Dokuz Eylül Üniversitesi
Yayın Geliş Tarihi: 04.03.2011 Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi
Yayına Kabul Tarihi: 02.03.2012 Cilt: 14, Sayı: 2, Yıl: 2012, Sayfa: 87-103
Online Yayın Tarihi: 06.07.2012 ISSN: 1302-3284 E-ISSN: 1308-0911

OPSİYON DUYARLILIK PARAMETRELERİNİN İNCELENMESİNE YÖNELİK BİR ARAŞTIRMA

Ali KABAKÇI*

Öz

Riskten korunma işlemlerine duyulan gereksinim ve alım-satım kararları nedeniyle; özellikle opsiyon piyasasındaki işlemciler, yeni ve denenmemiş çok fazla parametreye sahip bir modeli kullanmaktansa, daha az parametre içeren basit bir fiyatlama modelini kullanmayı tercih etmektedirler. Daha az ve daha güvenli parametreler içeren bir fiyatlama modeli, kullanışlı olması açısından daha faydalıdır. Bu nedenle tüm kullanıcılar için ortak bir zemine oturmuş fiyatlar, piyasa işlemcileri açısından karar mekanizmalarının önemli bir unsurunu oluşturmaktadır. Piyasada kolaylıkla hesaplanabilen tek ve kabul görmüş fiyat unsuru; adil bir fiyat niteliği taşımakta ve alım-satım kararlarını doğrudan etkilemektedir. Ancak aktörlerin alım-satım kararları kadar oluşturdukları portföylerini riske karşın korumaları da gerekmektedir. Bunun için özellikle opsiyon işlemlerinde, opsiyonlar üzerine geliştirilen duyarlılık parametrelerinden faydalanmak gerekmektedir.

Çalışmada opsiyon duyarlılık parametrelerinin, opsiyon fiyat değişimine etkisi incelenmiştir. Opsiyon fiyatları; Geometrik Brownian Hareket ile türetilmiş hisse senedi fiyatlarından oluşturulmuş ve bu fiyatlar kullanılarak duyarlılık parametreleri hesaplanmıştır. Modelde Black&Scholes Opsiyon Fiyatlama teorisi kullanıldığı için, hesaplamalarda modelin varsayımları kabul edilmiş ancak varsayımların bazı sakıncalarına yazın kısmında değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Opsiyon sözleşmesi, Opsiyon Duyarlılığı, Opsiyon Duyarlılık Parametreleri.*

REVIEW OF OPTION SENSITIVITY PARAMETERS

Abstract

Traders of option market prefer to use basic pricing model with few parameters than use new and untested models due to the need and purchasing decisions of hedge transactions. A pricing model with less and reliable parameters is beneficial for option traders in terms of use. Therefore, prices that are commonly received by traders form an important indicator of decision making for traders. Price that is easily calculated and generally accepted has fair price quality and affects purchasing decisions directly. Besides purchasing decisions, traders must protect the portfolios against risk. Thus, especially in option transactions, option sensitivity parameters which are improved on options should be used.

* Yrd. Doç. Dr. Dokuz Eylül Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, e-mail: ali.kabakci@deu.edu.tr

In this research, the effect of option sensitivity parameters on option price changes is examined. Option prices are formed by deriving stock prices with Geometric Brownian Movement and sensitivity parameters are calculated by using prices. In research, Black&Scholes Option Pricing Theory is used so; assumptions of model is accepted but drawbacks of assumptions are discussed.

Keywords: *Option, Option Sensitivity, Option Sensitivities Parameters.*

GİRİŞ

Black, Scholes ve Merton'un oluşturduğu opsiyon fiyatlama modeli, ortak kabul görmüş varsayımları açısından fayda sağladığı için tüm opsiyon işlemcileri tarafından tercih edilmektedir. Denklem; arbitraj unsuru olarak martingale koşulunu kabul ettiği için elde edilen opsiyon fiyatı tek ve adil olarak nitelendirilebilir. Gerçekten de bütün işlemciler, işlemlerini aynı varsayımlar altında yapmanın rahatlığını taşırlar. Ancak bazı işlemciler denkleme birkaç parametre ilave etmektedirler. Formüle duyulan eleştirilere rağmen işlemciler belirli bir limit içerdiği için öngörü sağlanmayı kolaylaştırdığından Black&Scholes fiyatlama modelini kullanmaktadırlar (Taleb, 1996: 109).

Black&Scholes fiyatlama modeli ile ortak olarak kabul edilebilir bir opsiyon fiyatına sahip olunur. İşlemciler bu basit modele ek olarak bazı bilgi bazlı değişimler olan parametreleri, örneğin; sıçrama faktörü, oynaklığın volatilitesi, faiz oranları ile baz mal arasındaki korelasyon ve baz malın fiyat değişimlerine uygulanan değişik istatistiksel değişimleri eklemektedirler (Zhang, 1997: 61-69). Özellikle egzotik opsiyonlar gibi ikinci nesil opsiyonların kullanımında, eklenmesi gereken parametre ihtiyacı açıkça görülmektedir.

Modelin temeli, risk yansız bir şekilde piyasadaki menkul kıymetlerin taklidine dayanmaktadır. Ancak her arbitrajcının veya her işlemcinin her menkul kıymeti taklit edemeyeceği oldukça açıktır. Çünkü ilgili baz varlıkta çok sık oluşacak açığa satışlar sebebiyle pozisyonu riskten korumak zor olacaktır (Neftçi, 2008: 177-178). Ancak bu durum objektif piyasa değerinin, taklit etme maliyetleri açısından farklılaşarak arbitrajcılar için güçleştirildiği anlamına gelmemektedir. B&S modeli ile işlemci için; menkul kıymetin çok küçük fiyat dalgalanmalarının kabul görmüş bir riskten kaçınma stratejisi olan delta yapısını çok fazla etkilemediği görülmektedir.

