Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 30, Sayı 1, 158-167, 2026

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 30, Issue 1, 158-167, 2026

DOI: 10.19113/sdufenbed.1799868

Çoklu Üyelik Değerlerinin İşlendiği Belirsizlik Ortamlarına Yönelik Sanal Bulanık Parametreli Esnek Kümeler Üzerine Dayanan Yeni Bir Yaklaşım

Orhan DALKILIÇ[*1]

[1]Bingöl Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 1200, Bingöl, Türkiye

(Alınış / Received: 08.10.2025, Kabul / Accepted: 31.03.2026, Online Yayınlanma / Published Online: 24.04.2026)

Anahtar Kelimeler
Sanal bulanık parametreli esnek küme,
Parametre önem ağırlıkları,
Algoritma,
Karar verme.

Öz: İnsanların ihtiyaçlarının artmaya ve çeşitlenmeye başladığı günümüzde birçok yeni belirsizlik ortamında veri işlemeye yönelik ihtiyaçlarda meydana gelmiştir. Bu belirsizlik ortamlarından biri de birden fazla üyelik değerinin işlenmesi gerektiği karar verme süreçleridir. Bu amaca yönelik yapılandırılan sanal bulanık parametreli esnek kümelere odaklanan bu çalışmada yeni bir karar verme algoritması önerilmiştir. Bu algoritmada karmaşık veri analizinde oluşabilecek olası hataların önüne geçmek için bazı yalın temsiller verilmiştir. Ardından, parametre önem ağırlıkları da dikkate alınarak daha iyi bir yaklaşım inşa edilmeye çalışılmıştır. Ayrıca, bu algoritmik yaklaşım sayesinde parametre önem ağırlıklarının nesneler üzerindeki etkisi farklı bulanık değerler için değerlendirilebilir. Bunlara ilaveten, inşa edilen algoritmanın en önemli avantajı karşılaşılan belirsizlik ortamı için en ideal sanal bulanık parametreli esnek kümenin tespitine yönelik adımların mevcudiyetidir. Son olarak önerilen algoritma için elde edilen sonuçlar irdelenerek bir tartışmaya yer verilmiştir.

A Novel Approach Based on Virtual Fuzzy Parameterized Soft Sets for Uncertainty Environments Where Multiple Membership Values are Processed

Keywords
Virtual fuzzy parameterized soft set,
Parameter importance weights,
Algorithm,
Decision making

Abstract: Today, when people's needs have begun to increase and diversify, the need for data processing has occurred in many new uncertainties. One of these uncertain environments is the decision-making process where more than one membership value must be processed. In this paper, which focuses on virtual fuzzy parameterized soft sets structured for this purpose, a new decision-making algorithm is proposed. In this algorithm, some simple representations are given to avoid possible errors that may occur in complex data analysis. Then, a better approach has been tried to be built by taking into account the parameter importance weights. In addition, thanks to this algorithmic approach, the effect of parameter importance weights on objects can be evaluated for different fuzzy values. Moreover, the most important advantage of the constructed algorithm is the availability of steps to determine the most ideal virtual fuzzy parameterized soft set for the uncertainty environment encountered. Finally, the results obtained for the proposed algorithm are examined and a discussion is given.

1. Giriş

Belirsizlik ortamlarında yönetilmesi gereken karar verme süreçlerinin en doğru şekilde tasarlanabilmesi gereklidir. Karar verme süreçlerinde karşılaşılan genel belirsizlik problemlerinin yanı sıra literatürde ağırlıklı olarak çalışılan merkezi seçim problemleri [9], tedarikçi seçim problemleri [10-12] gibi belirsizlik ortamları da mevcuttur. Karşılaşılan bu tip belirsizlik problemleri, dikkat edilmelidir ki insan merkezcildir ve bu durum belirsizliği daha karmaşık bir hale getirebilmektedir. Çünkü insan sosyal bir varlıktır ve karar verme sürecinde birçok farklı değişkene bağımlıdır. Bu değişkenlerin ifade edilmesi çoğu zaman karar vericiye odaklanır. Bu yüzden, karar vericiler tarafından oluşabilen olası bir hatanın önüne geçebilmek için literatüre birçok matematiksel model kazandırılmıştır. Bu anlamda ortaya atılan ilk önemli matematiksel modellerden biri bulanık küme teorisidir [1]. Bu kümeler belirsizliğin doğru bir şekilde ifade edilmesindeki en önemli engellerden biri olarak kabul edilen klasik matematikten uzaklaşmamızı sağlamıştır. Klasik matematikte ifade edilen bir elmanın kümeye aidiyeti (üyelik derecesi) 0

Sorumlu Yazar: odalkilic@bingol.edu.tr

ya da 1 iken bulanık kümeler de üyelik derecesi [0,1] aralığındadır. İlerleyen yıllarda bir diğer önemli model olan kaba kümeler önerilmiştir [2]. Pawlak tarafından önerilen kaba kümeler, denklik ilişkilerinden faydalanarak tanımlanmıştır. Ancak belirsizliğin giderilmesine yönelik ortaya atılan bu matematiksel modeller, karşılaşılan problemi tam olarak ifade etmede yetersiz kalmışlardır. Bu durumun nedeninin bir parametreleme aracının eksikliğinden kaynaklandığını düşünen Molodtsov [3], esnek kümeleri önermiştir. Bu küme tipinde bir parametre kümesi ve bu parametrelerle ilişkili evrensel bir nesne kümesi mevcuttur. Böylece, parametrelere karşılık gelen nesneleri ifade eden bir yaklaşım fonksiyonu sayesinde diğer matematiksel modellerden daha kapsamlı bir şekilde karşılaşılan belirsizlik durumu ifade edilebilmiştir. Esnek kümelerin bu avantajlı durumu oldukça dikkat çekicidir ve bu nedenle birçok araştırmacı oyun teorisi, ölçüm teorisi, Riemann integrasyonu gibi pek çok alanda esnek kümeleri kullanmışlardır [20-23].

Günümüzde bulanık küme ve esnek kümelerden faydalanılarak birçok hibrit küme tipi inşa edilmiştir [17-19,28]. Bu konuda özellikle esnek küme yapısı için parametreleme aracı üzerine yapılan katkılar oldukça faydalı bir karar verme sürecinin inşa edilebilmesinde faydalı olmuştur. Bu küme modellerinden biri olan bulanık parametreli esnek kümeler Çağman ve ark. [4] tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bulanık parametreli esnek kümelerin, esnek kümelerden farkı parametre üyelik derecelerinin bulanık değerli olmasıdır. Böylece (0,1) aralığında üyelik derecesine sahip olan bir parametreye karşılık gelen nesnelerin ifade edilebilmesi de sağlanır. Ancak üyelik derecelerinin ifade edilme işi karar vericiye odaklanmıştır. Bu ciddi bir problemdir. Çünkü (0,1) aralığında bir üyelik derecesinin doğru bir şekilde tespit edebilmek bu aralıkta çok sayıda rasyonel sayı olduğundan oldukça zor bir iştir. Bu problemin çözümüne yönelik sanal bulanık parametreli esnek kümeler önerilmiştir [5]. Bu küme yapısı bulanık parametreli esnek kümelerin bir genellemesidir. Sanal bulanık parametreli esnek kümeler yardımıyla belirsizlik durumlarını ifade etmede ve en ideale yakın çözümlerin elde edilmesinde diğer küme teorilerinden [4, 13, 17-19] farklı olarak, parametreleme aracındaki üyelik derecelerinin doğru bir şekilde tespiti amacıyla alt ve üst yaklaşım fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu nedenle araştırmacılar tarafından oldukça dikkat çekici bulunarak günümüzde üzerine birçok çalışma yapılmıştır [24-27].

