Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 22, Özel Sayı, 270-276, 2018

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 22, Special Issue, 270-276, 2018

DOI: 10.19113/sdufbed.18471

Aksiyomlanabilir Teorilerin Tam Tutarlı Uzantılarının Hesaplanabilirlik Dereceleri

Ahmet ÇEVİK[*1]

[1]Jandarma ve Sahil Güvenlik Akademisi, Fen Bilimleri Bölümü, 06805, Ankara

(Alınış / Received: 22.09.2017, Kabul / Accepted: 20.06.2018, Online Yayınlanma / Published Online: 17.07.2018)

Anahtar Kelimeler
Matematiksel mantık,
Hesaplanabilirlik,
Turing dereceleri,
Aksiyomlanabilir teoriler,
Cantor uzayı,
Π^0_1 sınıfları

Özet: Bu makalede matematiksel mantık ve temellerin bir dalı olan *hesaplanabilirlik kuramı* ile ilişkili Π^0_1 sınıfları (kümeleri) çalışılmıştır. ZFC kümeler kuramı veya Peano aritmetiği gibi aksiyomlanabilir herhangi bir teorinin tam tutarlı uzantılarının kümesi, bir Π^0_1 sınıfı olarak görülür. Benzer şekilde herhangi bir Π^0_1 sınıfı, aksiyomlanabilir bir teorinin tam tutarlı uzantılarının kümesi olarak ifade edilebilir. Aynı zamanda Π^0_1 sınıfları, doğal sayılar kümesi ω olarak gösterilirse, 2^ω Cantor uzayının hesaplanabilir ve kapalı altkümeleri olarak görülebilir. Bu yüzden bir Π^0_1 sınıfı, sonlu sayıda dallanmaya sahip hesaplanabilir bir ağacın sonsuz yollarının kümesi olarak ele alınabilir. Kabaca tanımıyla, bir $A \subset \omega$ kümesinin hesaplanabilir olması demek, verilen herhangi bir $x \in \omega$ için $x \in A$ olup olmadığına algoritmik bir hesaplama sonucunda cevap verebilmek demektir. Hesaplamada ek olarak başka kümenin eleman bilgisi kullanıldığında hesaplanabilirlik kavramı göreceleştirilmiş olur. Herhangi bir $B \subset \omega$ kümesinin bir $A \subset \omega$ kümesini hesaplaması $A \leq_T B$ ifadesi ile gösterilsin. A ve B kümelerinin *katılımı* $A \oplus B = \{2i : i \in A\} \cup \{2i+1 : i \in B\}$ olarak tanımlansın. $\emptyset'$ *durma kümesini* göstersin. Bu çalışmada kanıtlayacağımız teorem şudur: **(Teorem 3.10).** Öyle bir aksiyomlanabilir teori T vardır ki eğer R ve S kümeleri T'nin tam tutarlı olan herhangi iki uzantısı ise, $\emptyset' \not\leq_T R \oplus S$. Bu sonuç, Jockusch ve Soare'ın [8] kesişim baz teoreminin birleşim (katılım) için doğru olmadığını göstermektedir.

Computability Degrees of Complete Consistent Extensions of Recursively Axiomatizable Theories

Keywords
Mathematical logic,
Computability,
Turing degrees,
Axiomatizable theories,
Cantor space,
Π^0_1 classes

Abstract: In this paper, we study Π^0_1 classes (sets) in computability theory, a branch of mathematical logic and foundations. The set of complete consistent extensions of any recursively axiomatizable theory, such as ZFC set theory and Peano arithmetic, is a Π^0_1 class. Similarly, any Π^0_1 class can be seen as the set of complete consistent extensions of some recursively axiomatizable theory. Moreover, if we denote the set of natural numbers by ω, a Π^0_1 class is a computably closed subset of 2^ω Cantor space. Therefore, any Π^0_1 class can be seen as the set of infinite paths of a finitely branching computable tree. Roughly defined, a set $A \subset \omega$ is said to be computable if there is an algorithmic method that, for any given $x \in \omega$, decides whether or not $x \in A$. The notion of computability becomes relativized if we use in the computation, an additional information of another set. If a set $B \subset \omega$ computes a set $A \subset \omega$ then we denote this by $A \leq_T B$. The *join* of two sets A and B is defined by $A \oplus B = \{2i : i \in A\} \cup \{2i+1 : i \in B\}$. We let $\emptyset'$ denote the *halting set*. The theorem we prove in this paper is the following. **(Theorem 3.10).** There exists a recursively axiomatizable theory T such that if R and S are any two complete consistent extensions T, then $\emptyset' \leq_T R \oplus S$. This proves that the union analogue the capping basis theorem of Jockusch and Soare [8], does not hold.

1. Giriş

Hesaplanabilirlik kuramı, doğal sayılar kümesinden doğal sayılar kümesine tanımlı olan fonksiyonları inceler. Sezgisel anlamda her algoritma “hesaplanabilir" olan bir *kısmi fonksiyon* teşkil eder. Kısmi olmasının sebebi algoritmaların her argümanda sonlanacağının garantisinin olmamasıdır. Bu makalede okuyucunun Turing makinelerini, Turing hesaplanabilirlik kavramını, kısmi hesaplanabilir fonksiyonlar ve Turing indirgeme gibi temel bazı kavramları bildiğini varsayıyoruz. Makalenin bu bölümünün devamında, çalışmamızla ilgili kısaca bazı temel bilgiler ve varsayımlar verilmiştir. Ancak, hesaplanabilirlik kuramına daha kapsamlı bir giriş için okur,

* İlgili yazar: a.cevik@hotmail.com

[11][2][6][10] kaynaklarına veya Türkçe kaynak olarak yayımlanan [5] çalışmamıza başvurabilir.