Diğer bir sorun ise; işlemci tarafından alınan hisse senedinin opsiyonun kullanılma süresinin sonuna kadar elde tutulma zorunluluğudur. Model, hisse senedinin alınma kararı sırasında hesaplanan dönemlik olan tarihsel varyansın zamanla beraber sıklıkla küçük değişimler göstererek değişen varyanstan farklı olmasına dayanmaktadır. "Heteroskedasticity" olarak da adlandırılan, değişen varyans sorunu; finansal zaman serilerinde özellikle yüksek frekanslı veriler olan günlük fiyatların değerlendirilmesinde sıkça görülmektedir (Mazıbaş, 2005: 3-4).

Genel bir sonuç olarak; risk yansız bir işlem amacıyla kullanılan taklit edilme işlemi piyasadaki olası her bilgiyi içermediği için B&S modeli, her işlemci açısından adil fiyatın hesaplanmasını sağlamaya çalışır.

Opsiyonların fiyat değişimleri, duyarlılık parametreleri ile takip edilmekte ve hedge işlemleri oluşturulmaktadır. Opsiyon fiyatı bağımsız bir değişken olarak kabul edilirse, bu fonksiyonun bağımsız değişkenleri temelde; volatilite, risksiz faiz oranı, vadeye kalan süre, baz malın fiyat volatilitesi ve opsiyonun kullanım bedeli olarak öngörülebilir. Bu parametrelerdeki değişim, ilerleyen dönemlerde opsiyon fiyatını da değiştirebilir. Bununla birlikte, opsiyonun yazıldığı baz malın özellikleri arasında temettü dağıtımı, kupon dağıtımı gibi özellikler de opsiyonun fiyatını etkilemektedir. Çalışmada kar payı dağıtmayan bir şirketin hisse senedi üzerine yazılmış Avrupa tipi bir alım opsiyonu kullanıldığı varsayılmıştır. Bu yüzden temel olarak volatilite, vadeye kalan süre, hisse senedi değeri, kullanım fiyatı ve risksiz faiz oranlarındaki değişimin, opsiyon değerinde yaratacağı etki analiz edilmiştir.

FİYATLAMA MODELİ VE MODEL VARSAYIMLARININ İNCELENMESİ

Varsayımsal olarak, yatırımcının aşağıda verilen yöntemi izlediği kabul edildiğinde;

- Uygulama fiyatı S olan bir yıl vadeli alım opsiyonunda uzun pozisyona girmek,
- Aynı vadede ve aynı kullanım fiyatına sahip satım opsiyonunda kısa pozisyon almak,
- Söz konusu varlığı satın almak,
- Se^{-rt} miktarında borçlanmak,

Bu stratejinin yaratacağı nakit akışı:

C (call fiyatı) - P (put fiyatı) - A (satın alınan varlık fiyatı)+ Se^{-rt} olacaktır (Neftçi, 2008: 282).

Toplam nakit akımı, vade sonunda hisse senedinin fiyatına bağlı olarak, oluşacak üç olasılığa bağlıdır. Vade sonunda $A_t > S$, $S > A_t$ ve $S = A_t$ koşulları birbirinden bağımsız olarak gerçekleşebilir. Opsiyon mekanizmasından dolayı; vade sonunda sağlanan nakit akışı her koşulda 0 (sıfır) olmaktadır.

$$
\begin{aligned}
&C - P - A + Se^{-rt} = 0 \\
&P = C - A + Se^{-rt}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

şeklinde kabul edilebilir.

Bu ilişki, put-call paritesi olarak adlandırılmaktadır. Buna göre uygulama fiyatının cari fiyata eşit olması durumunda alım opsiyonu fiyatı satım opsiyonundan daha değerlidir. Paritenin bir diğer sonucu da, elde edilecek nakit akımının olasılıktan bağımsız olarak her koşul için aynı sonucu vermesi ve piyasada oluşabilecek fiyatlama riskini ortadan kaldırmasıdır.

B&S modeli temelde 5 varsayıma dayanmaktadır. Bunlardan ilk ikisi temel varsayımlardır ve modelin mantıksal açıdan temelini oluştururlar. Diğer üç varsayım ise dağılım ve kullanılan parametreler hakkındadır (Talep, 1996: 110-114). Çalışmanın bu kısmında modele ilişkin varsayımlar verilmiştir.

İto Prosesi

İto prosesi, rassal değişkenin bağımsız olması ve dağılımı hakkında bilgi vermektedir. Modelin kabulü; hisse senedinin fiyat hareketinin rassal yürüyüş modeline, sahip olduğu dağılımın karakteristiğinin ise normal dağılım olması ile mümkündür. Bu yüzden ilgili hisse senedi fiyat hareketi Brownian hareket olarak tanımlanmakta, temel karakteristiği şimdiki fiyatın, geçmiş fiyat hareketlerinden bağımsız olması başka bir ifadeyle hafızasız olmasına dayanmaktadır. Çalışmanın uygulama kısmında bu hafızasızlık unsuru Hurst katsayısı aracılığı ile incelenmiştir.

Birinci varsayımın düzeltilmesi gerçek piyasadaki çalkantıların modele eklenmesi ile gerçekleşebilir. En basit olarak piyasada oluşacak likidite boşlukları, baz malın fiyatını etkileyecektir. Sonuçta makroekonomik değişimler bütün piyasa enstrümanların değerini ve volatilitesini etkileyecektir (Sevütekin ve Nargeleçekenler, 2005: 244).

Piyasanın Anlaşılabilirliği

Piyasada vergi maliyeti, tazminat maliyeti ve değişim kontrolleri ve işlem maliyeti söz konusu değildir. Bu varsayım bir öncekine eklenerek işlemcinin pozisyonunu hedge etmek için büyük oranlarda alım-satım işlemi gerçekleştirilebileceği (gerekirse alım-satım işlemi sonsuz büyüklükte dahi olabilmektedir) sonucuna ulaşılabilir. Bu varsayım fayda fonksiyonlarının etkisiz olmasına yol açmaktadır. Özellikle işlem maliyetlerinin yok sayılması ile işlemcinin hedge politikası değişmekte ancak adil değer üzerine bir etkisi olmamaktadır.

