Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 22, Sayı 3, 1110-1113, 2018

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 22, Issue 3, 1110-1113, 2018

DOI: 10.19113/sdufenbed.430296

Uyumlu Kesirli Bir Dalga Denklemi Üzerine

Fatma Ayca CETINKAYA*[1]

[1]Mersin Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 33343, Mersin

(Alınış / Received: 04.06.2018, Kabul / Accepted: 18.09.2018, Online Yayınlanma / Published Online: 20.09.2018)

Anahtar Kelimeler
Uyumlu kesirli türev,
Özdeğer,
Özfonksiyon

Özet: Çalışmada, uyumlu kesirli kısmi türevle ifade edilen bir dalga denklemine, genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanarak elde edilen, uyumlu kesirli sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir.

On a Conformable Fractional Wave Equation

Keywords
Conformable fractional derivative,
Eigenvalue,
Eigenfunction

Abstract: This paper is devoted to examine the spectral properties of a conformable boundary value problem which is obtained from a conformable wave equation by applying the generalized Fourier method.

1. Giriş

Kesirli analiz, tam sayı olmayan mertebeden türev ve integral hesabı anlamına gelir. Keyfi mertebeli türev ve integrasyon kavramı ilk kez 1965 yılında Leibniz ve L'Hospital tarafından ortaya atılmıştır. Günümüzde, kesirli analiz konusu, oldukça popüler bir hal almış olup, konuyla ilgili daha detaylı bilgi için [1–8] çalışmalarına bakılabilir.

Kesirli türevlere ilişkin farklı tanımlar olmasına karşın, bu türevlerden en çok kullanılanları, sırasıyla integral gösterim ve Gamma fonksiyonunu içeren, Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleridir. Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleri de dahil literatürdeki tüm kesirli türev tanımlarının, klasik türev tanımıyla tek ortak yönü, hem kesirli türevin hem de klasik türevin lineerlik özelliğini sağlıyor olmasıdır. Lineerlik dışında yer alan özelliklerle ilgili olarak, kesirli türev ve klasik türev arasında bir uyuma rastlanmamaktadır. Örneğin, herhangi bir sabit sayının Riemann-Liouville kesirli türevi, klasik anlamdaki türeve benzer şekilde, sıfır olmamaktadır. Benzer şekilde, iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün klasik anlamdaki türevi ile bunların kesirli türevleri de herhangi bir uyum sergilemez. Yine, bütün kesirli türev tanımları, klasik türevin sağladığı zincir kuralını sağlamaz.

Yakın zamanda, *uyumlu kesirli türev* olarak isimlendirilen ve klasik türev tanımına dayandırılarak verilen yeni bir kesirli türev tanımı ortaya atılmıştır ([9]). Uyumlu kesirli türev, klasik türevin doğal özelliklerini sağlayarak, bilinen anlamdaki türev tanımını genişletmeyi ve bu türev tanımı kullanılarak elde edilen uyumlu kesirli diferansiyel denklemler yardımıyla diferansiyel denklemler teorisine yeni bakış açıları kazandırmayı amaçlar. Bu bakış açılarına örnek olarak ([10–18]) çalışmaları gösterilebilir. [10] da değişken katsayılı uyumlu kesirli lineer diferansiyel denklemler için Wronskiyen kavramı verilmiş ve değişken katsayılı kesirli diferansiyel denklemler için Abel formülü ispatlanmıştır. [11] de uyumlu kesirli ısı denkleminin çözümü verilmiştir. [14] de uyumlu kesirli türev için zincir kuralı, uyumlu kısmi integrasyon, uyumlu Gronwall eşitsizliği, uyumlu üstel fonksiyon ve uyumlu Laplace dönüşümü gibi kavramlar ele alınmıştır. [13] de kesirli Fourier serileri ve değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmıştır. [12] de ardışık lineer uyumlu kesirli diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. [15] de ikinci mertebeden lineer uyumlu kesirli diferansiyel denklemler için mertebe düşürme ve sabitlerin değişimi yöntemi, sabit katsayılı ve Cauchy-Euler tipli uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin biçimleri verildikten sonra, uyumlu kesirli özeşlenik problemler ele alınmış ve bu problemlerin özellikleri incelenmiştir. [16] da oransal türevli uyumlu kesirli diferansiyel denklemler ele alınmış ve bu denklemlerin özellikleri incelenmiştir. [17] ve [18] de ise, sırasıyla, zaman skalasında tanımlı Dirac denklemler sistemi ve Sturm-Liouville problemleri ele alınmış ve bu problemlerin bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

