Dumlupınar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Sayı: 1 Ocak 1999

GÖRÜNÜŞTE İLİŞKİSİZ REGRESYON DENKLEMLERİNİN ETKİNLİĞİ ÜZERİNDE HATALAR ARASINDAKİ KORELASYONUN VE BAĞIMSIZ DEĞİŞKENLER ARASINDAKİ KORELASYONUN ETKİSİNİN İNCELENMESİ

Yard. Doç. Dr. Nevin UZGÖREN*

ÖZET

Bir regresyon denklemine ilişkin hata terimi, diğer regresyon denklemlerinin hata terimleri ile ilişkili ise, bu denklemlere Görünüşte ilişkisiz regresyon denklemleri (GİRD) adı verilmektedir. Bu denklemlerin etkin kestirimleri ise Sıradan Enküçük Kareler Yöntemi (SEKY) yerine hatalar arasındaki ilişkiyi de dikkate alan Aitken' in Genelleştirilmiş Enküçük Kareler Yöntemi (GEKY) kullanılarak elde edilmektedir.

Bu doğrultuda çalışmanın amacı, GİRD' nin kestiriminde SEKY yerine GEKY' ni kullanmakla etkinlikte sağlanacak kazanca hatalar arasındaki korelasyonun artan yönde bir etkisi ve karşılıklı bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun ise azaltıcı yönde bir etkisi olduğunu bir uygulama yardımıyla göstermektir.

* D.P.Ü. İ.İ.B.F. İşletme bölümü

1. BAŞLANGIÇ

GİRD'nin GEKY ile birleşik genelleştirilmiş kestirimi, genellikle her bir eşitlik için ayrı olarak uygulanan SEKY' den daha etkin kestirimler sağladığı bilinmektedir. Ayrıca etkinlik kazancının, hata korelasyonunun karesinin arttırıcı bir fonksiyonu ve açıklayıcı değişkenlerin iki kümesinin karşılıklı korelasyonunun bir azaltıcı fonksiyonu olduğu Zellner (1962) ve Zellner & Huang (1962) tarafından yapılan çalışmalarla net bir şekilde açıklanmıştır[1]. Daha sonra etkinlikte ne kadarlık bir kazancın sağlanacağı sorusuna ilişkin olarak Dwivedi ve Srivastava (1978) detaylı bir çalışma yaparak aşağıdaki iki genel sonuca ulaşmışlardır[2].

i. GİRD' nin hataları arasındaki korelasyon ne kadar yüksek ise, GEKY' nin sağladığı kazanç da o denli yüksektir.

ii. GİRD' nin X matrisleri arasındaki korelasyon ne kadar küçük ise, GEK'nin kullanılmasıyla sağlanan kazanç da o denli yüksektir.

Elde edilen bu iki sonucun geçerliliğini hem teorik hem de uygulamalı olarak daha açık bir şekilde gösterebilmek amacıyla, bu çalışmada sadece iki denklem (M=2) içeren aşağıdaki görünüşte ilişkisiz regresyon denklemi dikkate alınmıştır:

$$\begin{aligned} y_1 &= X_1\beta_1 + u_1 \\ y_2 &= X_2\beta_2 + u_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Burada u_1 ve u_2 aynı zamanda ilişkili hata terimleri olup, aralarındaki ilişki kısaca şu şekilde gösterilir[3].

$$E(u_{mt}u_{ps}) = \sigma_{mp} \quad t=s \text{ için}$$
$$=0 \quad t \neq s \text{ için}$$

Şimdi bu iki denklemli görünüşte ilişkisiz regresyon modeli üzerinde etkinlik kazancını inceleyelim.

2. ETKİNLİK ÜZERİNDE HATALAR ARASINDAKİ KORELASYONUN ROLÜ

Etkinlik üzerinde hatalar arasındaki korelasyonun etkisini incelerken (1) nolu modeli gözönüne alalım ve bu modeli kısaca aşağıdaki formda gösterelim:

---

[1] James K. BINKLEY, '**The Effect of Variable Correlation on the Efficiency of Seemingly Unrelated Regression in a Two-Equation Model**', Journal of the American Statistical Association, 77, 1982, p. 890.

[2] William H. GREENE, **Economic Analysis**, Mcmillan Publishing Company, 1990, p. 512.

[3] Ayrıntılı bilgi için bkz. Nevin UZGÖREN, **Görünüşte İlişkisiz Regresyon Denklemlerinin Kestiriminde Kullanılan Yöntemlerin Etkinliklerinin Araştırılması -Türkiye İmalat Sanayiinde Bir Uygulama**, Osmangazi Ü. Fen Bilimleri Enst. (Basılmamış doktora tezi), 1996, s. 24-75.

$$Y = X\beta + u \qquad (2)$$

Burada; y: (2nx1) boyutlu bir vektör,

X: $(2nx \sum_{m=1}^{2} k_m)$ boyutlu bir matris,

β : $\sum_{m=1}^{2} k_m x1)$ boyutlu bir vektör,

u: (2nx1) boyutlu bir vektördür.