Piyasadaki küçük dalgalanmalar, fiyat değişimlerinin çok küçük adımlar halinde değişmesine sebep olacaktır. Bununla beraber Mandelbrot (1963) çalışmasında ilk defa küçük fiyat değişmelerinin küçük fiyat değişmelerini, büyük fiyat değişmelerinin de büyük fiyat değişmelerini tetiklediğini kanıtlamıştır. Bu durum özelikle finansal varlıkların zaman serilerinde, kümelenme olarak görülmektedir. İşlemci B&S modeli dâhilinde, küçük fiyat hareketlerinin değişiminde hedge pozisyonunu değiştirmeyecektir. Basit olarak delta nötral hedge stratejisi uygulayan işlemci bütün küçük fiyat dalgalanmaları esnasında hisse senedinde ters pozisyon almayacaktır. Sonuç olarak hedge işleminin doğası gereği, süreksiz sayılabilecek kadar uzun bir dönemde dahi, sürekli kabul edilen bir pozisyonun hedge edilmesi kesikli bir karakter taşıyacaktır.

Sabit Volatilite

Modelde, günlük değişimlerin dağılımının bilinen varyans ile aynı olduğu düşünülmektedir. Aynı zamanda bu varsayım ile menkul kıymetler arasındaki korelasyonun sabit olduğu kabul edilmektedir. Tarihsel volatilite kullanılmasına karşın, gösterge volatilitenin stabil olmaması hesaplanan vega fonksiyonundan çok farklı bir volatilite duyarlılığına sahip olunabileceğini göstermektedir. Bu nedenle delta hedge ile korunan pozisyonda gerçekleşebilecek kayıplar da artmakta ve pozisyon daha riskli hale gelebilmektedir. Model tarihsel volatilite teriminin düzeltilmesi ve yeni bir parametre eklenmesi ile çok daha iyi sonuçlar verecektir. Genel olarak volatilitesi görece yüksek varlıkların hedge işleminde gamma fonksiyonu tercih edilmektedir. Bu şekilde pozisyonun fiyat değişimlerine karşın duyarlılığı daha hassas olarak ölçülebilmektedir.

Geometrik Brownian Hareket

Varlıkların hareketleri Geometrik Brownian Hareket olarak kabul edilmektedir. Bunun anlamı; getirilerin logaritmalarının beklenen varyansının daima sabit olduğudur. Ancak finansal varlıkların getiri dağılımları her zaman lognormal dağılmamaktadır.

Gerçek finansal varlıkların getiri serilerinde çalışılırken; varyansın zaman içinde değiştiği, kalın kuyruk veya sivri bir tepeye sahip, simetrik olmayan dağılımlarla karşılaşılmaktadır (Ünal, 2008: 340). Ancak, finansal varlıkların ortalama getiri değerlerinin kabul edildiği gibi sıfıra oldukça yakın olduğu gözlemlenmiştir.

Sabit Birikim Parametresi (Drift)

İşlemci için vadeli yapısının eğrisinin eğimi daima sabit olmalıdır. Bu varsayımın 2 sonucu vardır. Geometrik Brownian Hareket'in içerisinde yer alan Drift teriminin (kestirilebilir terim) değişim oranı ile varlık fiyatlarının değişim oranı genellikle ve sıklıkla korelasyon gösterir. Bu faiz oranının sabit olmadığı düşünülerek kolayca kabul edilebilir. Sonuç olarak drift terimi paralel bir doğru gibi hareket etmez.

Modelin kabullenmelerinden birisi de; varlık getirilerinin normal dağılımıdır ki; normal dağılım iki temel momentten oluşan bir dağılımdır. Bu temel 2 moment dâhilinde, beklenen değeri veya ortalaması (μ)ve varyansı (σ^2) zaman içinde değişmeyen olan simetrik bir dağılımdır. Basıklık değeri 3 ve çarpıklık değeri 0 kabul edilir. Bu nedenle getiri dağılımı histogramının kuyrukları kalın veya ince olmamaktadır. Dolayısıyla normal dağılıma dayalı stokastik süreçler; düzgün ve aşırılıkları olmayan patikalar izlerler.

B&S modeli genel olarak bir martingale yaklaşımıdır. Vade sonunda elde edilecek getiri ancak ve ancak risksiz faiz oranı kadardır. Opsiyon fiyatlama açısından bu model binominal dağılımın, Geometrik Brownian Hareketi ile çözümlenmesine dayanmaktadır. Modeli oluşturmak için belirli piyasa varsayımlarının yapılması gerekmektedir. Bilgisel etkin bir piyasanın varlığı, işlem maliyetinin olmayışı, piyasanın homojen olması bu varsayımların başında gelmektedir. Piyasa riskli ve risksiz birer varlıktan oluşuyor ise;

$dB_t = rB_t dt$ risksiz varlığın fiyat değişimini göstermek üzere, (2)

$B_t = e^{rt}$ risksiz varlığın fiyat fonksiyonunu oluşturmaktadır. (3)

$\frac{dB_t}{dt} = re^{rt}$ risksiz varlığın fiyatının zamana bağlı değişimi olmaktadır. (4)

Riskli varlık olan hisse senedinin fiyat değişimi Geometrik Brownian Hareket olarak kabul edilirse;

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{5}$$

olarak kabul edilir.

Fiyat denkleminin çözülmesi açısından ilgili varlığın getiri dağılımının normal dağılıma uygun olduğu kabul edilirse, $S_t = S_o \exp\{\sigma w_t + (\mu - \sigma^2/2)t\}$ olarak riskli varlığın fiyat denklemi belirlenir. $\Phi_t = \{\Phi_{1,t} + \Phi_{2,t}\}$ notasyonu; portföyü oluşturan bu iki varlığın portföydeki ağırlığını göstermek üzere,

Toplam Varlık Değeri: $V_t(\Phi_t) = \Phi_{1,t}B_t + \Phi_{2,t}S_t$ fiyat hareketlerine bağlı olarak belirlenir. Ancak; modelleme açısından, dönem sonu toplam varlık değişiminin, portföydeki varlıkların ağırlıklarından etkilenmediği kabul edildiğinde; $dV_t(\Phi_t) = (d\Phi_{1,t})B_t + (d\Phi_{2,t})S_t = 0$ 'dır. Bununla birlikte Φ_1, Φ_2 oranlarının değişimi portföyün değerini de etkilemektedir.