1.1. Kısmi hesaplanabilir fonksiyonlar

Doğal sayılar kümesi ω olarak gösterilsin. Gödel kodlaması kullanarak kısmi hesaplanabilir fonksiyonların hesaplanabilir bir listesinin (effective enumeration) verildiğini varsayalım. Yani, öyle bir Turing makinesi vardır ki bu Turing makinesi, verilen herhangi bir $i \in \omega$ için, bize i'inci kısmi hesaplanabilir fonksiyonun tanımını verir.

- Her $i \in \omega$ için, Ψ_i ifadesi i'inci kısmi hesaplanabilir fonksiyonu göstersin.

- Her $i \in \omega$ için $\Psi_i = \Psi_j$ koşulunu sağlayan sayılabilir sonsuz sayıda $j \in \omega$ vardır.

- Her $A \subset \omega$ ve her $n \in \omega$ için, $\Psi_i(A;n)$ ifadesini Ψ_i nin A bilgesinde (oracle) ve n argümanındaki görüntüsü olarak kullanalım. Eğer $\Psi_i(A;n)$ hesaplaması tanımlı ise bunu $\Psi_i(A;n) \downarrow$ olarak gösterelim. Eğer tanımsız ise $\Psi_i(A;n) \uparrow$ şeklinde ifade edelim. Herhangi bir bilge kümesi verilmemişse $\Psi_i(\emptyset;n)$ hesaplamasını kısaca $\Psi_i(n)$ şeklinde de ifade edebiliriz.

- $\Psi_i(A)$ ifadesini her $n \in \omega$ için $\Psi_i(A;n)$ ye eşit olan kısmi hesaplanabilir fonksiyonu göstermek için kullanalım.

  Bir $A \subset \omega$ kümesinin $\chi_A(x)$ *karakteristik fonksiyonu*, eğer $x \in A$ ise 1; eğer $x \notin A$ ise 0 olarak tanımlansın. Buna göre bir $A \subset \omega$ kümesini 01-karakteristik dizisiyle gösterebiliriz. Kısmi hesaplanabilir fonksiyonlarda o halde, örneğin, $\Psi_i(A) = B$ gibi bir ifade yazmamız mümkündür.

Olası bütün ikili karakter sonlu *dizilerini* $2^{<\omega}$ kümesi olarak gösterelim. Örnek vermek gerekirse 10011 veya 0101011, iki karakterli birer dizidir. $\langle x,y \rangle$ ifadesi (x,y) ikilisinin Cantor'un standart $\omega \times \omega \to \omega$ eşleşme fonksiyonu altındaki görüntüsünü belirtsin. Herhangi bir σ ve τ dizileri için, $\sigma * \tau$ ifadesi σ nın ardından τ nun *bitiştirilmesini* göstersin. Örneğin eğer $\sigma = 110$ ve $\tau = 0100$ ise, $\sigma * \tau = 1100100$ olur. Herhangi bir σ dizisinin uzunluğu $|\sigma|$ olarak gösterilsin. Uzunluğu 0 olan *boş dizi*, $\emptyset$ olarak ifade edilsin. Eğer $\sigma \subset \tau$ ise σ ya τ nun *başlangıç kesimi* denir. Bu durumda τ dizisi σ nın *uzantısıdır*. Örneğin, $\sigma = 101$ ve $\tau = 1011$ ise, $\sigma \subset \tau$ ifadesi doğrudur. Ancak $\tau = 1100$ olarak alınırsa σ dizisi τ nun başlangıç kesimi değildir. Benzer şekilde τ da σ nın başlangıç kesimi değildir. Böyle dizilere *uyumsuz* diziler denir. Aksi halde bu dizilere *uyumlu* denir. Eğer $\sigma \subset \tau$ ise ve $\sigma \subset \sigma_1 \subset \tau$ koşulunu sağlayan, σ dan ve τ dan farklı bir σ_1 dizisi yoksa, τ dizisine σ nın *ardılı* diyelim. Bu durumda σ, τ nun *öncülü* olur.

Bilge Turing makineleri (Oracle Turing machine) için bilinmesi gereken bazı temel özellikleri verelim.

- Kısmi hesaplanabilir fonksiyonlar algoritmik olarak hesaplanabilen bütün fonksiyonları ifade eder.

- Hesaplama adımsaldır. Eğer bir $\Psi_i(A;n)$ hesaplaması s adımına kadar tanımlı oluyorsa, bunu $\Psi_i(A;n)[s] \downarrow$ şeklinde ifade ediyoruz. Bu durumda fonksiyonun görüntüsü, hesaplamanın çıktısı olarak tanımlanır. Eğer $\Psi_i(A;n)[s] \downarrow$ ise her $t \geq s$ için $\Psi_i(A;n)[t] \downarrow= \Psi_i(A;n)[s] \downarrow$ olur.

- Bir hesaplama durduğunda sonlu adım geçmiş olacaktır. O halde Turing makinesinin bilge bandından sadece sonlu sayıda hücre bilgisi okunmuş olacaktır. Eğer $\Psi_i(A;n) \downarrow= m$ ise ve bu hesaplama bilge bandından $< |\sigma|$ tane hücre okuduktan sonra tanımlı hale geliyorsa bunu $\Psi_i(\sigma;n) \downarrow= m$ ile ifade ederiz. O halde eğer $\Psi_i(A;n) = m$ ise her $B \supset \sigma$ için $\Psi_i(B;n) = m$ ifadesini sağlayan A'nın bir $\sigma \in 2^{<\omega}$ başlangıç kesimi vardır.