Karar verme süreçlerinin oldukça karmaşık bir süreç olduğu birden fazla üyelik değerinin işlenmesi gerektiği belirsizlik ortamları günümüzde yeni karşılaşılan belirsizlik ortamlarından biridir. Bu durum, hem teorik hem de uygulamalı alanlarda karar verme mekanizmalarının daha esnek, güvenilir ve yorumlanabilir modellerle desteklenmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır. Sanal bulanık parametreli esnek kümeler bu gereksinimi karşılayabilecek güçlü bir matematiksel çerçeve sunmaktadır. Bu model, özellikle mühendislik, ekonomi, sağlık, yapay zekâ tabanlı karar destek sistemleri ve veri analizi gibi çok kriterli karar verme süreçlerinde kullanılma potansiyeline sahiptir. Böylece, farklı belirsizlik koşullarında daha tutarlı ve esnek sonuçlar elde edilmesine olanak tanır. Bu belirsizlik ortamlarını ifade edebilmede oldukça başarılı alt ve üst yaklaşımları bünyesinde bulunduran sanal bulanık parametreli esnek kümeler başarılı bir matematiksel modeldir. Bu anlamda bu çalışma sanal bulanık parametreli esnek kümeler üzerine odaklanmıştır. Bu matematiksel modeli özellikle birden fazla üyelik değerine odaklanan belirsizlik problemlerinin çözümü konusunda tercih etmenin bazı önemli nedenleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

- Bu alanlarda karşılaşılan belirsizlikler insan faktörünün etkisinden dolayı oldukça değişkendir. Bu nedenle karar vericilerin karar verme süreçlerinde bazı esnek hallerde nesnelerin değişimini gözlemlemesine olanak tanır.
- Karar vericiler tarafından olası bir hatanın önüne geçmek için alt ve üst yaklaşımlardan faydalanılır.

Bu çalışmada sanal bulanık parametreli esnek kümelere dayanan yeni bir karar verme algoritması inşa edilmiştir. Bu algoritmanın inşası için bazı teknik formülasyonlar tanıtılmıştır. Ayrıca karar verme algoritmasında parametre önem ağırlıkları dikkate alınarak daha başarılı bir yaklaşım oluşturulmaya çalışılmıştır. Önerilen yaklaşımın literatürdeki diğer algoritmalardan en üstün ve yenilikçi yönü karşılaşılan belirsizlik problemini en doğru şekilde ifade edebilen sanal bulanık parametreli esnek kümenin tespitini yapabilecek esneklikte tasarlanmış olmasıdır. Ayrıca, bu algoritmanın mevcut yaklaşımlardan en üstün taraflarını ifade eden bir tartışmaya yer verilmiştir. Bunlara ilaveten önerilen algoritmanın bir belirsizlik probleminde nasıl uygulanabileceği örneklendirilmiştir.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde bulanık kümeler, esnek kümeler, bulanık parametreli esnek kümeler ve sanal bulanık parametreli esnek kümeler yeniden ele alınmıştır. Ayrıca, sonraki bölümlerde sunulacak tanımlar ve formülasyonlara bir temel oluşturmak amacıyla bazı temel küme işlemlerine yer verilmiştir.

Bu çalışma boyunca $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bir parametre kümesini $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ bir başlangıç evrenini ve $P(U)$ ise U'nun kuvvet kümesini ifade etmektedir.

Burada bulanık kümeler belirsizliklerin modellenmesine imkân tanırken, esnek kümeler parametreleme aracılığıyla karar süreçlerine esneklik kazandırmaktadır. Bulanık parametreli esnek kümeler ise her iki özelliği birleştirerek daha karmaşık belirsizliklerin ifade edilebilmesine olanak sağlamaktadır. Sanal bulanık parametreli esnek kümeler ise, üyelik derecelerinin belirlenmesindeki sınırlılıkları gidermeye yönelik geliştirilmiş bir genişlemedir. Bu katmanlı kuramsal çerçeve, önerilen yaklaşımın sağlam bir matematiksel temele dayandırılmasını sağlamakta ve özellikle parametre önem ağırlıkları ile yaklaşım fonksiyonlarının entegrasyonunun karar verme problemlerinde sunduğu avantajları ortaya koymaktadır.

Tanım 2.1. $\mu_X: U \to [0,1]$ eşleşmesi için

$$X = \left\{\frac{\mu_X(u)}{u} : u \in U\right\} \quad (1)$$

kümesi U başlangıç evreni üzerinde tanımlı bir bulanık kümedir [1]. Burada $\mu_X(u)$ değeri, u elemanının X kümesine ait olma derecesini (üyelik derecesini) göstermektedir.

Bu çalışma boyunca U üzerindeki tüm bulanık kümelerin ailesi $B(U)$ sembolü ile ifade edilecektir.

Bu tanım, klasik küme teorisinin ötesinde üyeliğin ikili (var/yok) yapısını genişleterek, elemanların bir kümeye farklı derecelerde ait olabilmesine imkân tanır. Böylece belirsizliğin ve kısmi üyeliklerin modellenmesi mümkün hale gelir. Özellikle karar verme problemlerinde, bulanık kümeler gerçek yaşamın karmaşık doğasına daha uygun bir matematiksel araç sunar ve bu nedenle daha sonraki yapıların (esnek kümeler, bulanık parametreli esnek kümeler ve sanal bulanık parametreli esnek kümeler) geliştirilmesinde temel bir rol oynar.

Tanım 2.2. X ve Y bulanık kümeleri U başlangıç evreni üzerinde tanımlı olmak üzere her $u \in U$ için [1].

(i) Bulanık alt küme: Her $u \in U$ için $\mu_X(u) \le \mu_Y(u) \Rightarrow X \tilde{\subseteq} Y$.

(ii) Bulanık eşit küme: Her $u \in U$ için $\mu_X(u) = \mu_Y(u) \Rightarrow X = Y$

(iii) X bulanık kümesinin tümleyeni: $\mu_{X^c}(u) = 1 - \mu_X(u)$ için $X^c = \left\{\frac{\mu_{X^c}(u)}{u} : u \in U\right\}$.

(iv) Bulanık birleşim (Z): Her $u \in U$ için $\mu_Z(u) = max\,\{\mu_X(u), \mu_Y(u)\} \Rightarrow X \tilde{\cup} Y$.

(v) Bulanık kesişim (Z): Her $u \in U$ için $\mu_Z(u) = min\,\{\mu_X(u), \mu_Y(u)\} \Rightarrow X \tilde{\cap} Y$.

Bu temel işlemler, bulanık kümelerin klasik kümelerden farkını açıkça göstermektedir. Özellikle kesişim, birleşim ve tümleme gibi işlemler, gerçek yaşam problemlerindeki belirsizlikleri daha esnek bir biçimde modellemeyi mümkün kılar. Böylece bulanık küme teorisi, karar verme ve belirsizlik analizi süreçlerinde güçlü bir matematiksel araç haline gelmektedir.

Tanım 2.3. A , parametreler kümesi E' nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere $F: A \to P(U)$ biçiminde tanımlı bir dönüşüm verildiğinde, (F, A) ikilisi U evreni üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır [3].

Tanım 2.4. (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri U başlangıç evreni üzerinde tanımlı olmak üzere,

(i) Esnek alt küme: Eğer $A \subseteq B$ ve her $x \in A$ için $F(x) \subseteq G(x)$ ise $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ dir [6].