Piyasanın martingale koşulu taşıması ve piyasada arbitraj gerçekleşmemesi durumunda, beklenti değeri getirilerin ortalamasının risksiz faiz oranına eşit olmasını sağlamaktadır. Beklenti koşulu için risk-nötral uyarlanmış (Q) olasılığı altında portföyün getirisi; $E^Q(R_t) = r$ risksiz faiz oranına eşit ve zamandan bağımsızdır. Risk-nötral olasılık koşulu altında risksiz varlığın getirisi değişmemektedir, çünkü risksiz finansal varlıklar getirilerinde bir belirsizlik unsuru taşımamaktadırlar. Riskli varlığın getirisi için fiyat değişimi: $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q$ fiyat değişimi fonksiyonu halini alır.

Risk-nötral olasılık koşulu altında fiyat değişiminin beklenti değeri; $E^Q\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) = r$ risksiz faiz oranı olarak kabul edilir.

Bu kabullenmeler altında; riskli varlığın üzerine yazılmış T vadeli Avrupa tipi alım opsiyonunun değeri; $X = \max(S_t - K, 0)$ ile gösterilir. Piyasada belirsizliğin olmaması durumunda alım opsiyonu; T anında X değerini sağlamalıdır.

$V(\Phi) = X$ için t anında opsiyonun değeri;

$\pi(t, X) = e^{-rt} E^Q(X \mid F_t)$ beklenti değerinin risksiz faiz oranı ile iskonto edilmesine dayanmaktadır.

Baz varlığın fiyat hareketi için; $S_t = S_0 \exp((r - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t$ olarak kabul edilir. Burada Wiener sürecinin (dW_t) normal dağıldığı kabul edilmektedir (Önalan, 2004: 276-281).

$y = dW_t$ için; Avrupa tipi alım opsiyonunun değeri

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} (S_t \exp\{(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma y\} - K)^+ \exp(-y^2/(2(T-t)))dy \tag{6}$$

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r\delta} N(d_2)$$

$$\delta = T - t$$

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2} dx \tag{7}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2/2)\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\delta}$$

şeklinde çözümlenmektedir.

Önceki çözümlemede kabullenmeler dahilinde, opsiyonun fiyatı ($f(t, S_t)$); zamana ve dayanak varlık fiyatına göre değişim göstermektedir.

Ito-Lemma yöntemi kullanılarak;

$df = \left(\mu \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW$ opsiyon fiyatını belirleyen iki değişkene göre opsiyon fiyat değişimi belirlenir.

$\Delta f = \left(\mu \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W$ Euler metodu uygulanarak kesikli zamanda değişiklikler de incelenebilmektedir.

Denklemdeki $\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W$ terimi, çözümü zorlaştırmaktadır. Bu yüzden bazı varsayımlara ihtiyaç duyulur. Kısa pozisyon alınan bir opsiyon ve uzun pozisyonda bulunan hisse senedinden oluşan bir portföyün varlığı için portföyün değeri; $\prod$ şeklinde verilmiş olsun.

$\prod = \Phi S - f(S,t)$ için portföyün değerindeki kesikli değişim;

$\Delta \prod = \Phi \Delta S - \Delta f(S,t)$ şeklinde gösterilebilir.

Portföy değer değişimi denkleminde, opsiyon değer değişimi terimi yerine yazılırsa

$\Delta \prod = \Phi \mu S \Delta t + \Phi \sigma S \Delta W - \mu S \frac{\partial f}{\partial S} \Delta t - \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W$ halini almaktadır.

Pozisyonu korumak için en uygun oran $\Phi = \frac{\partial f}{\partial S}$ seçilerek (delta-nötral hedge oranı) denklem çözüme ulaşır:

$$\Delta \prod = \frac{\partial f}{\partial S} \mu S \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W - \mu S \frac{\partial f}{\partial S} \Delta t - \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W \tag{8}$$

şeklini almakta ve sadeleştirilmektedir. Denklem, buradan da $\Delta \prod = -\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \Delta t$ halini almaktadır.

Piyasa varsayımları dahilinde; portföy getirisinin sabit ve risksiz faiz oranına eşit olduğu kabul edilmişti.

$\Delta \prod = r \prod \Delta t$ için;

$$\Delta \prod = r \prod \Delta t = -\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \Delta t \tag{9}$$

ifadesine denk olur.

Bu eşitlik için portföy değeri ($\prod$), $\frac{df}{dS} S - f(S,t)$ (opsiyon primi) yerine konulursa, Black&Scholes denklemi tekrar elde edilir (Yıldırak, 2008: 69-71).

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial S}rS+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf \tag{10}$$

$$C_t=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}(S_t\exp\{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma y\}-K)^+\exp(-y^2/(2(T-t)))dy \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
C_t &= S_tN(d_1)-Ke^{-r\delta}N(d_2)\\
\delta &= T-t\\
N(d) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{d}e^{-x^2/2}dx\\
d_1 &= \frac{\ln(S_t/K)+(r+\sigma^2/2)\delta}{\sigma\sqrt{\delta}}\\
d_2 &= d_1-\sigma\sqrt{\delta}
\end{aligned} \tag{12}$$

şeklinde çözüme ulaşılabilir.

Bu değerleme yönteminde opsiyon değeri hisse senedinin beklenen getirisine dayanmamakta, belirsizlik unsuru taşımayan risksiz faiz oranına göre belirlenmektedir. Yukarıdaki bölümde verilen çözümlemelerin veriliş amacı da varsayımların anlaşılması ve modelin özümsenmesidir. Bütün piyasa aktörleri tarafından bilinen baz varlık ile ilgili fiyat, anlaşma fiyatı, ve baz varlığın getirisinin standart sapması gibi bilgilere dayanmaktadır. Modelin adil fiyat unsuru türetmesi bakımından kullanışlı olarak kabul edilmesinin nedeni bu varsayımlar olarak gösterilebilir.