2. Materyal ve Metod

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1 ([9]) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda, α-ncı mertebeden *uyumlu kesirli türev* her $t>0$

* *İlgili yazar: faycacetinkaya@mersin.edu.tr*

ve $\alpha \in (0,1]$ için aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$

$a > 0$ olmak üzere, f fonksiyonu $(0,a)$ aralığında α-türevlenebilir ise ve $\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcutsa, f fonksiyonunun 0 noktasındaki α-türevi $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ ile tanımlıdır.

Teorem 2.1 ([9]) *Keyfi $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının bir $t > 0$ noktasında α-diferansiyellenebilir olduğu kabul edilsin. Bu durumda, aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1. *Her $a,b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af+bg) = aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g)$ dir.*
2. *Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dir.*
3. *Tüm $f(t) = \lambda$ sabit fonksiyonları için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dır.*
4. *$T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g)+gT_\alpha(f)$ sağlanır.*
5. *$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f)-fT_\alpha(g)}{g^2}$ sağlanır.*
6. *Bunlara ek olarak, eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilirse $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$ olur.*

Bazı özel fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıdaki gibidir:

1. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}$ dir.
2. $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha}\cos bx$ dir.
3. $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha}\sin bx$ dir.
4. $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$ dır.

Tanım 2.2 ([12]) Bir f fonksiyonunun $a \geq 0$ noktasından başlayan α-kesirli integrali

$$I^a_\alpha(f)(t) = I^a_1(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{\alpha-1}}d(x)$$

biçiminde verilebilir. Burada, integral genelleştirilmiş Riemann integralidir ve $\alpha \in (0,1]$ dir.

Teorem 2.2 ([12]) *$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ herhangi bir sürekli fonksiyon olsun ve $\alpha \in (0,1]$ sağlansın. Bu durumda tüm $t > a$ değerleri için $T_\alpha I_\alpha f(t) = f(t)$ olur.*

Teorem 2.3 ([12]) $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun bir α-diferansiyellenebilir fonksiyon olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $t > a$ için $I_\alpha T_\alpha f(t) = f(t) - f(a)$ olur.*

Teorem 2.4 ([14]) *$f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ α-diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. O halde,*

$$\int_a^b f(t)T_\alpha(g)(t)d_\alpha t = fg|_a^b - \int_a^b g(t)T_\alpha(f)d_\alpha(t)$$

kısmi integrasyon formülü sağlanır.

3. Bulgular

$0 \leq x \leq l$, $t > 0$ olmak üzere, homojen olmayan telin titreşimi denklemi ele alınsın:

$$\rho(x)\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial t^{2\alpha}} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(p(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right) - q(x)u. \quad (3.1)$$

Burada, $0 < \alpha \leq 1$ dır ve $p(x) > 0$, $\frac{\partial^\alpha p(x)}{\partial x^\alpha}$, $q(x)$ ve $\rho(x) > 0$ fonksiyonları $[0,l]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır.

(3.1) denklemi

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

sınır ve

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.3)$$

başlangıç koşulları ile birlikte dikkate alınsın ve X fonksiyonu sadece x değişkeninin, T fonksiyonu sadece t değişkeninin fonksiyonları olmak üzere (3.1) denkleminin sıfırdan farklı çözümü