(ii) Esnek eşit küme: $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ve $(F, A) \sqsupseteq (G, B)$ ise $(F, A) = (G, B)$ dir [6].

(iii) Esnek tümleyen: her $x \in A$ için $F^c: A \to P(X)$ bir dönüşümü $F^c(x) = U \setminus F(x)$ ise $(F, A)^c = (F^c, A)$ dir [8].

(iv) Esnek birleşim: $C = A \cup B$ ve her $x \in C$ için $H(x) = F(x) \cup G(x)$ ise $(H, C) = (F, A) \sqcup (G, B)$ dir [6].

Uyarı 2.1. Maji ve ark. [6] tarafından verilen iki esnek kümenin kesişimi, her parametre için çıktının "$H(x) = F(x)$ ya da $H(x) = G(x)$" biçiminde seçilmesine dayandığı için, parametre örtüşmelerini doğru yansıtmaz ve esnek kümeler cebiriyle tutarlı değildir. Bu eksiklik, Irfan ve ark. [7] tarafından giderilmiş ve uygun bir "genişletilmiş kesişim" tanımı önerilmiştir.

Tanım 2.5. (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri U evreni üzerinde tanımlı olmak üzere bu iki kümenin genişletilmiş kesişimi (T, C) ile gösterilir ve $C = A \cup B$ olacak şekilde tanımlanır. Her $x \in C$ için (T, C) aşağıdaki kurala göre verilir:

$$T(x) = \begin{cases} F(x), & x \in A - B \\ G(x), & x \in B - A \\ F(x) \cap G(x), & x \in A \cap B \end{cases}. \quad (2)$$

Bu durumda genişletilmiş kesişim $(T, C) = (F, A) \sqcap (G, B)$ biçiminde gösterilir [7].

İrfan vd. [7] tarafından benimsenen bu tanım, parametre düzeyinde bilgi kaybını önleyerek (yalnızca bir tarafta bulunan parametreler için kimlik eşlemeyi korur, ortak parametreler için klasik kesişimi uygular) esnek kümelerin cebirsel tutarlılığını güçlendirir. Böylece idempotentlik, değişme ve birleşme gibi temel özellikler sağlıklı biçimde korunur; karar verme bağlamlarında parametre kapsamı daralmadan kalır. Bu çalışmada ileride kullanılacak matris temsilleri ve algoritmik adımlar açısından da kritik bir ihtiyaçtır: sanal bulanık parametreli esnek kümelerde alt–üst yaklaşımların birlikte işlendiği durumlarda, parametrelerin farklı üyelik seviyelerindeki katkıları tutarlı bir operatörle birleştirilir.

Tanım 2.6. X bulanık kümesi E üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda, U üzerinde bir bulanık parametreli esnek küme aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$F_X = \left\{ \left(\frac{\mu_X(x)}{x}, f_X(x) \right) : x \in E \right\}. \quad (3)$$

Burada $f_X: E \to P(U)$ dönüşümü, F_X kümesinin yaklaşım fonksiyonudur. Öte yandan $\mu_X: E \to [0,1]$, F_X'in üyelik fonksiyonudur. Dahası, herhangi bir $x \in E$ için $\mu_X(x) = 0$ olduğunda, buna karşılık gelen $f_X(x) = \emptyset$ olacaktır [4].

Örnek 2.1. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ nesne kümesi ve $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ parametre kümesi olmak üzere $X = \{0.45/x_1, 0.58/x_2, 0.32/x_3\}$, E üzerinde bir fuzzy küme ve $f_X(x_1) = \{u_1, u_3\}$, $f_X(x_2) = \{u_2, u_3, u_4\}$, $f_X(x_3) = \{u_2, u_3\}$ yaklaşım fonksiyonlarına karşılık gelen F_X bulanık parametreli esnek kümesi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$F_X = \{(0.45/x_1, \{u_1, u_3\}), (0.58/x_2, \{u_2, u_3, u_4\}), (0.32/x_3, \{u_2, u_3\})\}.$$

Tanım 2.7. X bulanık kümesi E kümesi üzerinde tanımlı olsun. Eğer $1 \le i \le n$ için her $0 \le \underline{\alpha_i} < \mu_X(x_i)$ koşulu sağlanıyorsa, bu değerlere karşılık gelen parametrelerden oluşan küme alt sanal parametre kümesi olarak adlandırılır ve

$$\underline{E} = \left\{ x_1^{\underline{\alpha_1}}, x_2^{\underline{\alpha_2}}, \dots, x_n^{\underline{\alpha_n}} \right\}. \quad (4)$$

şeklinde gösterilir. Burada $x_i^{\underline{\alpha_i}}$ ifadesi " x_i parametresinin α_i birimlik OLUMSUZ GELİŞİM YÖNÜ" anlamına gelir. $\underline{X}$ kümesi $\underline{E}$ üzerinde bir bulanık küme kabul edildiğinde $\underline{f_X}: \underline{E} \to P(U)$ eşleşmesi alt yaklaşım fonksiyonu olarak tanımlanır. Benzer biçimde, $1 \le i \le n$ için her $0 \le \overline{\alpha_i} \le 1 - \mu_X(x_i)$ koşulunu sağlayan parametreler kümesi üst sanal parametre kümesi olarak adlandırılır ve

$$\overline{E} = \left\{ x_1^{\overline{\alpha_1}}, x_2^{\overline{\alpha_2}}, \dots, x_n^{\overline{\alpha_n}} \right\} \quad (5)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $x_i^{\overline{\alpha_i}}$ parametresi, " x_i parametresinin α_i birimlik OLUMLU GELİŞİM YÖNÜ" anlamını taşır. $\overline{X}$ kümesi $\overline{E}$ üzerinde tanımlı bulanık küme olarak kabul edildiğinde, $\overline{f_X}: \overline{E} \to P(U)$ eşleşmesi üst yaklaşım fonksiyonu adını alır [5].

Tanım 2.8. X bulanık kümesi E kümesi üzerinde tanımlı olsun. U üzerinde bir VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümesi

$$VF_X = \underline{F_X} \cup F_X \cup \overline{F_X} \quad (6)$$

olmak üzere, burada

$$\underline{F_X} = \left\{ \left(\frac{\mu_X(x) - \underline{\alpha}}{x}, \underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}}) \right) : x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}, x \in E, \underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}}) \in P(U), 0 \le \underline{\alpha} < \mu_X(x) \right\} \quad (7)$$

$$F_X = \left\{ \left(\frac{\mu_X(x)}{x}, f_X(x) \right) : x \in E,\ f_X(x) \in P(U) \right\} \quad (8)$$

$$\overline{F_X} = \left\{ \left(\frac{\mu_X(x) + \overline{\alpha}}{x}, \overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}}) \right) : x \in E,\ x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}, \overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}}) \in P(U), 0 \le \overline{\alpha} \le 1 - \mu_X(x) \right\} \quad (9)$$

şeklindedir [5].

Bu çalışma boyunca U üzerindeki tüm sanal bulanık parametreli esnek kümelerin ailesi $SBPE(U)$ sembolü ile gösterilmiştir.

Özellik 2.1. $VF_X \in SBPE(U)$ olsun. Her $x \in E, x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}, x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ ve karar verici tarafından ifade edilen her $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}$ değerleri için $s(\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})) \le s(f_X(x)) \le s\left(\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}})\right)$ eşitsizliği gerçeklenir [5].