Formülasyondaki N(d) terimi riske göre düzeltilmiş alım opsiyonun karda sona erme olasılığı olarak tanımlanabilir. Opsiyonun karda olması durumunda kullanılabilirliği yüksek ise her iki N(d) terimi de 1'e yakın olmalıdır. Böylece alım opsiyonun değeri S_0-Ke^{-rt} ifadesine eşit hale gelir. Bu ifade put-call paritesi tanımına oldukça yakındır ki; dönem sonundaki toplam nakit akımının sıfıra eşitlenmesini kabul etmektedir. Buna göre opsiyonun uygulamaya konulacağı kesin olarak kabul ediliyor ise, şimdiki değeri S_0 olan hisse senedinin kullanımına yönelik hak dahilinde, Ke^{-rt} ile sürekli olarak risksiz faiz oranı ile iskonto edilerek oluşan anlaşmanın değerinin bugünkü değeri kadar yükümlülük kabul edilmektedir. N(d) terimi sıfıra yaklaştıkça, benzer şekilde opsiyon zararda olduğu için kullanılmayacaktır. Bu durumda alım opsiyonunun değeri sıfıra oldukça yakındır. Bu terim parada olma yüzdesi olarak da düşünülebilir.

Paydadaki $\sigma\sqrt{T}$ kavramı da opsiyonun ömrü boyunca hisse senedi volatilitesine bağlı olarak karda ya da zararda kalma tutarını ayarlamaktadır. Eğer hem hisse senedinin volatilitesi, hem de vadeye kalan süre küçük ise belirli bir yüzde oranına göre opsiyon karda ise karda kalmaya devam edecektir.

Yoruma açık bir nokta ise oluşturulan baz varlığın volatilitesinin farklı fiyatlamalara yol açmasıdır. Hisse senedi getirisinin standart sapması hesaplamalarındaki farklı yaklaşımlar fiyat oynaklığı verisini etkilemekte ve B&S modelinin düzgün çalışmamasına neden olmaktadır. Yatırımcılar hisse senetlerinin volatiliteleri ile gösterge volatiliteleri karşılaştırır, eğer gerçek standart volatilite, gösterge volatiliteden daha büyük ise opsiyonun alınabileceğini düşünürler.

Diğer bir yaklaşım ise vadelerine aynı süre kalmış opsiyonlar için kullanılır. Volatilitesi yüksek olanın daha yüksek değerden fiyatlandırılması kaçınılmaz olacaktır. Çünkü fiyat düzeltmeleri için daha yüksek standart sapmaya ihtiyaç vardır. Uzmanlar yüksek gösterge volatiliteye sahip opsiyonları satar, düşük gösterge volatiliteye sahip opsiyonları ise alırlar.

Çeşitli vade ve anlaşma fiyatlarında opsiyon portföylerinin duyarlılığı en iyi şekilde koruma oranları hesaplanarak ölçülür. Bir opsiyon yatırımının koruma oranı; hisse senedinde gerçekleşen bir birimlik değer değişiminin, opsiyon fiyatını kaç birim değiştireceğinin ölçülmesidir. Alım opsiyonlarında pozitif koruma oranı, satım opsiyonlarında ise negatif koruma oranı söz konusudur. Bu terim aynı zamanda opsiyon fiyatının baz malın fiyatına göre duyarlılığı olan Delta duyarlılığını oluşturur.

Bir alım opsiyonu için koruma oranı $N(d_1)$, satım opsiyonları için $N(d_1)$-1 olmaktadır. N(d), standart normal dağılımda d'ye kadar olan alanı göstermektedir. Başka bir ifadeyle N(d), alım opsiyonunun koruma oranının pozitif ve 1'den küçük olduğunu göstermektedir.

Aynı şekilde, baz malın fiyatı, opsiyonun kullanım fiyatı, volatilite ve faiz oranları değiştiğinde, vadeye kalan süre kısaldığında opsiyonun değeri değişmektedir. Tüm bu değişim oranları opsiyon duyarlılıkları olarak adlandırılmaktadır.

Koruma oranlarının 1' küçük olması, opsiyonların kaldıraç sağlaması ve hisse senetlerinin fiyat değişimlerine duyarlı olması koşullarında bir çelişki yaratmamaktadır. Her ne kadar hisse senedinin fiyat artışı karşısında opsiyon fiyatı çok daha az artsa da, opsiyon fiyatlarının hisse senedi fiyatlarından çok daha az olmaları sebebi ile opsiyonların getiri volatiliteleri hisse senetlerinin getiri volatilitelerinden fazladır.

Bu nedenlerden dolayı opsiyon portföylerinin yönetiminde; opsiyon duyarlılıkları, yatırımcı açısından; özellikle dinamik hedge işlemleri ve portföy oluşumu için oldukça önemlidir.

Bu değişkenlerin değer ve işaretleri, portföyü etkileyen temel değişkenlerin portföyü nasıl ve hangi yönde etkileyeceğini göstermektedir. f parametresi alım (call) ve satım (put) opsiyonlarının değeri olduğu kabul edilirse; beş temel opsiyon duyarlılığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

Delta duyarlılığı; opsiyon değerinin opsiyonun yazıldığı baz alınan varlığın fiyat değişimine göre duyarlılığını; $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$

Gamma duyarlılığı; delta değer değişimlerinin baz alınan varlığın fiyat değişimlerine duyarlılığını; $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$

Vega duyarlılığı; opsiyon değerinin volatilite karşısında duyarlılığını; $V = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$

Rho duyarlılığı; opsiyon değerinin risksiz faiz oranı karşısında duyarlılığını;. $p = \frac{\partial f}{\partial r}$

Theta duyarlılığı ise; opsiyon değerinin opsiyonun kullanılabileceği zamana karşın duyarlılığını, $\Theta = -\frac{\partial f}{\partial T}$ ölçmektedir. Theta duyarlılığının negatif işaretli olmasının nedeni zaman ilerledikçe; (opsiyonun vadeye kalan süresi azaldıkça) opsiyonun değerinin azalmasıdır.