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0 \quad (3.4)$$

biçiminde aransın. (3.4) ifadesi (3.1) de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} T(t)\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X(x)}{dx^\alpha}\right) &- q(x)T(t)X(x) \\ &= \rho(x)\frac{d^{2\alpha}T(t)}{dt^{2\alpha}}X(x) \end{aligned}$$

veya

$$\frac{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X(x)}{dx^\alpha}\right) - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{1}{T(t)}\frac{d^{2\alpha}T(t)}{dt^{2\alpha}} \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.5) in sol tarafı sadece x değişkenine ve sağ tarafı sadece t değişkenine bağlı olduğundan bu oran bir sabite eşittir. Bu sabit $-\lambda$ olarak alınırsa

$$\frac{d^{2\alpha}T(t)}{dt^{2\alpha}} + \lambda T(t) = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X(x)}{dx^\alpha}\right) - [q(x) - \lambda\rho(x)]X(x) = 0 \quad (3.7)$$

denklemleri elde edilir.

(3.2) deki birinci sınır koşulu

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0.$$

biçiminde değişkenlerine ayrılırsa, keyfi t değerleri için $T(t) \neq 0$ olacağından

$$X(0) = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.2) deki ikinci sınır koşulu için

$$X(l) = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.7) denklemi

$$L_\alpha \equiv \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)-q$$

operatörü yardımıyla

$$L_\alpha[X]+\lambda\rho(x)X=0 \tag{3.10}$$

biçiminde yazılabilir. Burada λ, x değişkeninden bağımsız bir parametre, p, q ve ρ fonksiyonları ise x değişkeninin reel değerli fonksiyonlarıdır.

L_α operatörünün tanım kümesi $D(L_\alpha)$ ile gösterilsin. Yani $D(L_\alpha)$, $[0,l]$ aralığında ikinci mertebeden α-sürekli türevlenebilir ve (3.8), (3.9) koşullarını sağlayan fonksiyonlardan oluşmuş bir küme olsun.

Teorem 3.1 *Her $X_1,X_2\in D(L_\alpha)$ için*

$$X_1L_\alpha[X_2]-X_2L_\alpha[X_1]=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[p(x)\left(X_1\frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha}-X_2\frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha}\right)\right] \tag{3.11}$$

Lagrange özdeşliği sağlanır.

İspat. L^α operatörünün tanımından

$$\begin{aligned} X_1L_\alpha[X_2]-X_2L_\alpha[X_1] &= X_1\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha}\right)-qX_1X_2\\ &- X_2\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha}\right)+qX_1X_2\\ &= X_1\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha}\right)\\ &- X_2\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha}\right)\\ &= \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left[p(x)\left(X_1\frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha}-X_2\frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha}\right)\right]\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat biter. □

Teorem 3.2 L^α operatörü özeşleniktir. Başka bir deyişle, keyfi X_1, $X_2\in D(L_\alpha)$ için

$$\langle L_\alpha[X_1],X_2\rangle=\langle X_1,L_\alpha[X_2]\rangle \tag{3.12}$$

sağlanır. Burada, $L^{2\alpha}[0,l]$ deki iç çarpım,

$$\langle f,g\rangle=\int_0^l f(x)\overline{g(x)}d_\alpha x$$

ile tanımlıdır.

İspat. Keyfi X_1, $X_2\in D(L_\alpha)$ fonksiyonları ele alınsın.

$$\begin{aligned}\langle L_\alpha[X_1],X_2\rangle-\langle X_1,L_\alpha[X_2]\rangle &= \int_0^l L_\alpha[X_1(x)]\overline{X_2(x)}d_\alpha x\\ &- \int_0^l X_1(x)\overline{L_\alpha[X_2(x)]}d_\alpha x\end{aligned}$$

olduğundan, uyumlu kesirli integraller için kısmi integrasyon formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}&\langle L_\alpha[X_1],X_2\rangle-\langle X_1,L_\alpha[X_2]\rangle=\\ &=\int_0^l\left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha}\right)-q(x)X_1(x)\right]X_2(x)d_\alpha x-\\ &-\int_0^l X_1(x)\left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha}\right)-q(x)X_2(x)\right]d_\alpha x\\ &=p(x)\left[\frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha}X_2(x)-\frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha}X_1(x)\right]_0^l\end{aligned}$$

elde edilir. $D(L_\alpha)$ kümesinin tanımı göz önüne alınırsa, bu eşitliğin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu görülür ve böylece ispat biter. □