β ' nın GEK kestiricisi ve varyans-kovaryans matrisi şu şekildedir:

$$\tilde{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1} y$$
$$Var - kov(\tilde{\beta}) = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad (3)$$

β ' nın SEK kestiricisi ve varyans- kovaryans matrisi ise şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$
$$Var - kov(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1} \qquad (4)$$

Etkinlikte sağlanacak kazancı görebilmek için β kestiricilerinin genelleştirilmiş varyansından yararlanılır. Sonuç olarak β'nın Aitken kestiricisinin genelleştirilmiş varyansı, tek-denklemli SEK kestiricisinin genelleştirilmiş varyansına oranı alınır ve bu oran α olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\alpha = \frac{|Var - kov(\tilde{\beta})|}{|Var - kov(\hat{\beta})|} \qquad (5)$$

$$\alpha = \frac{|X'X|^2}{|X'\Omega X||X'\Omega^{-1}X|}$$

α 1' den küçük olduğu müddetçe GEK kestiricisinin SEK kestiricisine oranla daha etkin olduğu kabul edilir[4].

Şimdi α oranında yer alan her bir determinantın neye eşit olduğunu görelim:

$$|X'X| = \begin{vmatrix} X'_1 X_1 & 0 \\ 0 & X'_2 X_2 \end{vmatrix} = |X'_1 X_1||X'_2 X_2|$$

[4] David S. HUANG, **Regression and Econometric Method**, John Wiley&Sons, Inc., 1970, p.199-200.

$$X'\Omega X = \begin{bmatrix} \sigma_{11}X'_1 X_1 & \sigma_{12}X'_1 X_2 \\ \sigma_{21}X'_2 X_1 & \sigma_{22}X'_2 X_2 \end{bmatrix}$$

$$X'\Omega^{-1} X = \begin{bmatrix} \sigma^{11}X'_1 X_1 & \sigma^{12}X'_1 X_2 \\ \sigma^{21}X'_2 X_1 & \sigma^{22}X'_2 X_2 \end{bmatrix}$$

Burada $\Omega = (\sigma_{ij})$ ve $\Omega^{-1} = (\sigma^{ij})$ ' dir.

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

eşitliği yoluyla,

$$|X'\Omega X| = |\sigma_{11}X'_1 X_1| \left| \sigma_{22}X'_2 X_2 - \frac{\sigma_{12}\sigma_{21}}{\sigma_{11}} X'_2 X_1 (X'_1 X_1)^{-1} X'_1 X_2 \right|$$

$$= \sigma_{11}^{k_1} \sigma_{22}^{k_2} |X'_1 X_1| |X'_2 X_2 - \rho^2 X'_2 P_1 X_2|$$

sonucuna ulaşılır. Burada;

k_1: 1. denklemdeki bağımsız değişken sayısı

k_2: 2. denklemdeki bağımsız değişken sayısı

$$\rho^2 = \frac{\sigma_{12}\sigma_{21}}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \quad \text{buradan} \quad \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$$

ρ : iki denklemdeki hatalar arasındaki korelasyon katsayısıdır[5]

$$P_1 = X_1 (X'_1 X_1)^{-1} X'_1$$

Benzer şekilde;

$$|X'\Omega^{-1} X| = (\sigma^{11})^{k_1} (\sigma^{22})^{k_2} |X'_1 X_1| |X'_2 X_2 - \rho^2 X'_2 P_1 X_2|$$

Etkinlik oranı α tersine çevrildiğinde aşağıdaki sonuca ulaşılır:

---

[5] Arnold ZELLNER and David HUANG, '**Further Properties of Efficient Estimators For Seemingly Unrelated Regression Equations**', International Economic Review, 3, 3, 1962, p.307.

$$\frac{1}{\alpha} = (\sigma_{11}\sigma^{11})^{k_1}(\sigma_{22}\sigma^{22})^{k_2} \frac{\left|X'_2(I-\rho^2 P_1)X_2\right|^2}{\left|X'_2 X_2\right|^2}$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma_{11}} & -\dfrac{\rho}{(\sigma_{11}\sigma_{22})^{1/2}} \\ -\dfrac{\rho}{(\sigma_{11}\sigma_{22})^{1/2}} & \dfrac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$\sigma^{11} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_{11}} \qquad \sigma^{22} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_{22}}$$

Buradan

$$\frac{1}{\alpha} = (1-\rho^2)^{-(k_1+k_2)} \frac{\left|X'_2(I-\rho^2 P_1)X_2\right|^2}{\left|X'_2 X_2\right|^2}$$

sonucuna ulaşırız[6].