- Evrensel bir Turing makinesi vardır. Yani her $A \subset \omega$ ve $j,n \in \omega$ için $\Psi_i(A;\langle j,n \rangle) = \Psi_j(A;n)$ ifadesini sağlayan (eğer her iki hesaplama da tanımlı ve birbirine eşit ise) bir i vardır.

1.2. Turing dereceleri

Verilen $A \subset \omega$ ve $B \subset \omega$ kümeleri için, eğer $\Psi_i(B) = A$ ifadesini sağlayan bir i varsa A kümesi B'ye *Turing indirgenebilir* denir ve bu $A \leq_T B$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda B kümesi A kümesini *hesaplar*.

- Eğer hem $A \leq_T B$ hem de $B \leq_T A$ ise bu kümelere *Turing eşdeğer* denir ve $A \equiv_T B$ olarak ifade edilir.

- Bir A kümesinin *Turing derecesi* $\mathbf{a} = \{B : A \equiv_T B\}$ kümesi ile ifade edilir. Her Turing derecesi sayılabilir sonsuz tane eleman içerir.

- Verilen $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ Turing dereceleri için, eğer her $A \in \mathbf{a}$ ve $B \in \mathbf{b}$ için $A \leq_T B$ ise $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ deriz. Ayrıca $\leq_T$ ilişkisi geçişli (transitive) olduğuna göre önceki tanımladığımız ilişki $A \leq_T B$ ifadesini sağlayan *herhangi bir* $A \in \mathbf{a}$ ve $B \in \mathbf{b}$ kümeleri var olduğunda yeterli olacaktır. Yani $\leq_T$ ilişkisi, doğal sayıların altkümeleri üzerinde bir kısmı sıralama tanımlar.

- $A \oplus B$ ifadesi $\{2i : i \in A\} \cup \{2i+1 : i \in B\}$ kümesini göstersin ve buna A ve B'nin *katılımı* diyelim. Eğer bir küme hem A'yı hem de B'yi hesaplıyorsa $A \oplus B$ kümesini de hesaplayacaktır. Ayrıca $A \oplus B$ kümesi de hem A'yı hem de B'yi hesapladığından dolayı herhangi iki tane Turing derecesinin *en küçük üst sınırı* vardır. Fakat bu derecelerin en büyük alt sınırı her zaman olmayabilir.

1.3. Zıplama ve etkili numaralanabilir kümeler

Bir A kümesinin *durma kümesi* A' şeklinde gösterilir ve

$$A' = \{i : \Psi_i(A;i) \downarrow\}.$$

kümesi ile ifade edilir. Bununla ilgili temel özellikleri aşağıda verelim.

- A' kümesi her zaman A kümesinin *kesin şekilde* üstündedir. O halde en büyük Turing derecesinden bahsedilemez.

- Eğer $A \leq_T B$ ise $A' \leq_T B'$ olur.
- Herhangi bir $\mathbf{a}$ derecesi için $\mathbf{a}$ derecesinin *zıplaması*, yani $\mathbf{a}'$, $A \in \mathbf{a}$ için A' kümesinin derecesini verir. Özellikle, $\mathbf{0}'$ derecesi $\mathbf{0}$ derecesinin zıplamasıdır ve her $\mathbf{a}$ için $\mathbf{a}' \geq \mathbf{0}'$ ifadesi sağlanır.
- Eğer bir kümenin elemanları algoritmik şekilde listelenebiliyorsa (sıralı olması gerekmez) bu kümeye *etkili numaralanabilir* (recursively enumerable) küme denir. Daha teknik olarak söylemek gerekirse, eğer bir i için $A = \{n : \Psi_i(n)\downarrow\}$ ise A kümesi etkili numaralanabilir kümedir. W_i kümesi i'inci etkili numaralanabilir kümeyi göstersin. Yani $W_i = \{n : \Psi_i(n)\downarrow\}$. Ayrıca $W_{i,s}$ kümesi, W_i deki sadece s adımına kadar listelenen elemanları belirtsin. Yani, $W_{i,s} = \{n : \Psi_i(n)[s]\downarrow\}$. Burada eğer $\Psi_i(n)[s]\downarrow$ ise $s \geq n$ olduğunu varsayabiliriz.
- $\emptyset'$ ile ifade edilen durma kümesi hesaplanabilir olmayan fakat etkili numaralanabilir olan bir kümedir.
- Eğer A bir etkili numaralanabilir kümeyse ve bir $\mathbf{a}$ derecesi için $A \in \mathbf{a}$ ise, $\mathbf{a}$'ya *etkili numaralanabilir derece* diyoruz. $\emptyset'$ kümesi her etkili numaralanabilir kümeyi hesapladığı için her etkili numaralanabilir derece $\mathbf{0}'$ derecesinin altındadır.
- $\mathbf{0}'$ derecesinin altında olan kümeler limitte hesaplanabilir olan kümeleri verir. Yani, $A \leq_T \emptyset'$ ancak ve ancak $\chi_A(x) = \lim_{s\to\infty} g(x,s)$ ifadesini sağlayan hesaplanabilir bir g fonksiyonu varsa.

Bütün Turing dereceleri sınıfını $\mathbf{D}$ ile gösterelim. Bütün etkili numaralanabilir Turing dereceler sınıfını ise $\mathbf{R}$ ile gösteriyoruz. $\mathbf{D} - \mathbf{R} \neq \emptyset$ olduğunu biliyoruz. Bu sınıfların topolojik ve cebirsel özellikleri bu yazının konusunun dışında olduğundan okuyucunun [11] veya, Türkçe için, [5] kaynaklarına bakmasını öneriyoruz.