METODOLOJİ VE UYGULAMA

Çalışmada B&S formülünden opsiyon duyarlılıkları elde edilmiş ve duyarlılıkların istatistiksel olarak anlamlılığı incelenmiştir. Geometrik Brownian Hareketi ile günlük hisse senedi fiyatları türetilmiş ve bunlara bağlı olarak B&S modelinden Avrupa tipi alım opsiyonu fiyatları oluşturulmuştur. Çalışmanın son bölümünde ise elde edilen alım opsiyonu fiyatlarının uzun dönem hafıza etkisi incelenmiştir.

B&S formülüne göre;

$$
\begin{aligned}
C_t &= S_t N(d_1) - Ke^{-r\delta} N(d_2) \\
P_t &= Ke^{-r\delta} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \\
\delta &= T - t \\
N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2} dx \\
d_1 &= \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)\delta}{\sigma\sqrt{\delta}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\delta}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

olarak formülize edildiğinde;

Alım opsiyonu için delta çözümü;

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial (S_t N(d_1) - Ke^{-r\delta} N(d_2))}{\partial S} = N(d_1) \text{ olarak bulunur.}$$

Satım opsiyonu için delta çözümü;

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial (-S_t N(-d_1) + Ke^{-r\delta} N(-d_2))}{\partial S} = N(-d_1) = 1 - N(d_1) \tag{14}$$

Alım opsiyonu ve satım opsiyonu için gamma çözümü nümerik olarak aynı sonucu vermektedir; alım opsiyonu için gamma çözümü;

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S} = \frac{\partial^2 (S_t N(d_1) - Ke^{-r\delta} N(d_2))}{\partial^2 S} = \frac{\partial (N(d_1))}{\partial S} = \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-x^2/2} dx \right)}{\partial S}$$

$$\left. \frac{e^{-\frac{X^2}{2}}}{S\sigma\sqrt{\delta}\sqrt{2\pi}} \right|_{-\infty}^{d1} = \frac{e^{\frac{-d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} S\sigma\sqrt{\delta}} \tag{15}$$

şeklinde çözümlenir.

Alım opsiyonu için Rho duyarlılığı çözümü;

$$p = \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial (S_t N(d_1) - Ke^{-r\delta} N(d_2))}{\partial r} = \delta K e^{-r\delta} N(d_2) \tag{16}$$

Satım opsiyonu için Rho duyarlılığı çözümü;

$$p = \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial (-S_t N(-d_1) + Ke^{-r\delta} N(-d_2))}{\partial r} = -\delta K e^{-r\delta} N(-d_2) \tag{17}$$

Alım opsiyonu için Theta duyarlılığı çözümü;

$$\Theta = -\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial (S_t N(d_1) - Ke^{-r\delta} N(d_2))}{\partial T} = \left. -\frac{Se^{\frac{-X^2}{2}}\sigma}{\sqrt{2\pi}2\sqrt{\delta}} - rKe^{r\delta} N(d_2) \right|_{\infty}^{d_1} = \left. -\frac{Se^{\frac{-d_1^2}{2}}\sigma}{\sqrt{2\pi}2\sqrt{\delta}} - rKe^{r\delta} N(d_2) \right| \tag{18}$$

Satım opsiyonu için Theta duyarlılığı çözümü;

$$\Theta = -\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial (-S_t N(-d_1) + Ke^{-r\delta} N(-d_2))}{\partial T} = \left. -\frac{Se^{\frac{-X^2}{2}}\sigma}{\sqrt{2\pi}2\sqrt{\delta}} + rKe^{-r\delta} N(-d_2) \right|_{-\infty}^{-d_1} = \left. -\frac{Se^{\frac{-d_1^2}{2}}\sigma}{\sqrt{2\pi}2\sqrt{\delta}} + rKe^{-r\delta} N(-d_2) \right| \tag{19}$$

Satım ve alım opsiyonları için Vega duyarlılığı çözümü aynıdır;

$$V=\frac{\partial f}{\partial \sigma}=\frac{\partial(S_t N(d_1)-Ke^{-r\delta}N(d_2))}{\partial \sigma}=S\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-x^2/2}dx\right)}{\partial \sigma}=\frac{Se^{\frac{-X^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{T}\Bigg|_0^{d_1}=\frac{Se^{\frac{-d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{T}\Bigg| \quad (20)$$

Daha önce de belirtildiği gibi, opsiyonların değerini risksiz faiz oranı, vadeye kalan süre, baz malın fiyatı, volatilite ve kullanım fiyatı direkt olarak etkilemektedir. Ancak kullanım fiyatı; basit Avrupa opsiyonları için sabit olarak anlaşma yapıldığında belirlendiğinden, sabit bir parametre olarak kabul edilmiştir. Herhangi bir opsiyon için zaman içinde oluşabilecek değer farkı bu duyarlılık terimleri ile test edilebilmektedir. Öyleyse T anındaki bir opsiyonun değeri ile t anındaki bir opsiyonun değer farklarının opsiyon duyarlılığından kaynaklandığı düşünülebilir. Bu duyarlılık terimleri için;

$T > t$ durumunda;

Volatilite ve risksiz faiz oranları sabit kabul edildiğinde;

$$f(S_T,r,\sigma,T,K)=f(S_t,r,\sigma,t,K)+\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{\partial f}{\partial T}+\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial \sigma}+\frac{\partial f}{\partial K}+\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}+... \quad (21)$$

için nümerik olarak çözümlenebilir olduğunu varsayılsın.

Yukarıdaki denklemde görüldüğü üzere fark terimlerinden bazıları, duyarlılık parametreleridir. Bu kabullenme ile söz konusu duyarlılık terimlerinin; fiyat farkı denkleminde istatistiksel olarak anlamlı bulunması halinde yukarıdaki kabullenme kanıtlanmış olacaktır.