Örnek 2.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ nesne kümesi ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametre kümesi olarak verildiğini varsayalım. Bu durumda sanal parametre kümeleri $\underline{E} = \left\{ x_1^{\underline{\alpha_1}}, x_2^{\underline{\alpha_2}}, x_3^{\underline{\alpha_3}}, x_4^{\underline{\alpha_4}} \right\}$ ve $\overline{E} = \left\{ x_1^{\overline{\alpha_1}}, x_2^{\overline{\alpha_2}}, x_3^{\overline{\alpha_3}}, x_4^{\overline{\alpha_4}} \right\}$ şeklindedir. Buna karşılık karar verici tarafından ifade edilen yaklaşım fonksiyonları ise aşağıdaki gibi verilsin,

$\underline{X} = \{0.3/x_2, 0.2/x_4\}$ bulanık kümesi için $\underline{f_X}(x_2^{0.25}) = \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}$ ve $\underline{f_X}(x_4^{0.15}) = \{u_2, u_3, u_4, u_6\}$,
$X = \{0.55/x_2, 0.35/x_4\}$ bulanık kümesi için $f_X(x_2) = \{u_1, u_2, u_4, u_6\}$ ve $f_X(x_4) = \{u_2, u_3, u_4\}$,
$\overline{X} = \{0.67/x_2, 0.43/x_3\}$ bulanık kümesi için $\overline{f_X}(x_2^{0.12}) = \{u_1, u_4\}$ ve $\overline{f_X}(x_4^{0.08}) = \{u_2, u_3, u_4\}$.

Burada dikkat edilmelidir ki; x_2 ve x_4 parametreleri için $\underline{\alpha_2}$, $\underline{\alpha_4}$ değerleri ile $\overline{\alpha_2}$, $\overline{\alpha_4}$ değerleri $0 \le \underline{\alpha_2} = 0.25 < 0.55$, $0 \le \underline{\alpha_4} = 0.15 < 0.35$, $0 \le \overline{\alpha_2} = 0.12 \le 0.45$ *ve* $0 \le \overline{\alpha_4} = 0.08 \le 0.65$ aralığında seçilmiştir. Dolayısıyla karar verici tarafından ifade edilen üyelik değerleri rastgele değildir. Ayrıca dikkat edilmelidir ki; karar verici bu aralıklarda ifade edilen herhangi bir üyelik değerini ifade edebileceğinden çok sayıda sanal bulanık parametreli esnek küme inşa edebilir. Burada ifade edilen üyelik değerleri için inşa edilen VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümesi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$VF_X = \left\{\begin{matrix}(0.3/x_2, \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}), \\ (0.2/x_4, \{u_2, u_3, u_4, u_6\}), \\ (0.55/x_2, \{u_1, u_2, u_4, u_6\}), \\ (0.35/x_4, \{u_2, u_3, u_4\}), \\ (0.67/x_2, \{u_1, u_4\}), \\ (0.43/x_4, \{u_2, u_3, u_4\})\end{matrix}\right\}.$$

Bu küme yapısındaki mevcut bulanık parametreli esnek kümeler ise şöyledir;

$$\underline{F_X} = \left\{\begin{matrix}(0.3/x_2, \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}), \\ (0.2/x_4, \{u_2, u_3, u_4, u_6\})\end{matrix}\right\},$$
$$F_X = \left\{\begin{matrix}(0.55/x_2, \{u_1, u_2, u_4, u_6\}), \\ (0.35/x_4, \{u_2, u_3, u_4\})\end{matrix}\right\},$$
$$\overline{F_X} = \{(0.67/x_2, \{u_1, u_4\}), (0.43/x_4, \{u_2, u_3, u_4\})\}.$$

3. Teknik Formülasyonlar

Bu bölümde, belirsizlik problemlerini daha ideale yakın bir şekilde çözümleyebilme sürecini geliştirmeye yönelik sanal bulanık parametreli esnek kümeler üzerine dayanan bazı formülasyonlar önerilmiştir. Bu formülasyonların bir karar verme sürecindeki avantajları üç ana başlık etrafında aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

- Üç yaklaşımı birlikte tek başına kendi bünyesinde barındırmasından dolayı karmaşık veri analizlerine yönelik karar verme süreçlerinde küme yapısının daha yalın bir şekilde temsil edilebilmesi sayesinde olası hataların önüne geçilmesi.
- Belirsizlik problemlerini ideale yakın bir şekilde çözümleyebilmek için en önemli faktörlerden biri olan parametrelerin önem ağırlıklarını dikkate almak.
- Küme yapısındaki alt ve üst yaklaşımlar sayesinde parametre önem ağırlıklarının nesneler üzerindeki etkisini farklı bulanık değerler için değerlendirebilmek.

Tanım 3.1. X, E üzerinde bulanık küme ve VF_X, U üzerinde bir sanal bulanık parametreli esnek küme olsun. VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümesi bir matris yardımıyla aşağıdaki gibi karakterize edilir:

$$\Gamma_{VF_X} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{k1} & \Lambda_{k2} & \cdots & \Lambda_{kn} \end{pmatrix}_{k\times n} \quad (10)$$

Γ_{VF_X} matrisindeki her bir bileşen $\Lambda_{ij} = (\underline{\Psi}_{ij}, \Psi_{ij}, \overline{\Psi}_{ij})$ şeklindedir ve

$$\underline{\Psi}_{ij} = \begin{cases} \mu_X(x_j) - \underline{\alpha_j}, & u_i \in \underline{f_X}(x_j^{\underline{\alpha_j}}) \\ 0, & u_i \notin \underline{f_X}(x_j^{\underline{\alpha_j}}) \end{cases} \quad (11)$$

$$\Psi_{ij} = \begin{cases} \mu_X(x_j), & u_i \in f_X(x_j) \\ 0, & u_i \notin f_X(x_j) \end{cases} \quad (12)$$

$$\overline{\Psi}_{ij} = \begin{cases} \mu_X(x_j) + \overline{\alpha_j}, & u_i \in \overline{f_X}(x_j^{\overline{\alpha_j}}) \\ 0, & u_i \notin \overline{f_X}(x_j^{\overline{\alpha_j}}) \end{cases}. \quad (13)$$

olarak ifade edilir.

Bir belirsizlik problemini en ideale yakın bir şekilde çözümleyebilmek için mevcut verilerin en doğru şekilde ifade edilmesi gereklidir. Belirsizlik durumlarını ifade ederken en çok dikkat edilmesi gereken kriterlerden biri "parametrelerin farklı önem ağırlıkları" faktörüdür. Bu faktörün bir belirsizlik problemi üzerindeki karar verme sürecini nasıl etkileyebileceği aşağıdaki gibi uygulanmıştır:

Örnek 3.1. Bir mimarın tasarlayacağı bir köprü için en iyi projeyi belirlemesi gerektiğini varsayalım. Mevcut projelerin kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve istenilen projede olması gerekli parametrelerin kümesi ise $E = \{x_1: dayanıklı,\ x_2: etkileyici,\ x_3: az\ maliyetli\}$ şeklinde verilsin. Bu durumda mimardan istenilen köprü; dayanıklı, etkileyici ve az maliyetli olmalıdır. Ancak mimar

(i) bu parametreleri köprü yapımı için eşit derecede mi önemsiyor?
(ii) bu parametreler arasında bir öncelik sıralamasının daha uygun olabileceğini mi savunuyor?

