^2+\sigma^2}},$$

$$n_{2\beta}(s) = \frac{\phi(\alpha^{*'} \sin\alpha^* - r^*(s))}{\sqrt{\left((\alpha^{*'})^2 + N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*)\right)(\omega^2+\phi^2+\sigma^2)}} t^*(s)$$

$$+ \frac{\omega(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*) - \sigma(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s))}{\sqrt{(\alpha^{*'})^2 + N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*)}} n_1{}^*(s)$$

$$+ \frac{\phi(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s))}{\sqrt{\left((\alpha^{*'})^2 + N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*)\right)(\omega^2+\phi^2+\sigma^2)}} n_2{}^*(s) \tag{19}$$

şeklinde verilir. Burada ω, ϕ ve σ

$$\begin{cases} \omega = \left(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s)\right)' \left(N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*) + (\alpha^{*'})^2\right) \\ \quad \left(N(D^*)N(D^*)' - \alpha^{*''}N(D^*) - \alpha^{*'} - \left(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s)\right) \right. \\ \quad \left. N(D^*)' + (\alpha^{*'})(\alpha^{*''})\right) \\ \phi = \left(N(D^*)^2 + \alpha^{*'}N(D^*)\right)\left(N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*) + (\alpha^{*'})^2\right) \\ \sigma = \left(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*\right)' \left(N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*) + (\alpha^{*'})^2\right) \\ \quad -\left(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*\right)\left(N(D^*)N(D^*)' - \alpha^{*''}N(D^*) - \alpha^{*'} \right. \\ \quad \left. N(D^*)' + (\alpha^{*'})(\alpha^{*''})\right) \end{cases} \tag{20}$$

birer katsayıdır.

İspat. $\beta(s)$ eğrisinin s_β yay parametresine göre türevi alınırsa $t_\beta(s)$ ve $t'_\beta(s)$ sırasıyla

$$t_\beta(s) = \frac{(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s))t^*(s) + \left(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*\right)n_2{}^*(s)}{\sqrt{(\alpha^{*'})^2 + N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*)}} \tag{21}$$

$$t'_\beta(s) = \sqrt{2}\frac{\left(\omega t^*(s) + \phi n_1{}^*(s) + \sigma n_2{}^*(s)\right)}{\left(N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*) + (\alpha^{*'})^2\right)^2} \tag{22}$$

olur. Burada ω, ϕ ve σ katsayıları (20) bağıntısında verilmiştir. (9) bağıntısından gerekli işlemler yapıldığında $n_{1\beta}$ aslinormal vektörü ve $n_{2\beta}$ binormal vektörünün Bertrand partner eğrisine bağlı ifadeleri (19) deki gibidir.

Teorem 3.3. *$n_1{}^* w^*$- Smarandache eğrisinin eğrilik ve burulması sırasıyla*

$$k_\beta(s) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\omega^2+\phi^2+\sigma^2}}{\left((\alpha^{*'})^2 + N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*)\right)^2}, \tag{23}$$

$$r_\beta(s) = \sqrt{2}\frac{\eta\varepsilon + \xi\vartheta + \rho\psi}{\varepsilon^2+\vartheta^2+\psi^2}$$

şeklinde verilir. Burada η, ξ, ρ, ε, ϑ ve ψ

$$\begin{cases} \eta = (\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s))'' + k^*N(D^*)^2 - k^*(s)\alpha^{*'}N(D^*) \\ \xi = k^*(s)(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s))' + (-N(D^*)^2 + \alpha^{*'}N(D^*))' \\ \quad -r^*(s)\left(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*\right)' \\ \rho = -r^*(s)N(D^*)^2 + r^*(s)\alpha^{*'}N(D^* + (r^*(s) -)'' - \alpha^{*'} \sin\alpha^*)'' \\ \varepsilon = -(-N(D^*)^2 + \alpha^{*'}N(D^*))(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*) \\ \vartheta = -\left[(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s))(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*)' \right. \\ \quad \left. + (\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s))'(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*)\right] \\ \psi = (\alpha^{*'} - k^*(s))(-N(D^*)^2 + \alpha^{*'}N(D^*)) \end{cases} \tag{24}$$

birer katsayıdır.