Model olarak oluşturulan denklem;

$$f(S_T,r,\sigma,T)=f(S_t,r,\sigma,T-1)+\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{\partial f}{\partial T}+\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial \sigma}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 S} \quad (22)$$

şeklinde kabul edilmiştir.

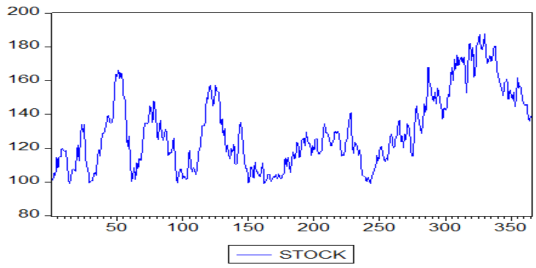
Temel olarak günlük opsiyon fiyatı değişimlerinin, bir gün önceki opsiyon değerine ve sırasıyla Delta, Theta, Rho, Vega ve Gamma olan duyarlılıklarla açıklanmaya çalışılmıştır. Model için bazı kabullenmeler yapılmıştır. Sözkonusu kabullenmeler Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1: Alım opsiyonu (call) için kabul edilen parametre değerleri

S(o);	100
µ;	0.005
dt;	0.00274 (1 gün)
σ; (Volatilite)	0.05
R; (Risksiz faiz)	0.05
Kullanım fiyatı;	110
Vade;	1 yıl

$S_{(0)}$ değeri; 0 anında opsiyon yazıldığında hisse senedinin kabul edilen değeridir ve 100 para birimi olarak kabul edilmiştir. μ değeri; hisse senedinin ortalama getiri oranı olarak kabul edilmiş ve 0 değerine oldukça yakın seçilerek rassal yürüyüş hipotezine de uygunluğu sağlanmıştır. İlgili zaman değişimi 1 gün için seçilmiş ve opsiyonun vadesi yazıldığı andan itibaren 1 yıl kabul edilmiştir. Sözleşmenin kullanım fiyatı ise 110 para birimi olarak belirlenmiştir. Risksiz faiz ve volatilite değerleri dönem boyunca sabit olarak kabul edilmiştir ki bu kabullenme B&S modelinin varsayımları arasındadır.

Şekil–1: Türetilen günlük hisse senedi fiyatları



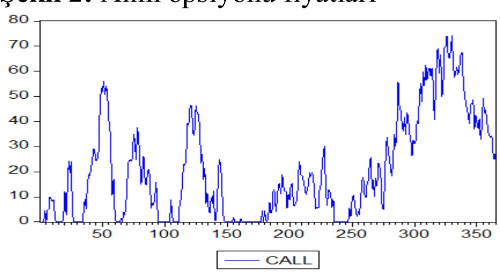
Türetilen fiyat grafiği incelendiğinde, hisse senedi fiyatlarının anlamlılığı açısından belirlenmiş bir destek eklenmiştir. Bu destek noktası 100 para birimi olarak kabul edilmiştir. Bu sayede türetilen hisse senedi fiyatları üzerine yazılacak alım opsiyonu değerleri, ilgili zaman aralığı dahilinde sıfırdan farklı ve pozitif olarak elde edilmiştir. Bu pozitif değerler, regresyon modelinin kurulması ve modelin anlamlılığı açısından oldukça faydalı olmuştur.

Regresyon modeli; $CALL_T = CALL_{T-1} + (\Delta fiyat)$

$CALL_T$=$CALL_{T-1}$+DELATACALL+GAMMACALL+RHOCALL+THETACALL+VEGA (23)

olarak kabul edilmiştir.

Şekil 2: Alım opsiyonu fiyatları



Alım opsiyonu grafiğinde dikkat çekici nokta; fiyat-zaman grafiğinin belirli bir trende sahip olmayışı, değerlerin devamlı aralıklarda değişkenlik göstermesidir. Bu tip bir yapı fraktal olarak kabul edilebilir. Fraktallar tuhaf resimleri olan, matematiksel nesnelerdir, bütün düzeylerde ve bütünün parçaları içinde aynı düzensizliği gösteren bir obje veya yapılardır (Hacısalihoğlu;

2007:150). Bu tip yapılarda gözlenen ilk özellik kendi içinde tekrarlı yapılar halinde olmasıdır. Bu aşamadan sonra incelenmesi gereken alım opsiyonu fiyat dizisinin uzun dönemli hafızaya sahip olma durumunun incelenmesidir.

Tablo 2: Denklem parametrelerinin anlamlılığı

Değişkenler	Katsayı	t-istatistiği
DELTACALL	-172.8355(***)	-19.0776
RHOCALL	-0.643469(***)	-18.15571
THETACALL	-28.95422(***)	-19.26344
VEGA	-5904.163(*)	-1.634568
CALL(-1)	0.4468(***)	15.99241

Not: Denklemde bağımsız değişenlerin anlamlılık katsayıları * ve *** şeklinde katsayı değerinin altında verilmiştir. * ve *** değerleri sırasıyla 15% ve 1% anlamlılık düzeylerinde kabul edildiğini göstermiştir.

Tablo 3: Kurulan Modele Ait İstatistiksel Değerleme Sonuçları

R^2	0.959829	Log likelihood değeri	-1019.817
Düzeltilmiş R-KARE	0.959381	Akaike Bilgi Kriteri	5.631188
Durbin-Watson Değeri	1.149198	Schwarz Kriteri	5.68472

Denklemde R^2 değerinin yüksek ve Durbin-Watson değerinden büyük olduğu gözlemlenmiştir. Bu sonuçlar altında kurulan regresyon denklemi seçilen bağımsız değişkenlerle bağımlı değişkeni tatmin edici derecede açıklamıştır. Ayrıca zaman serilerinde oldukça sık görülen sahte regresyon sorunu gözlemlenmemiştir.