2. Π^0_1 Sınıfları

Π^0_1 sınıfları, 2^ω Cantor uzayının hesaplanabilir kapalı (computably closed) altkümeleri olarak görülür. ZFC kümeler kuramı veya Peano aritmetiği (PA) gibi aksiyomlanabilir teorilerin tam tutarlı (complete consistent) uzantıları bir Π^0_1 sınıfı olarak görülür. Benzer şekilde herhangi bir Π^0_1 sınıfı, aksiyomlanabilir bir teorinin tam tutarlı uzantılarının kümesi olarak ifade edilebilir. Bunun dışında, sillojistik mantıklarda [12][14][13][9], "Bütün x'ler bir y'dir" biçimdeki her önerme, Π^0_1 sınıfının bir elemanı olarak ifade edilebilir. Π^0_1 sınıfları konusunun Türkçe literatürde daha önce çalışılmamış olmasından dolayı bazı temel teoremlerin kanıtlarını makalemizde vereceğiz. Bu konuyla ilgili daha kapsamlı bir kaynak için [4]'e bakınız.

2.1. Cantor uzayı

Tanım 2.1. 2^ω *Cantor uzayı* şu şekilde bir çarpım topolojisine sahiptir: Her $\sigma \in 2^{<\omega}$ dizisinin, *basit açık kümesini*

$$[\![\sigma]\!] = \{A : A \in 2^\omega \ \& \ A \supset \sigma\}.$$

şeklinde ifade edelim. Cantor uzayının *açık kümeleri* basit açık kümelerin birleşimidir. Bir $A \subset 2^{<\omega}$ kümesi,

$$[\![A]\!] = \bigcup_{\sigma\in A}[\![\sigma]\!].$$

açık kümesinin *açık gösterimi* olarak ifade edilir.

Tanım 2.2. (i) Eğer hesaplanabilir bir $A \subset \omega$ kümesi için $\mathscr{A} = [\![A]\!]$ ise, $\mathscr{A} \subset 2^\omega$ kümesine *hesaplanabilir açık* küme denir. Eğer bir $\mathscr{A}$ kümesinin tümleyeni, yani $\overline{\mathscr{A}}$, hesaplanabilir açık ise $\mathscr{A}$ kümesine *hesaplanabilir kapalı* denir.

(ii) Eğer $X \in \mathscr{A} \iff \forall n\, \varphi(n,X)$ ifadesini sağlayan, $n \in \omega$ ve $X \in 2^\omega$ olmak üzere, hesaplanabilir bir $\varphi(n,X)$ bağıntısı varsa $\mathscr{A} \subset 2^\omega$ kümesine Π^0_1 *sınıfı* denir.

Tanım 2.3. $2^{<\omega}$ kümesinin herhangi bir altkümesine *ağaç* denir. Eğer herhangi bir σ için σ nın verilen bir T ağacının içinde olup olmadığına algoritmik olarak karar verilebilirse T ağacına *hesaplanabilir* denir.

$A \upharpoonright n$ ifadesi A kümesinin $m \leq n$ elemanları ile sınırlandırılmış olan kümeyi göstersin. Bir T ağacının sonsuz dallarının kümesi

$$[T] = \{A : \forall n\,(A \upharpoonright n \in T)\}.$$

şeklinde ifade edilir.

Tanımlardan yola çıkarak aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Teorem 2.4. *$\mathscr{A} \subset 2^\omega$ bir küme olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.*

(i) Hesaplanabilir bir T ağacı için $\mathscr{A} = [T]$ sağlanır.

(ii) $\mathscr{A}$ kümesi hesaplanabilir kapalıdır.

(iii) $\mathscr{A}$ bir Π^0_1 sınıfıdır.

Biçimsel bir dildeki cümlelerden oluşan kümeye *teori* denir. Eğer verilen bir cümle ve bir T teorisinin aksiyomları için, bu cümlenin T'nin aksiyomu olup olmadığına karar veren bir algoritma varsa bu teoriye *aksiyomlanabilir teori* denir. Eğer bir teoriden çelişki çıkarılmıyorsa bu teoriye *tutarlı* denir. Verilen bir teori ve herhangi bir φ cümlesi için, eğer φ veya $\neg\varphi$ cümlelerinden biri T teorisinden kanıtlanabiliyorsa bu teoriye *tam* denir. S bir tutarlı teori olsun. Her tutarlı teorinin tam tutarlı bir uzantsının var olduğunu, matematiksel mantığın temel sonuçlarından biri olduğunu biliyoruz. Tabii ki Gödel'in Eksiklik Teoremi'nden dolayı, yeterince aritmetiği ifade eden teorilerin tam tutarlı uzantıları hesaplanabilir olamaz. Herhangi bir aksiyomatik teorinin tam tutarlı uzantılarının kümesi bir Π^0_1 sınıfı olarak görülebilir.

Teorem 2.5 (Shoenfield, 1960)**.** *Aksiyomatik bir teorinin tam tutarlı uzantılar kümesi bir Π^0_1 sınıfıdır.*

Teorem 2.6 (Ehrenfeuscht, 1961)**.** *Herhangi bir Π^0_1 sınıfı, aksiyomatik bir teorinin tam tutarlı uzantılarının kümesi olarak gösterilebilir.*

Cantor uzayının tıkızlık özelliğinden bahsetmek faydalı olacaktır. Bu özellik aşağıdaki ile verilir.