Etkinlik kazancı α bu durumda şu orana dönüşecektir:

$$\alpha = (1-\rho^2)^{k_1+k_2} \frac{\left|X'_2 X_2\right|^2}{\left|X'_2(I-\rho^2 P_1)X_2\right|^2} \qquad (7)$$

İki-denklemli bir sistem için $X'_1 X_2 = 0$ olduğunda etkinlik kazancı

$$\alpha = (1-\rho^2)^{k_1+k_2} \qquad (8)$$

ye eşit olacaktır. Bu son ifade bağımsız değişkenlerin ortogonal olması durumunda gerçekleştirilebilecek maximum kazancı gösterir. $X'_1 X_2 \neq 0$ olduğunda maximum kazanç elde edilemeyecektir[7]

[6] Lin CHUN-TU, '**The Efficiency of Least Squares Estimators of a Seemingly Unrelated Regression Model**', Commun. Statist.-Simula, Marcel Decker, Inc., 20(4), 1991, p. 920-922.
[7] ZELLNER and HUANG, p. 307.

Görüldüğü gibi bağımsız değişkenler arasında korelasyon sözkonusu değilse (yani $X_1'X_2=0$ ise), SEKY yerine GEKY kullanmakla etkinlikte elde edilebilecek kazanç hatalar arasındaki korelasyonun yüksekliğine bağlıdır. Hatalar arası korelasyon ne kadar yüksek ise GEKY' ni kullanmakla etkinlikte sağlanacak kazançta o denli büyüktür. Kısaca GEKY' nin SEKY' ne oranla etkinlik kazancı karşılıklı denklemlerdeki hatalar arası korelasyonun bir artırıcı fonksiyonudur.

Şimdi $\tilde{\beta}_1$ kestiricisinin varyansı üzerinde hatalar arası korelasyonun etkisini inceleyelim:

İki-denklemli bir GİRM' nde Aitken kestiricisinin varyans-kovaryans matrisinin aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz:

$$Var-kov(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} \sigma^{11}X'_1X_1 & \sigma^{12}X'_1X_2 \\ \sigma^{21}X'_2X_1 & \sigma^{22}X'_2X_2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{9}$$

Amacımız doğrultusunda bu inverste en önemli altmatris birinci denklemin katsayı kestiricisine ilişkin varyans-kovaryans matrisidir ve (6)' ya dayalı olarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$Var-kov(\tilde{\beta}_1) = \left[\frac{1}{\sigma_{11}(1-\rho^2)} X'_1X_1 - \frac{\rho^2}{\sigma_{11}(1-\rho^2)} X'_1X_2(X'_2X_2)^{-1}X'_2X_1 \right]^{-1} \tag{10}$$

$\tilde{\beta}_1$ ın genelleştirilmiş varyansı ise aşağıdaki gibidir :

$$\left|V(\tilde{\beta}_1)\right| = (1-\rho^2)^{k_1} \left|\sigma_{11}(X'_1X_1)^{-1}\right| \left|I - \rho^2(X'_1X_1)^{-1}X'_1X_2(X'_2X_2)^{-1}X'_2X_1\right|^{-1}$$

$\left|\sigma_{11}(X'_1X_1)^{-1}\right|$ ilk denklemin tek-denklemli enküçük kareler kestiricisinin genelleştirilmiş varyansıdır. Eğer $X_1'X_2=0$ olursa, $\tilde{\beta}_1$ in genelleştirilmiş varyansı

$$\left|V(\tilde{\beta}_1)\right| = (1-\rho^2)^{k_1} \left|V(\hat{\beta}_1)\right| \tag{11}$$

ya eşit olur. Bu durumda $\tilde{\beta}_1$' nın genelleştirilmiş varyansı ρ' nun alacağı değere bağlı olarak β_1' in enküçük kareler kestiricisinin genelleştirilmiş varyansından daha küçük ya da eşit olur[8].

[8] ZELLNER and HUANG, p. 307-308.

ETKİNLİK ÜZERİNDE BAĞIMSIZ DEĞİŞKENLER ARASINDAKİ KORELASYONUN ROLÜ

Şimdi amacımız, iki denklemli bir Görünüşte İlişkisiz Regresyon Modeli (GİRM) nde GEK yoluyla kestirilen özel bir katsayı üzerinde bağımsız değişkenler arası korelasyonun etkisini (hem aynı denklem içindeki bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun, hem de iki denklemdeki bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun etkisini) göstermektir[9].

Bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun etkisini gösterebilmek için aşağıdaki iki-denklemli regresyon modelini ele alalım:

$$\begin{aligned} y_1 &= V\beta_1 + u_1 \\ y_2 &= W\beta_2 + u_2 \end{aligned} \qquad (12)$$

$E(u_1 u_2) = \Omega$ olarak tanımlanmakta ve hata varyans- kovaryans matrisi Ω' nın bilindiği varsayılmaktadır. GİR kestiricisi için varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir:

$$(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Yine bu matrisin köşegen elemanlarıyla (A_{11}, A_{22}) ilgileniyoruz ve bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun etkisini gösterebilmek için dikkatimizi özellikle A_{11} üzerinde topluyoruz

u_1 ve u_2 arasındaki korelasyon ρ olduğunda β_1 'in varyans-kovaryans matrisi (A_{11}) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$A_{11} = \sigma_{11}\left[\frac{1}{1-\rho^2}V'V - \frac{\rho^2}{1-\rho^2}V'W(W'W)^{-1}W'V\right]^{-1} \qquad (14)$$

Eğer $\rho = 0$ ise SEKY yerine GEKY' i kullanmakla etkinlik kazancı yoktur. Eğer V ve W ortogonal ise (yani $V'W$=0 ise) maksimum olası etkinlik kazancı SEK varyansı çarpı (1-ρ^2)'dir, eğer $V'W \neq 0$ ise etkinlik kazancı azalacaktır. Amacımız A_{11} i daha çok bilgi verici yapmaktır, yani bağımsız değişkenler arası korelasyonun etkisini en iyi şekilde gösterebilecek forma dönüştürmektir[10].

---

[9] BINKLEY, p.890-891

[10] James K. BINKLEY and Carl H. NELSON, **'A note on the Efficiency of Seemingly Unrelated Regression'**, The American Statistican, 1988, 42, p. 137.

A_{11}' i şu şekilde de gösterebiliriz:

$$A_{11} = \sigma^2(1-\rho^2)\left[V'V - \rho^2 V'W(W'W)^{-1}W'V\right]^{-1} \tag{15}$$

Burada amaç GEK yoluyla kestirilen bir özel katsayının varyansı üzerinde bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun etkisini göstermek olduğundan, dikkatimizi birinci denklemdeki tek bir bağımsız değişken üzerinde toplayacağız.

V=[z X] olsun, burada z ilgilenilen değişkenin içerdiği bir nx1 boyutlu vektördür. z üzerindeki katsayıyı β_{11} olarak gösterelim.

Değişkenler arası korelasyonu inceleyebilmek için aşağıda kestirilecek regresyon modellerinin bir kümesi gerekmektedir:

$$\begin{array}{lll} \text{i.} & z = X\hat{\alpha} + \hat{e} & R^2_{zX} \\ \text{ii.} & \hat{e} = W\hat{\gamma} + \hat{f} & R^2_{\hat{e}W} \\ \text{iii.} & \bar{e} = X\hat{\xi} + \hat{r} & R^2_{\bar{e}X} \end{array} \tag{16}$$

Bu modeller içinde en önemli nicelikler $\hat{e}$' dır. Artıklar ($\hat{e}$ lar) X üzerinde z' nin regresyonundan elde edilmiştir. $\bar{e}$ W üzerinde $\hat{e}$' nın regresyonundan elde edilen $\hat{e}$' nın önkestirim değerleridir ve R^2 ler bu modellere ilişkin çoklu belirlilik katsayılarıdır.

Amaçlarımız doğrultusunda β_{11}' in SEK kestiriminin ($\hat{\beta}_{11}$) varyansına ihtiyaç vardır. Bu varyans da

$$Var-kov(\hat{\beta}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} z'z & z'X \\ X'z & X'X \end{bmatrix}^{-1} \tag{17}$$

matrisinin sol üst elemanına karşılık gelir:

$$Var(\hat{\beta}_{11}) = \sigma^2\left[z'z - z'X(X'X)^{-1}X'z\right]^{-1} \tag{18}$$

Köşeli parantez içindeki ifade X üzerinde z' nin regresyonundan elde artık kareler toplamıdır, yani $\hat{e}'\hat{e}$ dır. Böylece β_{11}' in SEK kestiricisinin varyansı şu şekilde de gösterilebilir:

$$Var(\hat{\beta}_{11}) = \sigma^2 / \hat{e}'\hat{e} = \sigma^2 / z'z(1-R^2_{zX}) \tag{19}$$

Bu açık olarak, β_{11}' in SEK kestiricisinin varyansını şişirecek olan z' nin içerdiği çoklu bağlantı miktarını gösterir.

β_{11}' in GEK kestiricisini $\tilde{\beta}_{11}$ olarak gösterelim. $\tilde{\beta}_{11}$' in varyansını gösterebilmek için (15)' de V yerine [z X] koyalım:

$$A_{11} = \sigma^2(1-\rho^2)\begin{bmatrix} z'z-\rho^2 z'W(W'W)^{-1}W'z & z'X-\rho^2 z'W(W'W)^{-1}W'X \\ X'z-\rho^2 X'W(W'W)^{-1}W'z & X'X-\rho^2 X'W(W'W)^{-1}W'X \end{bmatrix}^{-1} \quad (20)$$

(20) nolu eşitlik kısaca şuna eşittir:

$$A_{11} = \sigma^2(1-\rho^2)\begin{bmatrix} z'Mz & z'MX \\ X'Mz & X'MX \end{bmatrix}^{-1} \quad (21)$$

Burada, $M = \left[1-\rho^2 W(W'W)^{-1}W'\right]$ şeklindedir.