İspat. β eğrisinin eğriliği k_β ile gösterilirse

$$k_\beta(s) = N\left(t'_\beta(s)\right) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\omega^2+\phi^2+\sigma^2}}{\left((\alpha^{*'})^2 + N(D^*)^2 - 2\alpha^{*'}N(D^*)\right)^2} \tag{25}$$

olur. β eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \beta''(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha^{*'} \cos\alpha^* - k^*(s)\right)' t^*(s) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-N(D^*)^2 + \alpha^{*'}N(D^*)\right)n_1{}^*(s) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(r^*(s) - \alpha^{*'} \sin\alpha^*\right)' n_2{}^*(s) \end{aligned}$$

ve

$$\beta'''(s) = \frac{\eta t^* + \xi n_1{}^* + \rho n_1{}^*}{\sqrt{2}}$$

şeklinde olur. Burada η, ξ, ρ ifadeleri (24) da verilen katsayılardır. β eğrisinin burulması r_β ile gösterilirse

$$r_\beta(s) = \frac{\langle \beta' \times \beta'', \beta'''\rangle|_{\mathbb{Q}}}{\left(N(\beta' \times \beta'')\right)^2} = \sqrt{2}\frac{\eta\varepsilon + \theta\vartheta + \rho\psi}{\varepsilon^2+\vartheta^2+\psi^2} \tag{26}$$

şeklinde elde edilir. Burada ε, ϑ, ψ ifadeleri (24) verilen katsayılardır.

Sonuç 3.4. *(γ,γ^*) uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. $n_1{}^* w^*$-Smarandache eğrisinin Frenet vektörlerinin γ eğrisinin Frenet elemanlarına bağlı ifadeleri sırasıyla*

$$t_\beta(s) = \frac{\left(-k(s) + \alpha' \cos\alpha\right)t(s) + \left(r(s) - \alpha' \sin\alpha\right)n_2}{\sqrt{(\alpha')^2 - 2\alpha' N(D) + N(D)^2}},$$

$$n_{1\beta}(s) = \frac{(\bar{\omega}\cos\theta + \bar{\sigma}\sin\theta)t(s) + \bar{\phi}n_1(s) + \left(-\bar{\omega}\sin\theta + \bar{\sigma}\cos\theta\right)n_2(s)}{\sqrt{\bar{\omega}^2+\bar{\phi}^2+\bar{\sigma}^2}},$$

$$n_{2\beta}(s) = \frac{\bar{\phi}[-2k(s)\sin\theta\cos\theta + r(s)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \alpha'\sin(\alpha+2\theta)]}{\sqrt{\left((\alpha')^2 + N(D)^2 - 2\alpha' N(D)\right)(\bar{\omega}^2+\bar{\phi}^2+\bar{\sigma}^2)}} t(s)$$

$$+ \frac{\bar{\omega}[(k(s)\sin\theta + r(s)\cos\theta - \alpha'\sin(\alpha+\theta))]}{\sqrt{\left((\alpha')^2 + N(D)^2 - 2\alpha' N(D)\right)(\bar{\omega}^2+\bar{\phi}^2+\bar{\sigma}^2)}} n_1(s)$$

$$+ \frac{\bar{\phi}[k(s)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + 2r(s)\sin\theta\cos\theta + \alpha'\cos(\alpha+2\theta)]}{\sqrt{\left((\alpha')^2 + N(D)^2 - 2\alpha' N(D)\right)(\bar{\omega}^2+\bar{\phi}^2+\bar{\sigma}^2)}} n_2(s) \tag{27}$$