Önsav 2.7 (Zayıf König Önsavı)**.** *Sonlu sayıda dallanmaya sahip olan hesaplanabilir her sonsuz $T \subset 2^{<\omega}$ ağacının sonsuz bir dalı vardır.*

İspat. Alta kapalı hesaplanabilir bir T ağacının verildiğini varsayalım. T üzerinde sonsuz bir dal olan $A = \bigcup_{s\in\omega} \sigma_s$ kümesi inşa edeceğiz.
Başlangıç adımı: $\sigma_0 = \emptyset$ olsun.
Tümevarım adımı: T'de sonsuz tane uzantıya sahip olan σ_s verilsin. Eğer T'de $\sigma * 0$ ın sonsuz tane uzantısı varsa σ_{s+1} dizisi bu olsun. Aksi durumda $\sigma_{s+1} = \sigma_s * 1$ olsun. □

Tanım 2.8. $T \subset 2^{<\omega}$ bir ağaç olsun.

(i) Her $\sigma \in T$ için, T_σ kümesi

$$T_\sigma = \{\tau \in T : \sigma \text{ ve } \tau \text{ uyumludur}\}.$$

olarak tanımlansın ve bu küme σ *ile uyumlu altağacı (altkümeyi)* göstersin.

(ii) Eğer $[T_\sigma] = \{A\}$ koşulunu sağlayan bir σ varsa $A \in [T]$ kümesine *izole* denir. Aksi durumda A kümesine *limit noktası* denir.

Görülüyor ki σ dizisi A kümesini izole ettiği zaman $[\![\sigma]\!] \cap [T] = \{A\}$ koşulu sağlanmış olur ve bu durumda σ dizisinin T'de uyumsuz bir uzantısı olmaz.

Tanım 2.9. Eğer $A \in [T]$ koşulunu sağlayan bir $A \supset \sigma$ kümesi varsa $\sigma \in T$ dizine *sonsuz uzantılı* denir. Eğer $\sigma \in T$ ve hiçbir $\tau \supset \sigma$ için $\tau \in T$ değilse, σ ya *yaprak* denir.

Teorem 2.10. *$T \subset 2^{<\omega}$ hesaplanabilir bir ağaç olsun.*

(i) Eğer $[T]$ boş değilse $A \leq_T \emptyset'$ koşulunu sağlayan bir $A \in [T]$ kümesi vardır.[1]

(ii) $[T]$ sınıfının boş olmadığı durumda, en sol dalın (sözlük sırasına göre) derecesi etkili numaralanabilirdir.

İspat. (i) $A = \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n$ olmak üzere bir $\emptyset'$ bilgesi kullanarak bir $A \in [T]$ kümesi tanımlayacağız.
$\sigma_0 = \emptyset$ olsun. Sonsuz uzantılı bir σ_n verildiğini varsayalım. Eğer $\sigma_n * 0$ sonsuz uzantılıysa $\sigma_{n+1} = \sigma_n * 0$ olsun. Aksi halde $\sigma_{n+1} = \sigma_n * 1$ olsun.
(ii) A kümesi T'nin en solundaki dal olsun, yani sözlük sırasına göre $[T]$ sınıfının en küçük elemanı. $B \equiv_T A$ koşulunu sağlayan etkili numaralanabilir bir B kümesi inşa edeceğiz. T'deki sonsuz uzantılı olmayan dizileri listeleyeceğiz. T'deki sonsuz uzantılı dizilerin kümesi bir Π^0_1 sınıfıdır. O halde bu kümenin tümleyeni bir Σ^0_1 sınıfıdır. Bu durumda $\sigma \in T$ dizisinin ve en fazla $|\sigma|$ uzunluğundaki onun bütün başlangıç kesimlerinin T'de sonsuz uzantılı olmayan kümesinde listelenmesini bekleriz. Burada σ dan sözlük sırasına göre küçük veya eşit olan elemanları dikkate alalım. Listeleme tamamlandığında σ dizisi B kümesine eklensin. □
Bir sonraki teoremler sayılabilir Π^0_1 sınıfları için önemli bir temel oluşturur. Verilen kanıtlar Downey and Hirschfeldt'e [6] göredir.

[1] Bu sonuç *Kreisel'in baz teoremi* olarak bilinir. Ancak bu teorem birazdan göstereceğimiz *düşük baz* teoremi ile güçlendirilmiştir.

Teorem 2.11. *T, hesaplanabilir bir ağaç ve $A \in [T]$ olsun. Eğer A izole ise, hesaplanabilirdir.*

İspat. T hesaplanabilir bir ağaç olsun ve A kümesi T'nin sonsuz bir dalı olsun. A'nın izole olduğunu varsayalım. O halde öyle bir $\sigma \subset A$ vardır ki T'nin A'dan başka hiçbir sonsuz dalı σ dizisinin uzantısı olamaz. O halde König önsavından dolayı her $n > |\sigma|$ için, τ nun üstündeki T'nin altağacını sonsuz kılan tek bir $\tau \supset \sigma$ vardır. O halde $n > |\sigma|$ olmak üzere $A \restriction n$ kümesini hesaplamak için n uzunluğuna sahip herhangi tek bir $\tau \supset \sigma$ dizisinin $m \geq n$ uzunluğunda T'de bir uzantısının olup olmadığına bakarız ve $A \restriction n = \tau$ olarak tanımlanır. □

Tanım 2.12. Eğer bir Π^0_1 sınıfı hesaplanabilir bir küme içermiyorsa bu sınıfa *özel* denir.