(21)' in sol üst elemanı β_{11}' in varyansıdır ve bu eleman şuna eşittir:

$$Var(\tilde{\beta}_{11}) = \sigma^2(1-\rho^2)\left[z'Mz - z'MX(X'MX)^{-1}X'Mz\right]^{-1} \quad (22)$$

β_{11}' in varyansı bu durumda kısaca şu şekilde de gösterilebilir[11] :

$$Var(\tilde{\beta}_{11}) = \sigma^2(1-\rho^2)/\hat{e}'\hat{e}\left[1-\rho^2 R^2_{\hat{e}W}-\theta\right] \quad (23)$$

$$0 \le \theta \le \left[(\rho^4/(1-\rho^2))R^2_{\bar{e}X}, \rho^2(1-R^2_{\hat{e}W})\right]$$

(23) nolu eşitliği (19) nolu eşitliğe bölerek GEK varyansının SEK varyansına oranını elde ederiz:

$$\frac{\sigma^2(1-\rho^2)/\hat{e}'\hat{e}\left[1-\rho^2 R^2_{\hat{e}W}-\theta\right]}{\sigma^2/\hat{e}'\hat{e}} \quad (24)$$

$$(1-\rho^2)/\left(1-\rho^2 R^2_{\hat{e}W}-\theta\right) \le 1$$

Son eşitlikten dolayı

$$\theta \le \rho^2\left(1-R^2_{\hat{e}W}\right)$$

dir.

---

[11] Ayrıntılı bilgi için bkz. BINKLEY, p. 890-895.

(24) nolu ifade ($\hat{e}$ denklem içindeki çoklu bağıntıya bağlı olduğu için), bir denklem içindeki çoklu bağıntının derecesine bağlı olarak aynı zamanda GEK' in etkinliği üzerine çapraz eşitliklerdeki değişken korelasyonunun etkisini de gösterir. Açıkça görüldüğü gibi $R^2_{\hat{e}W}$ ile GEK' in etkinliği arasında negatif bir ilişki vardır. Bu ilişki gereğince amaçlarımız doğrultusunda $\rho^2 R^2_{\hat{e}W}$' ye oranla θ' nın önemidir. Ancak yapılan çalışmalar gerçekte θ' nın birçok durumda $\rho^2 R^2_{\hat{e}W}$' ye oranla önemsiz olduğunu göstermiştir. Bu durumda (24)' de θ' ya önem verilmemesi gerçekte büyük bir zorluk yaratmayacaktır ve GEK varyansının SEK varyansına oranı yeter derecede

$$(1-\rho^2)/\left(1-\rho^2 R^2_{\hat{e}W}\right) \qquad \textbf{(25)}$$

ye yaklaşır.

GEK' in SEK' e oranla etkinlik kazancını belirlerken bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonunun etkisi (25) nolu formüle dayanarak maddeler halinde şu şekilde açıklanabilir:

i. $R^2_{\hat{e}W} = 0$ olması durumunda, $\hat{e}$ W' ya ortogonaldir. Bu durumda (25) $(1-\rho^2)$' ye eşit olacağından GEK varyansı SEK varyansı çarpı $(1-\rho^2)$ olacaktır. z üzerindeki katsayı böylece tam etkinlik kazancına ulaşacaktır.

ii. $R^2_{\hat{e}W} = 1$ olması durumunda, $\hat{e}$ ve $\bar{e}$ eşit olacağından $R^2_{\hat{e}X}$ ve $R^2_{\hat{e}X}$ sıfıra eşit olur. Bu durumda (25) 1' e eşit olacağından GEK' i kullanmaktan dolayı etkinlik kazancı olmayacaktır. Eğer her iki denklemde benzer bağımsız değişkenlere sahipse herbir değişken için $R^2_{\hat{e}W} = 1$' dir. Eğer bir denklemdeki bağımsız değişkenler, diğer denklemdeki bağımsız değişkenlerin bir altkümesi ise, ilk denklemin tümü için $R^2_{\hat{e}W}$ 1 olacaktır.

iii. Diğer bir özel durum z' nin her iki denklemde de görüldüğü zaman meydana gelir. $R^2_{\hat{z}X}$' in sıfır olduğunu varsayalım, yani z ile ilk denklemdeki diğer bağımsız değişkenler arasında çoklu bağıntı yoktur. O zaman $\hat{e}=z$, $R^2_{\hat{e}W} = 1$' dir ve hiç etkinlik kazancı yoktur. Bununla birlikte eğer $R^2_{\hat{z}X} \neq 0$, $z \neq \hat{e}$ ise $R^2_{\hat{e}W}$' nin 1 olması gerekmez. Bu nedenle, bir bağımsız değişken denklemdeki diğer bağımsız değişkenlerle çoklu bağlantı içinde olmadıkça her iki denklemde görülen bir değişken üzerindeki katsayının GEK kestiriminde etkinlik kazancı yoktur [12]

[12] BINKLEY, p. 890-893.