Tanım 3.1 Aşağıdaki eşitliğin sağlanması durumunda f ve g fonksiyonlarına $\rho(x)>0$ ağırlık fonksiyonuna göre α-ortogonal fonksiyonlar denir:

$$\int_0^l\rho(x)f(x)g(x)d_\alpha x=0.$$

Teorem 3.3 (3.7)-(3.9) *sınır değer probleminin farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları $\rho(x)>0$ ağırlık fonksiyonuna göre α-ortogonaldir.*

İspat. $\lambda_1\neq\lambda_2$, (3.7)-(3.9) sınır değer probleminin iki farklı özdeğeri, X_1 ve X_2 ise sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$L_\alpha[X_1(x)]=\lambda_1\rho(x)X_1(x) \tag{3.13}$$

ve

$$L_\alpha[X_2(x)]=\lambda_2\rho(x)X_2(x) \tag{3.14}$$

eşitlikleri sağlanır. (3.13) eşitliği $X_2(x)$, (3.14) eşitliği $X_1(x)$ ile çarpılır ve elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$X_2(x)L_\alpha[X_1(x)]-X_1(x)L_\alpha[X_2(x)]=(\lambda_1-\lambda_2)\rho(x)X_1(x)X_2(x) \tag{3.15}$$

bulunur. (3.15) nın her iki tarafının integrali alınarak, (3.11) eşitliği göz önüne bulundurulursa,

$$\begin{aligned}&(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^l\rho(x)X_1(x)X_2(x)d_\alpha x=\\ &=\int_0^l\left(X_2(x)L_\alpha[X_1(x)]-X_1(x)L_\alpha[X_2(x)]\right)d_\alpha x=\\ &=p(x)\left(X_2(x)L_\alpha[X_1(x)]-X_1(x)L_\alpha[X_2(x)]\right)_0^l=0\end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda_1\neq\lambda_2$ olduğundan

$$\int_0^l\rho(x)X_1(x)X_2(x)d_\alpha x=0$$

bulunur. Böylece ispat biter. □

Teorem 3.4 (3.7)-(3.9) *sınır değer probleminin tüm özdeğerleri reeldir.*

İspat λ, (3.7)-(3.9) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $X(x)$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde $X(x)\neq 0$ dır ve $L_\alpha[X(x)]=\lambda\rho(x)X(x)$ sağlanır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}0 &= \langle L[X(x)],X(x)\rangle-\langle X(x),L[X(x)]\rangle\\ &= (\lambda-\overline{\lambda})\int_0^l\rho(x)\left|X(x)\right|^2d_\alpha x\end{aligned}$$

bulunur. $[0,l]$ de $\rho(x)>0$ olduğundan ve $X(x)\neq 0$ sağlandığından, integral altındaki ifade pozitiftir. Bu, $\lambda=\overline{\lambda}$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla, özdeğerler reel olur ve böylece ispat biter. □

Teorem 3.5 (3.7)-(3.9) *sınır değer probleminin her bir özdeğerine yalnızca bir lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelir.*

İspat. $X_1(x)$ ve $X_2(x)$, $L_\alpha[X(x)] = \lambda\rho(x)X(x)$ denkleminin iki lineer bağımsız çözümü olsun. Bu durumda,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha}\right) + (\lambda\rho(x) - q(x))X_1(x) = 0,$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha}\right) + (\lambda\rho(x) - q(x))X_2(x) = 0$$

sağlanır. İlk eşitlik $X_2(x)$, ikinci eşitlik $X_1(x)$ ile çarpılıp, elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$X_1(x)\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha}\right) - X_2(x)\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(p(x)\frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha}\right) = 0$$

bulunur. Bu eşitlik, 0 dan x e integre edilirse,

$$p(x)\left[X_1(x)\frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha} - \frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha}X_2(x)\right] =$$
$$p(0)\left[X_1(0)\frac{d^\alpha X_2(0)}{dx^\alpha} - \frac{d^\alpha X_1(0)}{dx^\alpha}X_2(0)\right]$$