şeklindedir. Burada $\bar{\omega}$, $\bar{\phi}$ ve $\bar{\sigma}$

$$\begin{cases} \bar{\omega} = \big(-k(s)\cos\theta + r(s)\sin\theta + \alpha'\cos(\alpha+\theta)\big)'\big(N(D)^2 \\ \quad -2\alpha' N(D) + (\alpha')^2\big) - \big(-k(s)\cos\theta + r\sin\theta + \alpha' \\ \quad \cos(\alpha+\theta)\big)\big(N(D)N(D)' - \alpha'' N(D) - \alpha' N(D)' \\ \quad +(\alpha')(\alpha'')\big) \\ \bar{\phi} = \big[N(D)^2 + \alpha' N(D)\big]\big(N(D)^2 - 2\alpha' N(D) + (\alpha')^2\big) \\ \bar{\sigma} = \big(-k(s)\sin\theta + r(s)\cos\theta + \alpha'\sin(\alpha+\theta)\big)'\big(N(D)^2 \\ \quad -2\alpha' N(D) + (\alpha')^2\big) - \big(-k(s)\sin\theta + r(s)\cos\theta + \alpha' \\ \quad \sin(\alpha+\theta)\big)\big(N(D)N(D)' - \alpha'' N(D) - \alpha' N(D)' \\ \quad +(\alpha')(\alpha'')\big) \end{cases} \tag{28}$$

birer katsayıdır.

İspat. Darboux vektörü tanımından

$$D^* = {n_1}^*(s) \wedge {n_1}^{*'}(s) = r^*(s)t^*(s) + k^*(s){n_2}^*(s)$$

Burada $r^*(s), k^*(s), t^*(s)$ ve ${n_2}^*(s)$ nin yerine karşılıkları yazılıp normu alınırsa

$$N(D^*) = \sqrt{k(s)^2 + r(s)^2} = N(D) \tag{29}$$

bulunur. (12) e benzer olarak

$$\begin{aligned} \cos\alpha^* &= \frac{k^*(s)}{N(D^*)} \\ &= \cos\theta\frac{k(s)}{N(D)} - \sin\theta\frac{r(s)}{N(D)} \\ &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \\ &= \cos(\theta+\alpha) \end{aligned} \tag{30}$$

ve

$$\begin{aligned} \sin\alpha^* &= \frac{r^*(s)}{N(D^*)} \\ &= \sin\theta\frac{k(s)}{N(D)} + \cos\theta\frac{r(s)}{N(D)} \\ &= \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha \\ &= \sin(\theta+\alpha) \end{aligned} \tag{31}$$

olur. β eğrisinde (15), (30) ve (31) den karşılıkları yazılırsa uzaysal kuaterniyonik eğrinin Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sin\alpha t(s) + n_1(s) + \cos\alpha n_2(s)\Big) \tag{32}$$

şeklinde olur. (19) ve (20) ifadelerinde (15), (16) deki karşılıkları yerlerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5. *(γ,γ^*) uzaysal kuaterniyonik Bertrand eğri çifti olsun. ${n_1}^* w^*$-Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunun γ eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadeleri*

$$\begin{aligned} k_\beta(s) &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\bar{\omega}^2 + \bar{\phi}^2 + \bar{\sigma}^2}}{\big((\alpha')^2 + N(D)^2 - 2\alpha' N(D)\big)^2}, \\ r_\beta(s) &= \sqrt{2}\frac{\bar{\eta}\bar{\varepsilon} + \bar{\xi}\bar{\vartheta} + \bar{\rho}\bar{\psi}}{\bar{\varepsilon}^2 + \bar{\vartheta}^2 + \bar{\psi}^2} \end{aligned} \tag{33}$$

şeklinde verilir. Burada $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\vartheta}$ ve $\bar{\psi}$

$$\begin{cases} \bar{\eta} = (\alpha'\cos(\alpha+\theta) - k(s)\cos\theta + r\sin\theta)'' + (k(s)\cos\theta \\ \quad -r(s)\sin\theta)N(D)^2 - (k(s)\cos\theta - r(s)\sin\theta)\alpha' N(D) \\ \bar{\xi} = (k(s)\cos\theta - r(s)\sin\theta)(\alpha'\cos(\alpha+\theta) - k(s)\cos\theta \\ \quad -r(s)\sin\theta)' + (-N(D)^2 + \alpha' N(D))' - (k(s)\cos\theta \\ \quad -r(s)\sin\theta).(k(s)\cos\theta - r(s)\sin\theta - \alpha'\sin(\alpha+\theta))' \\ \bar{\rho} = (-k(s)\cos\theta - r\sin\theta)N(D)^2 + (k(s)\cos\theta + r(s)\sin\theta) \\ \quad \alpha' N(D) + (k(s)\cos\theta + r(s)\sin\theta - \alpha'\sin(\alpha+\theta))'' \\ \bar{\varepsilon} = (-N(D)^2 + \alpha' N(D))(k(s)\sin\theta + r(s)\cos\theta \\ \quad -\alpha'\sin(\alpha+\theta)) \\ \bar{\vartheta} = -\Big[(\alpha'\cos(\alpha+\theta) - k(s)\cos\theta + r(s)\sin\theta)(k(s)\cos\theta \\ \quad +r(s)\sin\theta - \alpha'\sin(\alpha+\theta))' + (\alpha'\cos(\alpha+\theta) - k(s)\cos\theta \\ \quad +r(s)\sin\theta)'(k(s)\sin\theta + r(s)\cos\theta - \alpha'\sin(\alpha+\theta))\Big] \\ \bar{\psi} = (\alpha'\cos(\alpha+\theta) - k(s)\cos\theta + r\sin\theta)(-N(D)^2 \\ \quad +\alpha' N(D)) \end{cases} \tag{34}$$