4. UYGULAMA

GEKY'nin SEKY' ne oranla etkinliği üzerinde hem hatalar arasındaki hem de bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun etkisini gösterebilmek amacıyla 1996 yılında tamamlanan doktora tez çalışmasından yararlanılmıştır[13]. Bu çalışmada 11 yıllık gözleme dayanarak (1981-1991) Türkiye imalat sanayi alt gruplarına ilişkin üretim fonksiyonları SEKY ile tahmin edilmiş ve SEK artıkları arasında yüksek korelasyona ($\hat{\rho} = 0.694$) sahip aşağıdaki iki imalat sanayi alt grubu belirlenmiştir:

1. Gıda, içki, tütün sanayi

2. Metal, eşya, makine ve teçhizat, ulaşım aracı, ilmi ve mesleki ölçme aletleri sanayi

Daha sonra belirlenen bu sanayi kollarına ilişkin üretim fonksiyonlarının kestirimi, hata varyans-kovaryans matrisini de dikkate alan GEKY ya da diğer adıyla 2-Aşamalı Aitken Yöntemi (2-AAY) ile yapılmıştır.

1 ve 2 nolu sanayi gruplarına ilişkin üretim fonksiyonlarının SEKY ve

2-AAY ile elde edilen kestirim sonuçları şu şekildedir:

Y: Üretim (milyar TL)

X_1: Yılda çalışılan işçi-saat toplamı

X_2: Sabit sermayeye yıl içinde yapılan gayri safi ilaveler (milyar TL)

SEKY sonuçları:

$$\hat{Y}_1 = 38 + 22.48X_1 + 4.50X_2$$
$$(2571)\ (10.88)\qquad (25.74)$$
$$\hat{Y}_2 = 153 + 13.418X_1 + 0.73X_2$$
$$(2061)\ (2.797)\qquad (20.79)$$

GEKY (2-AAY) sonuçları):

$$\tilde{Y}_1 = 28.994 + 15.465X_1 + 6.372X_2$$
$$(1921.56)\ (9.06)\qquad (19.21)$$
$$\tilde{Y}_2 = -698.637 + 10.287X_1 + 11.165X_2$$
$$(1566.71)\qquad (2.24)\qquad (15.68)$$

Sonuçlar toplu halde şu şekilde de gösterilebilir:

[13] Ayrıntılı bilgi için bkz. UZGÖREN, s. 76-86.

	β_{10}	β_{11}	β_{12}	β_{20}	β_{21}	β_{22}
SEKY	38	22.48	4.50	153	13.418	0.73
	(2571)	(10.88)	(25.74)	(2061)	(2.797)	(20.79)
GEKY	28.994	15.445	6.372	-698.637	10.287	11.165
	(1921.56)	(9.06)	(19.21)	(1566.71)	(2.24)	(15.68)

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, SEKY yerine GEKY kullanmakla, yani hatalar arasındaki ilişkiyi de hesaba katan bir kestirim yöntemi kullanmakla katsayı kestirimlerinin varyanslarında önemli derecede azalmalar olduğu görülmektedir. Etkinlikte sağlanan bu kazanç daha önceden belirtildiği gibi hatalar arasındaki korelasyona ve bağımsız değişkenler arasındaki korelasyona bağlıdır.

Şimdi etkinlik üzerinde hem hatalar arasındaki korelasyonun hem de bağımsız değişkenler arasıdaki korelasyonun etkisini sayısal sonuçlara dayalı olarak inceleyelim.

4.1. Hatalar Arasındaki Korelasyonun Etkisinin İncelenmesi

Bağımsız değişkenlerin ortogonal olması durumunda, yani $X_1'X_2 = 0$ olması durumunda gerçekleştirilebilecek maksimum kazanç $(1-\rho^2)$ kadardır. $X_1'X_2 \neq 0$ olması durumunda ise maksimum kazanç elde edilemeyecektir.

1 ve 2 nolu denklemlerin SEK artıkları arasındaki korelasyon $\hat{\rho} = 0.694$' dür ve $X_1'X_2 = 0$ olması durumunda sağlanabilecek maksimum kazanç $1-\rho^2$=1-(0.694)^2=0.518 kadardır. Bunun anlamı $X_1'X_2 = 0$ olması durumunda

$$Var(\tilde{\beta}_{mi}) = (1-\rho^2)Var(\hat{\beta}_{mi}) \qquad m=1,2 \qquad i=1,2,3$$

ya eşit olmasıdır, yani her bir katsayı varyansı için elde edilmesi mümkün olan minimum değer 0.518 çarpı kestirilen SEK varyansı kadardır. Bağımsız değişkenler arasında ortogonallik koşulu sağlanmadığında bağımsız değişkenler arasındaki çoklu bağlantının derecesine bağlı olarak etkinlik kazancı da azalacaktır.