Eğer mimar, (ii). durumu dikkate alıyor ise her bir parametreyi ne derece önemsediğini belirtmelidir. Aksi taktirde karar verme süreci etkilenebilir. Örneğin; mimar parametrelerin önem ağırlıklarını sırasıyla $w_1 = 0.75$, $w_2 = 0.15$ ve $w_3 = 0.1$ şeklinde ifade etsin. Ayrca mevcut belirsizlik problemini dikkate alan $X = \{0.4/x_1, 0.3/x_2, 0.35/x_3\}$, E üzerinde bulanık küme ve $f_X(x_1) = \{u_1, u_2\}$, $f_X(x_2) = \{u_2, u_3\}$, $f_X(x_3) = \{u_1, u_3\}$ yaklaşım fonksiyonları için F_X bulanık parametreli esnek küme aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$F_X = \{(0.4/x_1, \{u_1, u_2\}), (0.3/x_2, \{u_2, u_3\}), (0.35/x_3, \{u_1, u_3\})\}.$$

Basit bir karar verme süreci şu şekilde verilmiş olsun: Parametrelerin önem ağırlıklarının eşit olması durumunda nesnelerin değerlendirilmesi;

$$\Theta(u_i) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_{ij} \quad (14)$$

ve parametrelerin önem ağırlıklarının eşit olmaması durumunda nesnelerin değerlendirilmesi;

$$\Theta_W(u_i) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_{ij} w_j \quad (15)$$

şeklinde verilen eşitliklerden yararlanılarak hesaplansın.

Bu durumda tüm projelerin (i) ve (ii) durumlarına göre değerlendirme sonuçları Tablo 1'de verilmiştir:

Tablo 1. Projelerin önem ağırlıklarına göre değerlendirilmesi

U	Eşit önem ağırlıklı-(i)	Farklı önem ağırlıklı-(ii)
u_1	0.75	0.335
u_2	0.7	0.345
u_3	0.65	0.08

Bu durumda;

- (i) durumunu dikkate alan mimarın u_1 projesini seçmesi önerilir.
- (ii) durumunu dikkate alan mimarın u_2 projesini seçmesi önerilir.

Görüldüğü gibi, elde edilen sonuçlar arasındaki farklılık karar verme sürecini doğrudan etkilemiştir. Dolayısıyla bir belirsizlik problemini en ideale yakın bir şekilde çözümleyebilmek için parametrelerin önem ağırlıkları eğer varsa dikkate alınmalıdır.

Bu çalışmada parametrelerin olası önem ağırlıklarının farklı olma durumu dikkate alınarak sanal bulanık parametreli esnek kümeler için bir formülasyon aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 3.2. Her $x_j \in$ E parametresinin önem ağırlığı $A: E \to [0,1]$ eşleşmesi yardımıyla $A(x_j)$ şeklinde ifade edilsin. Bu durumda sanal parametreler için de $\underline{A}: \underline{E} \to [0,1]$ ve $\overline{A}: \overline{E} \to [0,1]$ eşleşmeleri yardımıyla $\underline{A}(x_j^{\underline{\alpha_j}})$ ve $\overline{A}(x_j^{\overline{\alpha_j}})$ şeklinde ifade edilir. Buradan,

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\underline{A}(x_j^{\underline{\alpha_j}}) + A(x_j) + \overline{A}(x_j^{\overline{\alpha_j}})}{3} \tag{16}$$

olmak üzere x_j parametresinin "genel ağırlık vektörü" $W_j = \left(\underline{A}(x_j^{\underline{\alpha_j}}), A(x_j), \overline{A}(x_j^{\overline{\alpha_j}})\right)$ dir. Ayrıca E parametre kümesindeki her parametre için genel ağırlık vektörleri bir matris yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$W_E = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}_{n\times 1}. \tag{17}$$

Burada her $x_j \in$ E için parametre önem ağırlıkları arasındaki ilişki $\underline{A}(x_j^{\underline{\alpha_j}}) \leq A(x_j) \leq \overline{A}(x_j^{\overline{\alpha_j}})$ dir. Bu durum, karar verici tarafından ifade edilen üyelik derecelerinin artış göstermesiyle ilişkili açık bir sonuçtur.

Tanım 3.3. X, E üzerinde bir bulanık küme ve VF_X, U üzerinde bir sanal bulanık parametreli esnek küme olsun. VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümeler için parametrelerin önem ağırlıklarının dikkate alınmasıyla nesnelerin toplam skorları

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{k1} & \Lambda_{k2} & \cdots & \Lambda_{kn} \end{pmatrix}_{k\times n} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} \Sigma(u_1) \\ \Sigma(u_2) \\ \vdots \\ \Sigma(u_k) \end{pmatrix}_{k\times 1} \tag{18}$$

matris çarpımıyla hesaplanır ve burada

$$\Sigma(u_i) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ij} \times W_j \tag{19}$$

şeklinde olup $\Lambda_{ij} \times W_j$ skaler çarpımı

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} \times W_j &= \left(\underline{\Psi}_{ij}, \Psi_{ij}, \overline{\Psi}_{ij}\right) \\ &\quad \times \left(\underline{A}(x_j^{\underline{\alpha_j}}), A(x_j), \overline{A}(x_j^{\overline{\alpha_j}})\right) \\ &= \underline{\Psi}_{ij}\underline{A}(x_j^{\underline{\alpha_j}}) + \Psi_{ij}A(x_j) \\ &\quad + \overline{\Psi}_{ij}\overline{A}(x_j^{\overline{\alpha_j}}). \end{aligned} \tag{20}$$

4. Uygulama

Bu bölümde özellikle birden fazla üyelik değerinin işlenmesi gerektiği belirsizlik ortamlarına yönelik bir karar verme algoritması inşa edilmiştir. Bu algoritmanın yapılandırılmasıyla karar vericiler alt ve üst yaklaşımlar aracılığıyla her bir parametre için üç farklı üyelik değerine yönelik veri analizi yapabilmektedir. Bu sayede belirsizlik probleminde istenilen koşulların sağlanmasına yönelik birden fazla üyelik derecesini ifade edebilen nesne kümesine odaklanan bir yaklaşım inşa edilmiştir. Bu yönüyle literatürde mevcut diğer algoritmalardan farklıdır [13], [14], [15], [16].

Algoritma

Adım 1. E parametre kümesi, U evren kümesi ve X, E üzerinde bir bulanık küme olacak şekilde mevcut belirsizlik problemini ifade eden kümeleri gir.

Adım 2. Karar verici tarafından mevcut belirsizlik problemini ifade eden F_X bulanık parametreli esnek kümeyi gir.

Adım 3. Eğer $f_X(x)$ kümesindeki nesnelerin sayısı problem koşullarında istenen sayıya eşit ise Adım 8'ya geç. Eğer $f_X(x)$ kümesindeki nesnelerin sayısı gerekenden fazla ise Adım 5'e geç ve son olarak $f_X(x)$ kümesindeki nesnelerin sayısı gerekenden az ise Adım 4'e geç.

Adım 4. Her $x \in E$ ve $x^{\underline{\alpha}} \in \underline{E}$ için bir $0 \leq \underline{\alpha} < \mu_X(x)$ değeri seç ve $\mu_X(x) - \underline{\alpha}$ ifadesi için $\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonunu bul ve Adım 6'ya geç.

Adım 5. Her $x \in E$ ve $x^{\overline{\alpha}} \in \overline{E}$ için bir $0 \leq \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_X(x)$ değeri seç ve $\mu_X(x) + \overline{\alpha}$ ifadesi için $\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonunu bul ve Adım 7'ya geç.

Adım6. Bulunan $\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonunun nesne sayısı gerekenden az ise Adım 4'e tekrar git ve seçtiğin $\underline{\alpha}$ değerini $\mathrm{S}(\underline{\alpha}) < \underline{\alpha} < \mu_X(x)$ aralığında seç. Eğer $\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonunun nesne sayısı gerekenden fazla ise Adım 4'e tekrar git ve seçtiğin $\underline{\alpha}$ değerini $0 \leq \underline{\alpha} < \mathrm{S}(\underline{\alpha})$ aralığında seç. Son olarak $\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonunun nesne sayısı problem koşullarını gerçekliyor ise Adım 9'ya geç. (Burada ifade edilen $\mathrm{S}(\underline{\alpha})$ en son seçilen $\underline{\alpha}$ değerini temsil etmektedir.)