Önsav 2.13 (Jockusch ve Soare, 1972)**.** *Özel bir Π^0_1 sınıfı vardır.*

İspat. Varlık kanıtında yapmamız gereken şey içinde hesaplanabilir bir eleman bulunmayan bir sınıfın inşasıdır. Standart köşegen metodu ile bütün hesaplanabilir kümelerden kaçınabiliriz. O halde T'yi öyle tanımlarız ki n uzunluğuna sahip bir σ ancak ve ancak her $e < n$ için $\Psi_e(e)[n] \neq \sigma(e)$ ise T'nin içinde olmalıdır. $A = \bigcup_{n\in\omega} \sigma \restriction n$ kümesi $[T]$ sınıfının içinde olduğu için $[T]$ sıfının boş olmadığı görülebilir. Burada A aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$A(e) = \begin{cases} 1 - \Psi_e(e) & \text{eğer } \Psi_e(e)\downarrow \text{ ise} \\ 0 & \text{Aksi durumda.} \end{cases}$$

O halde Ψ_e kısmi hesaplanabilir fonksiyonun tam tanımlı olduğu herhangi bir $e \in \omega$ ve herhangi bir $A \in [T]$ için $A \neq \Psi_e$ sağlanacaktır. □
Bir sonraki eksonuç özel Π^0_1 sınıfların "yoğun" olduğunu söylemektedir.

Sonuç 2.14. *Eğer $\mathscr{P}$ özel bir Π^0_1 sınıfı ise $|\mathscr{P}| = 2^{\aleph_0}$.*

İspat. Bir önceki teoreme göre eğer sınıfın içinde hiçbir hesaplanabilir küme yoksa, ağacın içindeki her eleman ikiye ayrılacaktır. O halde sonsuz dalların sayısı $2^{\aleph_0}$ olur. □

Sonuç 2.15. *Eğer $|\mathscr{P}| < \aleph_0$ ise $\mathscr{P}$ sınıfının her elemanı hesaplanabilirdir.*

İspat. $\mathscr{P} = [T]$ olmak üzere T hesaplanabilir bir ağaç olsun ve T sadece sonlu sayıda dala sahip olsun. O halde T'nin her elemanı izoledir. Bu yüzden hepsi hesaplanabilirdir. □

2.2. Baz ve antibaz teoremleri

Baz teoremleri her Π^0_1 sınıfının belli bir tipteki Turing derecesinden bir eleman içerdiğini söyler. Örneğin boş olmayan her Π^0_1 sınıfı derecesi etkili numaralanabilir olan bir eleman içerir. Bunu bir önceki bölümde gösterdik. Düşük baz teoremi [8], Π^0_1 sınıfları ile ilgili en önemli sonuçlardan birisidir. Bilindiği üzere eğer $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ ise $\mathbf{a}$ derecesine *düşük* denir, $\mathbf{a}' = \mathbf{0}''$ ise bu dereceye *yüksek* denir.

Teorem 2.16 (Düşük Baz Teoremi, Jockusch ve Soare, 1972)**.** *Boş olmayan her Π^0_1 sınıfının, derecesi düşük olan bir elemanı vardır.*

İspat. Bu teoremin kanıtı kümeler kuramında kullanılan *zorlama* (forcing) yöntemi ile benzerdir. Bu yöntemde, verilen ağacın her adımda belli bir gereksinimi sağlayacak şekilde bir altağacını alırız. Limitte böylece istenilen ağacı elde etmiş oluruz. Şimdi $\mathscr{P}$ boş olmayan bir Π^0_1 sınıfı olsun ve hesaplanabilir bir T ağacı için $\mathscr{P} = [T]$ olsun. $A' \leq_T \emptyset'$ koşulunu sağlayan T'nin üzerinde bir A kümesi tanımlayacağız.
$T_0 = T$ olsun. Bir sonraki her adımda T_e verilmiş olsun. Şimdi düşüklük özelliği için gerekli olan $e \in A'$? sorusuna cevap vermek için aşağıdaki kümeyi ele alalım.

$$U_e = \{\sigma : \sigma \in T_e \text{ ve } \Psi_e(\sigma; e) \downarrow\}.$$

O halde U_e alta kapalı bir diziler kümesidir ve duruma göre sonlu veya sonsuz bir küme olabilir.
Eğer sonsuzsa, $T_{e+1} = U_e$ olarak tanımlayalım. Bu durumda T_{e+1} üstündeki her A için $e \notin A'$ olur.
Eğer sonlu sayıda elemana sahipse, $T_{e+1} = T_e$ olsun. Bu durumda ise $e \in A$ olur çünkü T_{e+1} içindeki sonlu sayıdaki dizi için $\Psi_e(\sigma; e) \uparrow$ sağlanır. O halde hesaplama yeterince büyük diziler için tanımlı hale gelecektir.
Ayrıca $A \in [T]$ doğrudur çünkü $T_0 = T$ olarak tanımlamıştık. Her ne zaman ki $A \in \bigcap_{e \in \omega} T_e$, $A' \leq_T \emptyset'$ olur. Bunun sebebi, yukarıdaki sonsuz-sonlu durum ayrımını, König önsavından dolayı, $\emptyset'$ bilgesi kullanarak karar verebilmemizdir. ☐

Sonuç 2.17. *Peano aritmetiği veya ZFC gibi teorilerin derecesi düşük olan tam tutarlı bir uzantısı vardır.*

İspat. Bu eksonuç aksiyomlanabilir her teorinin tam ve tutarlı uzantılarının birer Π^0_1 sınıfı olarak görülebileceğinden ve düşük baz teoreminden elde edilebilir. ☐
Bir baz teoremi daha vermeden önce aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.18. Eğer her $f \leq_T A$ ve her $n \in \omega$ için $g(n) \geq f(n)$ koşulunu sağlayan hesaplanabilir bir g fonksiyonu varsa A kümesinin derecesine *ayrıcalıksız (hyperimmune-free)* denir.