$X_1'X_2 = 0$ olması durumunda GEK kestirimlerinin varyansları şu değerlere eşit olacaktır (bu değerler ortogonallik koşulunun sağlanması durumunda her bir katsayı için elde edilebilecek maksimum etkinlik kazancını göstermektedir):

$Var(\tilde{\beta}_{10})=3424001$ $\qquad$ $Var(\tilde{\beta}_{20})=2200319$

$Var(\tilde{\beta}_{11})=61.32$ $\qquad$ $Var(\tilde{\beta}_{21})=4.05$

$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_{12})=343.20$ $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_{22})=223.89$

GEK kestirimlerinin varyansları çalışmada şu şekilde bulunmuştur:

$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_{10})=3692412$ $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_{20})=2454565$

$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_{11})=82$ $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_{21})=5$

$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_{12})=369$ $\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_{22})=246$

Gerçekleştirilen varyanslar $X_1'X_2=0$ olması durumunda elde edilecek varyans değerlerine oldukça yakındır (kesinlikle bu değerden daha küçük değildir), bu da bize iki denklemde yer alan bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun çok yüksek olmadığını göstermektedir.

4.2. Bağımsız Değişkenler Arasındaki Korelasyonun Etkisinin İncelenmesi

Bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun etkinlik üzerindeki rolü için iki ölçütten yararlanılmıştır. Bunlardan ilki gerçekte elde edilen GEK varyansının SEK varyansına oranıdır,

1. $\dfrac{Var(\tilde{\beta}_{mi})}{Var(\hat{\beta}_{mi})}$ m=1,2 i=1,2,3

ve diğeri kısım 3'de ayrıntılı bir şekilde açıklanan

2. $\dfrac{(1-\rho^2)}{(1-\rho^2 R_{\hat{e}w}^2)}$

yaklaşık formülü ile hesaplanan orandır.

Çalışmanın 3 nolu kısmında açıklandığı gibi $\hat{e}$ bir denklem içindeki çoklu bağlantıya bağlı olduğu için 2 nolu oran GEK' in etkinliği üzerinde çapraz denklemlerdeki değişken korelasyonunun etkisinin bir denklemdeki çoklu bağlantının derecesine bağlı olduğunu gösterir. Çünkü $R_{\hat{e}w}^2=0$ olması durumunda 2 nolu oran $(1-\rho^2)$ olacağından GEK varyansı SEK varyansı çarpı $(1-\rho^2)$ kadar olacaktır. $R_{\hat{e}w}^2$ değeri 0' dan 1' e doğru yaklaştıkça etkinlikte sağlanacak kazanç da o denli azalacaktır. Yani 2 nolu oran için en önemli değer $R_{\hat{e}w}^2$' nin alacağı değerdir, çünkü bu değer paragrafın başında da belirtildiği gibi ; hem aynı denklemdeki bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun etkisini hem de çapraz denklemlerdeki korelasyonun etkisini yansıtmaktadır.

Çalışmada her katsayı için çoklu belirlilik katsayısının 4 ölçüsü gösterilmiştir ve SEK' e oranla GEK' in etkinlik kazancının iki ölçüsü ortaya konulmuştur. Elde edilen sonuçlar Tablo 1' de gösterilmiştir.

Tablo 1. Değişken Korelasyonu ve GEK'in Etkinliği

					$\hat{\rho} = 0.694$	$\hat{\rho}^2 = 0.482$
	Çoklu belirlilik katsayıları				Etkinlik kazancı ölçüleri	
Değişken	R^2_{zX}	R^2_{zW}	$R^2_{\hat{e}W}$	$R^2_{\hat{e}X}$	1. Gerçek	2. Yaklaşık
	Denklem 1: Gıda sanavi					
z_1	0.004	0.53	0.53	0.10	0.693	0.696
z_2	0.004	0.15	0.15	0.00	0.557	0.558
	Denklem 2: Metal sanayi					
z_1	0.023	0.49	0.45	0.05	0.639	0.661
z_2	0.023	0.223	0.182	0.00	0.569	0.568

Görüldüğü gibi 2 nolu formül yardımıyla elde edilen etkinlik kazanç değerleri gerçekleştirilen kazanca çok yakın değerler vermiştir. Bu da 2 nolu formülde bulunması gereken , ancak gözardı edilen

$$\frac{(1-\rho^2)}{(1-\rho^2 R^2_{\hat{e}w}-\theta)}$$

θ değerinin $\rho^2 R^2_{\hat{e}W}$ ' ye oranla önemli olmadığını sayısal olarak da göstermektedir. Zaten Tablo 1' de $R^2_{\hat{e}X}$ değerlerine de yer verilmesinin nedeni etkinlik kazancını belirlerken θ ' nın $R^2_{\hat{e}W}$ ' ye göre gerçekten çok önemsiz olduğunu göstermektir, çünkü $R^2_{\hat{e}X}$ ' in aldığı değerler incelenecek olursa hepsi sıfıra oldukça yakın değerlerdir.