Adım 7. Bulunan $\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonunun nesne sayısı gerekenden az ise Adım 5'e tekrar git ve seçtiğin $\overline{\alpha}$ değerini $0 \leq \overline{\alpha} < \mathrm{S}(\overline{\alpha})$ aralığında seç. Eğer $\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonunun nesne sayısı gerekenden fazla ise Adım 5'e tekrar git ve seçtiğin $\overline{\alpha}$ değerini $\mathrm{S}(\overline{\alpha}) < \overline{\alpha} \leq 1 - \mu_X(x)$ aralığında seç. Son olarak $\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonunun nesne sayısı problem koşullarını gerçekliyor ise Adım 9'ya geç. (Burada ifade edilen $\mathrm{S}(\overline{\alpha})$ en son seçilen $\overline{\alpha}$ değerini temsil etmektedir.)

Adım 8. Bu durumda $\underline{\alpha} = \overline{\alpha} = 0$ alınarak $\underline{F_X} = F_X = \overline{F_X} = VF_X$ sanal bulanık parametreli esnek kümesi elde edilir ve Adım 9'a geç (Bu durumda elde edilen sanal bulanık parametreli esnek küme bir bulanık parametreli esnek kümedir).

Adım 9. Problemin koşullarını sağlayan $\underline{f_X}(x^{\underline{\alpha}}), f_X(x)$ ve $\overline{f_X}(x^{\overline{\alpha}})$ yaklaşım fonksiyonlarından yararlanılarak VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümeyi inşa et.

Adım 10. Her parametrenin genel ağırlık vektörlerini gir.

Adım 11. VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümesinin genel ağırlık vektörleri yardımıyla her $u \in U$ için $\Sigma(u_i)$ değerlerini hesapla

Adım 12. $\Sigma(u_t) = \max\{\Sigma(u_i): 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{s(U)}\}$ değerini bul.

Adım 13. $\mathrm{u_t}$ nesnesi istenen parametreleri belirlenen koşullar çerçevesinde gerçekleyen en iyi nesnedir.

Şimdi bu algoritmanın nasıl uygulanacağını örneklemek açısından aşağıdaki gibi bir belirsizlik problemini ele alalım:

Problem: Ayakkabı imalatı üzerine üretim yapan bir şirket ürünlerini pazarlara ulaştırabilmek için en uygun tedarikçiyi tespit etmek istemektedir. Bunun için ayakkabı şirketi tarafından bir ilan yayınlanmıştır. İlanda kendileri için en uygun tedarikçi firmanın özellikleri şöyle verilmiştir: kaliteli hizmet, düşük maliyet, zamanında teslimat. Bu durumda parametre kümesi şöyle aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$E = \begin{Bmatrix} x_1\text{: } hizmet\ kalitesi, x_2\text{: } az\ maliyetli, \\ x_3\text{: } zamanında\ teslimat \end{Bmatrix}.$$

Ayrıca; bu ilana başvuran tedarikçi firma sayısı $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ evrensel nesne kümesi yardımıyla ifade edilsin. Başvuran firmalar arasındaki en uygun firmayı tespit edebilmek için şirket tarafından birtakım testler yapılarak herbir parametreyi sağlayan en iyi üç şirketin tespit edilmesi hedeflenmiştir. Daha sonra şirketin istediği koşullara en uygun olan tedarikçi firma belirlenerek karar verme sürecinin tamamlanması istenmektedir.

Şirket tarafından yapılan ilk test sonucunu ifade eden F_X bulanık parametreli esnek kümesi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$F_X = \begin{Bmatrix} (0.65/x_1, \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}), \\ (0.35/x_2, \{u_1, u_3, u_4\}), (0.4/x_3, \{u_7\}) \end{Bmatrix}$$

Burada $f_X(x_1) = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$, $f_X(x_2) = \{u_1, u_3, u_4\}$, $f_X(x_3) = \{u_7\}$; F_X bulanık parametreli esnek kümenin yaklaşım fonksiyonlarıdır ve $X = \{0.65/x_1, 0.35/x_2, 0.4/x_3\}$, E 'nin bir bulanık kümesidir. Ayrıca 0.65, 0.35 ve 0.4 değerleri yapılan ilk testin herbir parametre için zorluk derecesini ifade etmektedir. Testlerdeki amaç herbir parametreyi sağlayan en iyi üç şirketi belirlemektir. Ancak ilk test sonucu incelendiğinde sadece x_2 parametresini sağlayan üç şirket belirlenmiştir. Diğer iki parametre için bu koşulu sağlayan testin üyelik derecesi (yani zorluk derecesi) aşağıdaki gibi tespit edilmiştir:

$\mathbf{x_1}$ parametresi için:

Bu parametreyi gerçekleyen şirket sayısı koşulda istenen üç şirketten fazla olduğundan bu parametrenin zorluk derecesi $0 \leq \overline{\alpha} = 0.3 \leq 1 - 0.65$ değerince arttırılarak bir test daha yapılsın. O halde $\mu_X(x) + \overline{\alpha} = 0.65 + 0.3 = 0.95$ yeni üyelik derecesi olup, bu zorluğa sahip test sonuçlarının yaklaşım fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin:

$$\overline{f_X}(x_1^{\overline{0.3}}) = \{\mathrm{u_2}, \mathrm{u_5}\}$$

En iyi üç şirketin tespit edilme hedefinin altında kalındığı için $0 \leq \overline{\alpha} = 0.2 < \mathrm{S}(\overline{\alpha}) = 0.3$ değerini seçerek, $\mu_X(x) + \overline{\alpha} = 0.65 + 0.2 = 0.85$ zorluk değerine sahip yeni bir test uygulansın. Bu yeni testin sonuçları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\overline{f_X}(x_1^{\overline{0.2}}) = \{\mathrm{u_2}, \mathrm{u_3}, \mathrm{u_5}\}$$

Bu durumda $\overline{f_X}(x_1^{\overline{0.2}})$ yaklaşım fonksiyonuyla istenilen şartlar x_1 parametresi için sağlandı.

$\mathbf{x_3}$ parametresi için:

Tanım 2.8.'den bu parametreyi sağlayan nesne sayısını arttırabilmek için x_3 parametresine uygulanan testin zorluk derecesi azaltılmalıdır. Bunun için ilk olarak $0 \leq \underline{\alpha} = 0.25 < \mu_X(x) = 0.4$ değeri seçilsin ve $\mu_X(x) - \underline{\alpha} = 0.4 - 0.25 = 0.15$ zorluk üyeliğine sahip testin sonuçları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\underline{f_X}(x_3^{\underline{0.25}}) = \{\mathrm{u_1}, \mathrm{u_4}, \mathrm{u_5}, \mathrm{u_7}\}.$$

İstenilen koşulu sağlayan nesne sayısından daha fazla nesne elde edildiğinden yeni bir $0 \leq \underline{\alpha} = 0.20 < \mathrm{S}(\underline{\alpha}) = 0.25$ değeri seçilsin ve $\mu_X(x) - \underline{\alpha} = 0.4 -$

$0.2 = 0.2$ zorluk üyeliğine sahip yeni bir test yapılsın. Bu testin sonuçları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\underline{f_X}(x_3{}^{\underline{0.2}}) = \{u_4, u_5, u_7\}.$$