Kurulan modelde tek aykırılık, gamma parametresinin kabul edilebilir anlamlılık seviyesinde olmaması nedeniyle denkleme dâhil edilemeyişidir. Bununla beraber vega parametresinin arzu edilen %5 anlamlılık düzeyinde olmaması ancak %15 anlamlılık düzeyinde kabul edilebileceği görülmektedir. Her iki olumsuzluğun nedeni olarak Geometrik Brownian Hareket ile fiyatların günlük veriler olarak türetilmesi gösterilebilir. Gamma parametresi hakkında "temel olarak opsiyon fiyatlarının baz varlık fiyatının ikinci türev değeri olduğu için bu derece küçük fiyat dalgalanmaları ile düzgün çalışmamaktadır" sonucuna varılabilir. Aynı şekilde; vega parametresinin anlamlılığını etkileyen birincil unsur opsiyon fiyatlarının deterministik bir trende sahip olmaktan uzak olması, hatta fraktal bir yapı olarak gözlemlenmesi olasıdır.

İkincil olarak B&S modeli baz alındığı için; modelin kabullenmesi olan dönem içindeki sabit risksiz faiz oranı kabullenmesinin, seçilen dönem içerisinde opsiyon fiyatlarının faiz oranına karşı duyarlılığını anlamsız hale getirmiş olduğu kabul edilebilir.

Call fiyatlarının zaman grafiği incelendiğinde; karmaşık bir yapı oluşturduğu görülmektedir. Bu yüzden hafızasızlığının incelenmesi, bir yandan fraktal yapının irdelenmesine diğer yandan B&S modelinin varsayımlarının test edilmesine olanak sağlamaktadır.

$(R/S)_t = c * t^H$ formülü Hurst sabitinin belirlenmesine yardımcı olmaktadır. Bu denklemde, (c) sabit katsayı, (H) Hurst üstel katsayısı, (R) kümülatif toplamdan sapma değerleri, (S) kümülatif toplamın standart sapması ve (t) ise zaman parametresidir. Çözümlenmesi için denklemin her iki kısmının logaritması alınmış ve üstel durumdaki Hurst değeri logaritmik özellik sonucu doğrusal bir katsayıya dönüşmüştür. Hurst üstel katsayısı (H)'nin tahmin edilebilmesi için her iki tarafın da logaritmasının alınması yeterli olmaktadır. Regresyon denkleminin eğimi ise Hurst katsayısının kendisi haline gelmektedir (Ural ve Demireli, 2009: 250–251).

Çalışmada hesaplanan regresyon eğiminin 0.3465 bulunması ve 0.5'den küçük olması; ilgili zaman serisinin uzun dönem hafıza etkisi göstermediğini kanıtlamıştır. Bu sonuç itibariyle; B&S modeli kullanılarak türetilen opsiyon fiyatlarının hafıza etkisi göstermediği ve modelin varsayımlarının testi sağlanmıştır.

SONUÇ

Çalışmada; opsiyon duyarlılıkları istatistiksel olarak incelenmiştir. Opsiyon fiyat serisindeki fiyat farklılıkların nedeni olarak; temel opsiyon duyarlılıkları kabul edilmiş ve ispatlanmıştır. Bu nedenle duyarlılık parametrelerinin opsiyon portföylerinin yönetiminde özellikle dinamik hedge ve alım-satım işlemlerinde oldukça önemli parametreler olduğu kanısına varılmıştır. B&S opsiyon modeli gibi adil fiyat üretme niteliği taşıyan bir model üzerinden üretilen opsiyon duyarlılıkları; sabit volatilite, sabit risksiz faiz oranı ve aşırı olmayan patikalar izleyen bir hisse senedi kabullenmeleri altında dahi özelikle hedge işlemleri için oldukça önemli bir karar mekanizmasıdır. Özellikle fiyat dalgalanmalarının yüksek olduğu kriz dönemlerinde, opsiyon piyasasının belirsizliğinin azaltılıp sağlıklı karar verilebilmesi açısından bu parametrelerin kullanılabilir olduğu gözlemlenmiştir.

Bununla beraber çalışmada "opsiyon fiyatlarının hafızasız olma" durumu incelenmiş ve varsayımlara uygun olduğu gözlemlenmiştir. Fiyat serisinin Euclid geometrisinden uzak, karmaşık bir cisim niteliği taşıması fiyat hareketlerinin yorumlanmasında fraktal geometrinin kullanılmasını gerektirmektedir. Özellikle piyasadaki hareketliliğin artması ile elde edilecek seriler ancak bu şekilde yorumlanabilir bir hal almaktadır.

KAYNAKÇA

Ural, M. ve Demireli, E. (2009). Hurst üstel katsayısı aracılığıyla fraktal yapı analizi ve İMKB'de bir uygulama. *Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi,* 23(2): 243-257.

Hacısalihoğlu, H. ve Yaz, N. (2007). *Fraktal geometri I*. Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Yayınları.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36(1): 394–419.

Mazıbaş, M. (2005). "İMKB Piyasalarındaki Volatilitenin Modellenmesi ve Öngörülmesi: Asimetrik GARCH Modelleri İle Bir Uygulama" İstanbul Üniversitesi Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu-7, Mayıs 26-27, İstanbul.

Önalan, Ö. (2004). *Finans mühendisliğinde matematiksel modelleme*. İstanbul: Avcıol Basım Yayım.

Özden, Ü. (2007). İmkb bileşik 100 endeksi getiri volatilitesinin analizi. *İstanbul Ticaret Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 7(13): 339-350

Sevütekin, M. ve Nargeleçekenler, M.(2006). İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda getiri volatilitesinin modellenmesi ve önraporlanması. *Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Dergisi*, 61(4), 243-364.

Talep, N. (1996). *Dynamic hedging: managing vanillia and exotic options*. New Jersey: John Willey & Sons Inc.

Yıldırak, K., Çalışkan, N. ve Çetinkaya, Ş. (2008). *Türev ürün fiyatlama teknikleri*. İstanbul, Literatür Yayınları.

Zhang P. (1997). Exotic options: *a guide to second generation options. New Jersey*: World Scientific Pres.