Denklem içindeki çoklu bağlantı oldukça düşüktür, denklemler arasındaki çoklu bağlantı ise daha yüksektir. Etkinlik üzerinde denklemlerdeki karşılıklı değişkenler arasındaki korelasyonun ($R^2_{\hat{e}W}$) etkisi, denklem içindeki bütün değişkenler arasındaki korelasyonun (R^2_{zX}) etkisinden daha önemlidir ve $R^2_{\hat{e}W}$ ile GEK etkinliği arasındaki negatif ilişki Tablo 1' den açıkça görülmektedir.

Çalışmada GEK varyansının SEK varyansına oranı için ulaşılabilir minimum değer $1-\rho^2$=1-(0.694)^2=0.518' dir. Sonuçlar incelendiğinde, $R^2_{\bar{x}W}$ ' nin çok yüksek olmaması nedeniyle (hem denklem içindeki değişkenler arasındaki çoklu bağlantının hem de çapraz denklemlerdeki değişkenler arasındaki çoklu bağlantının önemli olmaması nedeniyle) sonuçların elde edilebilecek minimum değere çok yakın olduğunu gösterir. Yani gerçekleştirilen kazanç potansiyel kazanca oldukça yakındır.

Sonuç olarak çalışmada, bağımsız değişkenler arasındaki korelasyonun GEK etkinliği üzerindeki etkisinin önemli boyutlarda olmadığını görülmektedir.

5. SONUÇ

GİRD' nin kestiriminde, tek-denklem kestirimine dayanan SEKY' nin kullanılması durumunda sapmasız ve tutarlı kestirimler elde edilebilir, ancak bu kestirimler etkin değildir. Bu nedenle GİRD' nin kestiriminde, hatalar arasındaki ilişkiyi de dikkate alarak parametrelerin eşanlı kestirimine olanak veren GEKY ya da diğer adıyla 2-aşamalı Aitken yöntemi (2-AAY) kullanılmaktadır.

Yapılan çalışmalar, hata varyans-kovaryans matrisi Ω ' nın bilinmesi durumunda GEKY' nin her büyüklükte örnek için SEK kestiricisinden daha etkin kestirimler verdiğini ve ayrıca Ω ' nın bilinmemesi durumunda bile 2-aşamalı Aitken kestiricisinin sonlu örneklerde dahi SEK kestiricisine oranla etkinlikte net bir kazanç sağladığını ve hatta sonlu örnek varyanslarının orta büyüklükte örnekler için bile asimtotik varyanslardan büyük olmadığını göstermiştir.

Ayrıca etkinlikte sağlanacak kazancın iki faktöre bağlı olarak değiştiği belirlenmiş ve bunlar kısaca şu şekilde özetlenmiştir:

i. GİRD' nin hataları arasındaki korelasyon ne kadar yüksek ise, GEKY' nin sağladığı kazanç da o denli yüksektir.

ii. GİRD' nin X matrisleri arasındaki korelasyon ne kadar düşük ise, GEKY' nin kullanılmasıyla sağlanan kazanç da o denli yüksektir.

Bu bağlamda çalışmada bu iki faktörün geçerliliği ilk olarak teorik bazda ortaya konulmaya çalışılmış ve daha sonra bir uygulama yoluyla karşılaştırma yoluna gidilmiştir. Uygulama sonuçları ile teorik anlatımların çelişmediği görülmüş ve etkinlik kazancının gerçekten bu iki faktöre bağlı olduğu net bir şekilde ortaya konulmuştur.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

ZELLNER Arnold and HUANG David, **'Further Properties of Efficient Estimators For Seemingly Unrelated Regression Equations'**, International Economic Review, 3, 3, 1962, 307-308

HUANG David S., **Regression and Econometric Method,** John Wiley&Sons, Inc., 1970, 199-200.

BINKLEY James K., **'The Effect of Variable Correlation on the Efficiency of Seemingly Unrelated Regression in a Two-Equation Model'**, Journal of the American Statistical Association, 77, 1982, 890-895.

BINKLEY James K. and NELSON Carl H., **'A note on the Efficiency of Seemingly Unrelated Regression'**, The American Statistican, 1988, 42, 137.

CHUN-TU Lin, **'The Efficiency of Least Squares Estimators of a Seemingly Unrelated Regression Model'**, Commun. Statist.-Simula, Mareel Decker, Inc., 20(4), 1991, 920-922.

UZGÖREN Nevin, **Görünüşte İlişkisiz Regresyon Denklemlerinin Kestiriminde Kullanılan Yöntemlerin Etkinliklerinin Araştırılması -Türkiye İmalat Sanayiinde Bir Uygulama,** Osmangazi Ü. Fen Bilimleri Enst. (Basılmamış doktora tezi), 1996, 24-86.

GREENE William H., **Economic Analysis,** Mcmillan Publishing Company, 1990,512.