Böylece her bir parametreyi sağlayan en iyi üç nesne tespit edilmiştir. Bu durumda genel test sonuçlarını ifade eden VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümesi aşağıdaki gibi elde edilmiş olunur:

$$\mathrm{VF_X} = \left\{ \begin{matrix} (0.2/x_3, \{u_4, u_5, u_7\}), \\ (0.65/x_1, \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}), \\ (0.35/x_2, \{u_1, u_3, u_4\}), \\ (0.4/x_3, \{u_7\}), (0.85/x_1, \{u_2, u_3, u_5\}) \end{matrix} \right\}.$$

Buradaki yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\underline{F_X} = \{(0.2/x_3, \{u_4, u_5, u_7\})\},$$

$$F_X = \left\{ \begin{matrix} (0.65/x_1, \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}), \\ (0.35/x_2, \{u_1, u_3, u_4\}), \\ (0.4/x_3, \{u_7\}) \end{matrix} \right\},$$

$$\overline{F_X} = \{(0.85/x_1, \{u_2, u_3, u_5\})\}.$$

VF_X bir matris yardımıyla daha açık bir şekilde ifade etmek problemi daha anlaşılır kılarak olası hata miktarını azaltabilir. Bu durumda VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümesinin matris temsili aşağıdaki gibi verilmiştir:

VF_X bir matris yardımıyla daha açık bir şekilde ifade etmek problemi daha anlaşılır kılarak olası hata miktarını azaltabilir. Bu durumda VF_X sanal bulanık parametreli esnek kümesinin matris temsili aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\Gamma_{VF_X} = \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0.35,0) & (0,0,0) \\ (0,0.65,0.85) & (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0.65,0.85) & (0,0.35,0) & (0,0,0) \\ (0,0.65,0) & (0,0.35,0) & (0.2,0,0) \\ (0,0.65,0.85) & (0,0,0) & (0.2,0,0) \\ (0,0.65,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0.65,0) & (0,0,0) & (0.2,0.4,0) \\ (0,0.65,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix}_{8\times 3}.$$

Şimdi; şirketin pazar arayışında ifade ettiği parametrelerin önem ağırlıkları, aşağıdaki gibi verildiği varsayılsın:

$$W_1 = \left(\underline{A}(x_1{}^{\underline{0}}), A(x_1), \overline{A}\left(x_1{}^{\overline{0.2}}\right)\right) = (0.13, 0.2, 0.36),$$

$$W_2 = \left(\underline{A}(x_2{}^{\underline{0}}), A(x_2), \overline{A}\left(x_2{}^{\overline{0}}\right)\right) = (0.25, 0.4, 0.7),$$

$$W_3 = \left(\underline{A}(x_3{}^{\underline{0.2}}), A(x_3), \overline{A}\left(x_3{}^{\overline{0}}\right)\right) = (0.17, 0.33, 0.46).$$

Bu durumda genel ağırlık vektörlerinin matris temsili aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$W_E = \begin{pmatrix} (0.13, 0.2, 0.36) \\ (0.25, 0.4, 0.7) \\ (0.17, 0.33, 0.46) \end{pmatrix}_{3\times 1}.$$

Herbir nesnenin $\Sigma(u)$ değerleri parametrelerin önem ağırlıklarının farklılığından dolayı değişebilir. Bu durumda bu olası değişimleri de dikkate alan değerlendirme aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,0.35,0) & (0,0,0) \\ (0,0.65,0.85) & (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0.65,0.85) & (0,0.35,0) & (0,0,0) \\ (0,0.65,0) & (0,0.35,0) & (0.2,0,0) \\ (0,0.65,0.85) & (0,0,0) & (0.2,0,0) \\ (0,0.65,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \\ (0,0.65,0) & (0,0,0) & (0.2,0.4,0) \\ (0,0.65,0) & (0,0,0) & (0,0,0) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (0.13, 0.2, 0.36) \\ (0.25, 0.4, 0.7) \\ (0.17, 0.33, 0.46) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.436 \\ 0.576 \\ 0.304 \\ 0.47 \\ 0.13 \\ 0.296 \\ 0.13 \end{pmatrix}_{8\times 1}.$$

Örneğin; u_4 değeri için,

$$\begin{aligned} \Sigma(u_4) &= \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{4j} \times W_j \\ &= \Lambda_{41} \times W_1 + \Lambda_{42} \times W_2 + \Lambda_{43} \times W_3 \\ &= 0.13 + 0.14 + 0.034 \\ &= 0.304. \end{aligned}$$

Buradaki bileşenler,

$$\Lambda_{11} \times W_1 = (0,0.65,0) \times (0.13, 0.2, 0.36) = 0.13,$$
$$\Lambda_{12} \times W_2 = (0,0.35,0) \times (0.25, 0.4, 0.7) = 0.14,$$
$$\Lambda_{13} \times W_3 = (0.2,0,0) \times (0.17, 0.33, 0.46) = 0.034.$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla $\Sigma(u_3) = \max\{\Sigma(u_i): 1 \leq i \leq 8\} = 0.576$ olduğundan $t = 3$ değeri için u_3 tedarikçisinin ayakkabı imalatı yapan bu şirket için en uygun seçenek olduğu tespit edilmiştir.

5. Önerilen Algoritma için Bir Tartışma

Bu çalışmada önerilen karar verme algoritmasının literatürde mevcut olan diğer yaklaşımlardan üstün tarafları aşağıdaki gibi verilmiştir:

- Karar verici tarafından ifade edilen üyelik derecelerinin değişkenlik gösterebilmesi ve bu sayede çoklu verilerin işleyebilmesine olanak tanınması.

- Mevcut belirsizlik probleminin koşullarına uygun aralıklarda işlem yapılabilme olanağı sayesinde herbir nesnenin sahip olabileceği parametrelerin üyelik derecelerinin tespit edilebilmesi.
- Üç aşamalı karar verme süreci sayesinde herbir parametreyi sağlayan nesnelerin farklı üyelik dereceleri için ayrı ayrı irdelenebilmesi.

Bu farklılıklarının yanısıra önerilen algoritmanın en önemli avantajı mevcut belirsizlik problemine yönelik en ideal sanal bulanık parametreli esnek kümenin tespit edilebilmesi üzerine odaklanmış olan adımlara sahip olmasıdır.

Bu çalışmada önerilen algoritmada her $\underline{\alpha}$ ve $\overline{\alpha}$ değerleri için istenilen koşullar sağlanana dek değişkenlik göstermektedir. Bu durum, önerilen algoritmanın en önemli avantajıdır. Değişkenlerin esnek olması belirsizlik durumlarını daha açık bir şekilde ifade etmemizi sağlarken, nesne kümesine müdahale edebilme olanağı ideal çözüme ulaşmayı kolaylaştıran bir diğer önemli faktördür. Bununla birlikte, yöntemin bazı sınırlılıkları da bulunmaktadır. Özellikle parametre sayısının fazla olduğu büyük ölçekli problemlerde hesaplama maliyeti artmakta ve algoritmanın uygulanması daha karmaşık hale gelebilmektedir. Ayrıca, karar verici tarafından belirlenen üyelik değerlerinin doğruluğu sonuçların güvenilirliğini doğrudan etkilemektedir. Bu hususlar, gelecekte yapılacak çalışmalar için yöntemin daha optimize edilmiş versiyonlarının geliştirilmesine yönelik önemli araştırma alanları oluşturmaktadır. Bu faktörlerin sağladığı avantaj ve sınırlılıklar birlikte değerlendirildiğinde, önerilen algoritma birden fazla üyelik değerinin işlenmesi gereken belirsizlik ortamlarında karar verme problemlerinin çözümüne yönelik yenilikçi ancak geliştirilmeye açık bir yöntem olarak öne çıkmaktadır.