birer katsayıdır.

İspat. (23) ve (24) ifadelerinde (15) ve (16) deki karşılıkları yazılırsa β eğrisinin k_β eğriliği ve r_β burulmasının Bertrand eğrisine bağlı ifadeleri bulunup ispat tamamlanır.

Örnek. $\gamma : I \to E^3$ birim hızlı eğrisini

$$\gamma(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}s\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}s\right), \frac{-2\sqrt{5}}{5}s, \frac{-\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}s\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}s\right)\right)$$

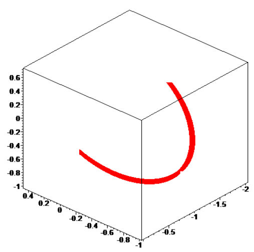
şeklinde alalım. Bu eğriye ait Bertrand partner eğrisi $\lambda = 1$ olması durumda

$$\gamma^*(s) = \left(0, \frac{-2\sqrt{5}}{5}s, 0\right)$$

şeklinde olur. Bu eğrinin Frenet vektörlerine ait $n_1^* w^*$-Smarandache eğrisi

$$\beta_{n_1^* w^*}(s) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}s\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}s\right), -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}s\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}s\right)\right)$$

olup bu eğriye ait Maple çizimi aşağıdaki gibidir;



Şekil 1. $n_1^* w^*$-Smarandache eğrisi

Kaynakça

[1] Keçilioğlu, O., and İlarslan, K. 2013. "Quaternionic Bertrand Curves In Euclidean 4-Space", Bulletin Of Mathematical Analysis And Applications, 5(3), 27-38.

[2] Parlatıcı, H. 2013."Kuaterniyonik Smarandache Eğrileri", Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi.

[3] Şenyurt S. and Çalışkan A.S. 2015. "An Application According to Spatial Quaternionic Smarandache Curve", Applied Mathematical Sciences, 9(5), 219-228.

[4] Karadağ, M. ve Sivridağ, A. I. 1997. "Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri", Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, 13(1-2), 23-36.

[5] Demir, S. ve Özdaş, K. 2005. "Reel Kuaterniyonlarla Serret-Frenet Formülleri", Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9(3),1-7.

[6] Bharathi, K., and Nagaraj, M. 1987. "Quaternion Valued Function Of A Real Variable Serret-Frenet Formula", Indian Journal Of Pure And Applied Mathematics, 18(6), 507-511.

[7] Erişir, T. and Güngör, M. A. 2014. "Some Characterizations of Quaternionic Rectifying Curves in the Semi-Euclidean Space E_2^4 ", Honam Mathematical J., 36(1), 67-83.

[8] Ali, A. T. 2010. "Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, International Journal of Mathematical Combinatorics", 2, 30-36.

[9] Turgut, M., and Yılmaz, S. 2008. "Smarandache Curves in Minkowski Spacetime", International Journal of Mathematical Combinatorics", 3, 51-55.

[10] Hacısalihoğlu, H. H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Yayınları.

[11] Şenyurt, S. ve Sivas, S. 2013. "Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama", Ordu Üniversitesi, Bilim ve Teknoloji Dergisi, 3(1), 46-60.

[12] Tuna, A. 2002. "Yarı Öklid Uzayındaki Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri", Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Süleyman Demirel Üniversitesi.