elde edilir. $X_1(x)$ ve $X_2(x)$ fonksiyonları $x = 0$ noktasındaki sınır koşulunu sağladığından $X_1(0) = 0$ ve $X_2(0) = 0$ olur ve buradan da $W_\alpha(0;\ X_1,\ X_2) = 0$ eşitliğinin her $x \in [0, l]$ için sağlandığı sonucu çıkar. Bu son ifade $X_1(x)$ ve $X_2(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımlılığı için yeterli bir koşuldur. Buradan, bir λ özdeğerine yalnızca bir lineer bağımsız özfonksiyon karşılık geldiği sonucu çıkar. Böylece ispat biter. □

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, (3.1) uyumlu dalga denklemi ve (3.2), (3.3) koşullarından oluşturulmuş probleme, genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanmıştır. Daha sonra, tanımlanan operatör yardımıyla oluşturulmuş (3.7)-(3.9) sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir. Bu problem daha önce araştırılmamış olup, elde edilen sonuçların farklı fiziksel denklem ve sınır koşulları ile oluşturulmuş problemlerin incelenmesine olanak sağlamaları açısından literatüre faydalı olacağı düşünülmektedir.

Kaynakça

[1] Oldham, K. B., Spainer, J. 1974. The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Vol. 111. Academic Press, New York.

[2] Miller, K. S. 1993. An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. J. Wiley and Sons, New York.

[3] Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, USA.

[4] Kilbas, A., Srivastava H., Trujillo J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, in:Math. Studies. North-Holland, New York.

[5] Schneider, W., Wyss, W. 1989. Fractional Diffusion and Wave Equations. J. Math. Phys., 30(1), 134-144.

[6] Kulish, V. V., Lage, J. L. 2002. Application of Fractional Calculus to Fluid Mechanics. J. Fluids Eng., 124(3), 803-806.

[7] Magin, R. L. 2010. Fractional Calculus Models of Complex Dynamics in Biological Tissues. Comput. Math. Appl., 59(5), 1586-1593.

[8] Balachandran, K., Kiruthika, S., Rivero, M., Trujillo, J. J. 2012. Existence of Solutions for Fractional Delay Integrodifferential Equations. Journal of Applied Nonlinear Dynamics, 1, 309-319.

[9] Khalil, R., Horani, M. Al., Yousef, A., Sababheh, M. 2014. A New Definition of Fractional Derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70.

[10] Abu Hammad, M., Khalil, R. 2014. Abel's Formula and Wronskian for Conformable Fractional Differential Equations. Internat. J. Diff. Equ. Appl., 13(3), 177-183.

[11] Abu Hammad, M., Khalil, R. 2014. Conformable Fractional Heat Differential Equations. Internat. J. Pure. Appl. Math., 94(2), 215-221.

[12] Gokdogan, A., Unal, E., Celik, E. 2016. Existence and Uniqueness Theorems for Sequential Linear Conformable Fractional Differential Equations. Miskolc Mathematical Notes, 17(1), 267-279.

[13] Khalil, R., Abu-Shaab, H. 2015. Solution of Some Conformable Fractional Differential Equations. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 103(4), 667-673.

[14] Abdeljawad, T. 2015. On Conformable Fractional Calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 27(9), 57-66.

[15] Anderson, D. R., Ulness, D. J. 2016. Results for Conformable Differential Equations. Preprint.

[16] Anderson, D. R. 2017. Second-Order Self-Adjoint Differential Equations Using a Proportional-Derivative Controller. Commun. Appl. Nonlinear Anal., 24(1), 17-48.

[17] Gulsen, T., Yilmaz, E., Goktas, S. 2017. Conformable Fractional Dirac System on Time Scales. Journal of Inequalities and Applications, 2017(161), doi: 10.1186/s13660-017-1434-8.

[18] Gulsen, T., Yilmaz, E., Kemaloglu, H. 2018. Conformable Fractional Sturm-Liouville Equation and Some Existence Results on Time Scales. Turkish Journal of Mathematics, 42, 1348-1360.