6. Sonuç

Bu çalışma, çoklu üyelik değerlerine yönelik veri analizine odaklanmıştır. Bu veri analizinin yapılandırılabilmesine yönelik ortaya atılan sanal bulanık parametreli esnek küme sayesinde bu alandaki çalışmalarda da hızla artış meydana gelmiştir. Bu nedenle bu çalışma sanal bulanık parametreli esnek kümeler üzerine odaklanmıştır. Bu matematiksel model üzerine dayanan bir karar verme algoritması önerilmiştir. Bu algoritma sayesinde karşılaşılan belirsizlik problemine yönelik verileri işlemek için en ideal sanal bulanık parametreli esnek küme soft kümenin tespiti yapılır. Ayrıca parametre önem ağırlıkları dikkate alınarak daha iyi bir yaklaşım elde edilmek amaçlanmıştır. Buna ilaveten, küme yapısındaki alt ve üst yaklaşımların yapısındaki bulanık değerlere yönelik nesnelerin incelenmesi farklı bakış açılarından değerlendirilebilmesi bir başka önemli avantajıdır. Bu avantajları sayesinde inşa edilen karar verme algoritması literatürde mevcut yaklaşımların eksikliklerini önemli açılardan ele almaktadır. Ayrıca karar verme algoritmasının bir belirsizlik problemine nasıl uygulanabileceği örneklendirilmiştir.

Bu çalışmada inşa edilen karar verme algoritması, karşılaşılan kompleks çoklu üyelik değerlerine yönelik belirsizlik ortamları için yenilikçi bir yaklaşımdır. Önerilen algoritma, özellikle mühendislik tasarım süreçleri, tedarikçi seçimi, risk analizi, sağlık tanı sistemleri ve çok kriterli karar verme problemleri gibi farklı uygulama alanlarında kullanılma potansiyeline sahiptir. Ayrıca, yöntemin büyük ölçekli veri kümelerine uyarlanması, hesaplama maliyetinin azaltılmasına yönelik optimizasyon tekniklerinin geliştirilmesi ve yapay zekâ temelli karar destek sistemleriyle entegrasyonu gelecekteki çalışmalar için önemli araştırma yönleri olarak görülmektedir. Bu bağlamda önerilen algoritmanın, gelecekte tasarlanacak karar verme yaklaşımlarına yönelik güçlü bir motivasyon aracı olduğu düşünülmektedir.

Etik Beyanı/Declaration of Ethical Code

Bu çalışmada, "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

In this study, we undertake that all the rules required to be followed within the scope of the "Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive" are complied with, and that none of the actions stated under the heading "Actions Against Scientific Research and Publication Ethics" are not carried out.

Kaynakça

[1] Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy sets. Information and Control, 8, 338-353.

[2] Pawlak, Z. 1982. Rough sets. International Journal of Computational Intelligence Systems, 11, 341-356.

[3] Molodtsov, D. 1999. Soft set theory-first results. Computers and Mathematics with Applications, 37, 19-31.

[4] Çağman, N., Çıtak, F., Enginoğlu, S. 2011. FP-soft Set Theory and Its Applications. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2, 219-226.

[5] Dalkılıç, O., Demirtaş, N. 2021. VFP-Soft Sets and Its Application on Decision Making Problems. Journal of Polytechnic, 24(4), 1391-1399.

[6] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R. 2003. Soft Set Theory. Computers and Mathematics with Applications, 45(4-5), 555–562.

[7] Irfan, A.M., Feng, F., Liu, X., Minc, W.K., Shabir, M. 2009. On some new operations in soft set Theory. Computers and Mathematics with Applications, 57, 1547-1553.

[8] Shabir, M., Naz, M. 2011. On soft topological spaces. Computers and Mathematics with Applications, 61, 1786-1799.

[9] İç, Y., Yurdakul, M. 2019. Analysis of the effect of the number of criteria and alternatives on the ranking results in applications of the multi-criteria decision-making approaches in machining center selection problems. Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 35, 991-1002.

[10] Dağdeviren, M., Dönmez, N., Kurt, M. 2013. Developing a new model for supplier evaluation process for a company and its application. Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 21, 247-255.

[11] Dağdeviren, M., Eren, T. 2013. Analytical hierarchy process and use of 0-1 goal programming methods in selecting supplier firm. Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 16, 41-52.

[12] Chen, C. T., Lin, C. T., Huang, S. F. 2006. A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management. International Journal of Production Economics, 102(2), 289-301.

[13] Fatimah, F., Rosadi, D., Hakim, R. F., Alcantud, J.C.R. 2018. N-soft sets and their decision making algorithms. Soft Computing, 22(12), 3829-3842.

[14] Çağman, N., Enginoğlu, S. 2010. Soft set theory and uni–int decision making. European Journal of Operational Research, 207(2), 848-855.

[15] Roy, A. R., Maji, P.K. 2007. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 203(2), 412-418.

[16] Demirtaş, N., Hussaın, S., Dalkılıç, O. 2020. New approaches of inverse soft rough sets and their applications in a decision making problem. Journal of Applied Mathematics and Informatics, 38(3-4), 335-349.

[17] Maji, P. K., Roy, A. R., Biswas, R. 2001. Fuzzy soft sets. Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3), 589-602.

[18] Çağman, N., Çıtak, F., Enginoğlu, S. 2010. Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. Turkish Journal of Fuzzy Systems, 1(1), 21-35.

[19] Meng, D., Zhang, X., Qin, K. 2011. Soft rough fuzzy sets and soft fuzzy rough sets. Computers and Mathematics with Applications, 62(12), 4635-4645.

[20] Fujita, T., Smarandache, F. 2025. An introduction to advanced soft set variants: Superhypersoft sets, indetermsuperhypersoft sets, indetermtreesoft sets, bihypersoft sets, graphicsoft sets, and beyond. Neutrosophic Sets and Systems, 82, 817-843.

[21] Demirtaş, N., Dalkılıç, O. 2020. Decompositions of Soft α-continuity and Soft A-continuity. Journal of New Theory, (31), 86-94.

[22] Baser, Z., Ulucay, V. 2025. Energy of a neutrosophic soft set and its applications to multi-criteria decision-making problems. Neutrosophic Sets and Systems, 79(1), 28.

[23] Ashraf, S., Jana, C., Sohail, M., Choudhary, R., Ahmad, S., Deveci, M. 2025. Multi-criteria decision-making model based on picture hesitant fuzzy soft set approach: An application of sustainable solar energy management. Information Sciences, 686, 121334.

[24] Dalkılıç, O. 2022. Generalization of neutrosophic parametrized soft set theory and its applications. Journal of Polytechnic, 25(2), 675-684.

[25] Xu, K., Pedrycz, W., Li, Z., Nie, W. 2018. Constructing a virtual space for enhancing the classification performance of fuzzy clustering. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 27(9), 1779-1792.

[26] Dalkılıç, O. 2022. On topological structures of virtual fuzzy parametrized fuzzy soft sets. Complex and Intelligent Systems, 8, 337–348.

[27] Mohaghegh, S. 2000. Virtual-intelligence applications in petroleum engineering: part 3-fuzzy logic. Journal of petroleum technology, 52(11), 82-87.

[28] Aydın, T., Enginoğlu, S. 2021. Interval-valued intuitionistic fuzzy parameterized interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their application in decision-making. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 12(1), 1541-1558.