Bunun ne anlama geldiğini tartışmak gerekirse, eğer A kümesinin derecesi ayrıcalıksızsa A hızlıca büyüyen her fonksiyonu hesaplayamaz. Bu demektir ki her $f \leq_T A$ için en az f kadar hızlıca büyüyen hesaplanabilir bir g fonksiyonu vardır. **0** derecesinin ayrıcalıksız olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 2.19 (Jockusch ve Soare, 1972)**.** *Boş olmayan her Π^0_1 sınıfının, derecesi ayrıcalıksız olan bir elemanı vardır.*

İspat. Kanıt düşük baz teoremine benzerdir. $\mathscr{P}$ boş olmayan bir Π^0_1 sınıfı olsun, hesaplanabilir bir T ağacı için $\mathscr{P} = [T]$ koşulunu sağlamak kaydıyla. $A \in [T]$ olmak üzere ve $\Psi_e(A)$ tam olduğu durumlarda en az $\Psi_e(A)$ kadar hızlı büyüyen hesaplanabilir bir fonksiyonun varlığını garantileyen, derecesi ayrıcalıksız olan bir A kümesi inşa edeceğiz.
$T_0 = T$ olsun. Her sonraki adımda T_e verilsin. Aşağıdaki kümeyi ele alalım.

$$U_{\langle e,n \rangle} = \{\sigma : \sigma \in T_e \text{ ve } \Psi_e(\sigma; n) \uparrow\}.$$

Düşük baz teoreminde olduğu gibi iki durumdan söz edebiliriz. Burada $U_{\langle e,n \rangle}$ yine dizilerden oluşan alta kapalı bir kümedir. Bu küme sonlu veya sonsuz olabilir.
Eğer bir $n \in \omega$ için sonsuzsa, bu n değeri için $T_{e+1} = U_{\langle e,n \rangle}$ olsun. T_{e+1} üzerindeki her A için o halde $\Psi_e(A)$ kısmi tanımlı olacaktır ve bu yüzden gereksinimiz manasızca (vacuously) sağlanmış olacaktır.
Eğer $U_{\langle e,n \rangle}$ sonlu sayıda eleman içeriyorsa, $T_{e+1} = T_e$ olarak tanımlayalım. Bu durumdaT_{e+1} üzerindeki her A için en az $\Psi_e(A)$ fonksiyonu kadar hızlı büyüyen hesaplanabilir bir fonksiyon tanımlayacağız. Bunun için öyle bir n düzeyine bakalım ki $\Psi_e(\sigma; n)$ tanımlı olsun. Burada n'nin varlığı König önsavı tarafından doğrulanır. Son olarak $g(n)$ fonksiyonunun değerini uzunluğu n olan her σ için $\Psi_e(\sigma; n)$ değerinden daha büyük bir değer olarak tanımlayalım. ☐

Sonuç 2.20. *Peano aritmetiği veya ZFC gibi teorilerin derecesi ayrıcalıksız olan tam tutarlı bir uzantısı vardır.*

3. Teoremin Kanıtı

Ne tip dereceler Π^0_1 sınıfları için baz teşkil etmez diye sorulacak olunursa, hesaplanabilir dereceler teşkil etmez. Çünkü az önce kanıtladığımız gibi hesaplanabilir eleman içermeyen bir Π^0_1 sınıfı vardır ki bu da özel Π^0_1 sınıflarıdır. O halde her Π^0_1 sınıfı hesaplanabilir bir eleman içermek zorunda değildir. Bu gibi teoremler Π^0_1 sınıflarının elemanlarının dereceleri hakkında bize güçlü bilgiler verir.

Tanım 3.1. Hesaplanabilir olmayan **a** ve **b** derecelerinin en büyük alt sınırı eğer **0** ise, yani $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$ koşulu sağlanıyorsa, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ikilisine *minimal ikili* denir.

Jockusch ve Soare [8] tarafından kanıtlanan aşağıdaki teorem, boş olmayan her Π^0_1 sınıfının dereceleri minimal ikili olan iki eleman içerdiğini söylemektedir. Aşağıdaki teoreme biz *kesişim baz teoremi* diyelim.

Teorem 3.2 (Jockusch ve Soare, 1972)**.** *Boş olmayan her Π^0_1 sınıfının, dereceleri minimal ikili oluşturan elemanları vardır.*

Tanım 3.3. Hesaplanamaz bir **a** derecesi ile **0** derecesinin kesin olarak arasında hiç bir derece yoksa **a** derecesine *minimal* denir. Bir **a** derecesi, **b** derecesinin *minimal örtüsü* olur ancak ve ancak **a** ile **b** arasında bir derece yoksa.

Minimal derecelerin var olduğunu biliyoruz. Ayrıca minimal derece inşaları herhangi bir kümeye göre göreceli hale getirildiğinde her derecenin bir minimal örtüsünün mecvut olduğu sonucu da çıkarılır.

Teorem 3.4 (Groszek ve Slaman, 1997)**.** *Boş olmayan öyle bir Π^0_1 sınıfı vardır ki her elemanı bir minimal derece hesaplar.*

Kesişim baz teoremi, boş olmayan her Π^0_1 sınıfının, dereceleri minimal ikili olan en az iki elemanı olduğunu söylüyor. Bunun şimdi birleşim için doğru olmadığını kanıtlayacağız. Hatta kanıtlayacağımız teorem bundan daha güçlüdür.

Tanım 3.5. Λ bir küme olsun. Eğer her $\sigma \in \Lambda$ ve $\tau \subset \sigma$ için $\tau \in \Lambda$ sağlanıyorsa Λ kümesine *alta kapalı (downward closed)* denir. $\{\Lambda_i\}_{i\in\omega}$ alta kapalı ve dizilerden oluşan hesaplanabilir kümelerin (hesaplanabilir) bir listesi olsun. Öyle ki her Π^0_1 $\mathscr{P}$ sınıfı için $\mathscr{P} = [\Lambda_i]$ eşitliğini sağlayan bir i varolsun.

Teorem 3.6. *Boş olmayan öyle bir özel $\mathscr{P}$ Π^0_1 sınıfı vardır ki her $A \in \mathscr{P}$ ve $B \in \mathscr{P}$ için $\emptyset' \not\leq_T A \oplus B$ sağlanır.*

İspat. $\mathscr{P} = [T]$ olmak üzere tümevarımla bir T kümesi inşa ederek $\emptyset' \not\leq_T A \oplus B$ gereksinimini sağlayacağız. Bunun yanında bir de $D \not\leq_T A \oplus B$ ifadesini sağlayan etkili numaralanabilir bir küme tanımlayacağız.

Gereksinimlerimiz aşağıdaki gibidir:

R_{2e+1} : Eğer $S \in \mathscr{P}$ ise $S \neq \Psi_e(\emptyset)$
R_{2e+2} : Eğer $A \in \mathscr{P}$ ve $B \in \mathscr{P}$ ise $\Psi_e(A \oplus B) \neq D$.

Başlangıç $s = 0$ adımında, T kümesine $\emptyset$ dizisini ekleyelim.
Tümevarım $s > 0$ adımında, aşağıdaki iki adımı her $e < s$ için yapalım.

Eğer σ bir yaprak değilse ve σ nin uzantısı olup henüz terminal olarak tanımlanmamış en az bir yaprak varsa, σ nın uzantısı olan birbirleriyle uyumsuz bir çift yaprağın olduğunu ve bunların henüz terminal olarak tanımlanmadığını varsayalım.

(i) Önce $\tau \subset \Psi_e(\emptyset)[s]$ olmasını sağlayan $2e+1$ basamağındaki ve henüz terminal olmamış en küçük $\tau \in T$ dizisini, eğer varsa, alalım. $\tau_0 \in T$ dizisi τ nun öncülü olsun. τ_1 dizisi τ ile uyumsuz, τ_0 ın uzantısı, ve T'de bir yaprak olsun. Şimdi τ nun T'deki bütün uzantılarını listelemeyi keselim ve τ nun her uzantısını terminal ilan edelim.

(ii) Eğer listelenen diziler, bir n doğal sayısı için, ağacın $2n$ inci basamağındaysa, T'nin $2e+2$ basamağındaki bütün terminal olmayan $\{\sigma,\tau\}$ dizi çiftlerini alalım. Eğer daha önce tanımlanmamışsa, her çift için D'nin henüz içermediği bir $n \in \omega$ değeri tanımlayalım. $\Psi_e(\sigma' \oplus \tau'; n)\downarrow = 0$ ve $D(n) = 0$ koşullarını sağlayan ve henüz terminal olmamış T'nin $2e+2$ basamağındaki en küçük $\tau' \supset \tau$ ve $\sigma' \supset \sigma$ dizilerini bulalım. Eğer bu σ' ve τ' varsa, n'yi D kümesine ekleyelim. Sonra σ ve τ nun T'deki bütün uzantılarını terminal olarak tanımlayalım.

Her $e < s$ için bu adımları tamamladıktan sonra T'nin terminal olmayan her σ yaprağı için, $\sigma_1 \supset \sigma$ ve $\sigma_2 \supset \sigma$ iki tane dizi olsun, öyle ki σ_1 ve σ_2 birbiriyle uyumsuz olsun. σ_1 ve σ_2 dizilerini T'ye ekleyelim. Bu eklememizden dolayı tümevarım adımının başında verdiğimiz tümevarım varsayımımızı burada korumuş oluyoruz.
İnşamız burada bitmiştir. Şimdi bu inşanın teoremde belirtilen koşulları sağladığını göstereceğiz.

Önce $[T]$ nin bir Π^0_1 sınıfı olduğunu gösterelim. Bunun için $[T] = [\Lambda]$ koşulunu sağlayan hesaplanabilir ve alta kapalı bir Λ kümesinin varlığını göstermemiz gerekir. Λ kümesi, inşanın herhangi aşamasında, T'deki dizilerin bütün başlangıç kesimleri olabilir. Yani her $\sigma \in T_s$ için Λ_s kümesi bütün $\tau \subset \sigma$ dizilerinden oluşsun ve sonra $\Lambda = \bigcup \Lambda_s$ olarak tanımlansın. Şimdi Λ nın alta kapalı, hesaplanabilir ve $[\Lambda] = [T]$ koşulunu sağladığını gösterelim. Bir adımdaki Λ yı tanımlarken bir önceki adımda tanımlanan Λ daki dizilerin sadece uzantılarını yeni tanımlanan kümeye eklediğimiz için Λ kümesi hesaplanabilirdir. Yani $|\sigma| = s$ olmak üzere, $\sigma \in \Lambda$ ancak ve ancak $\sigma \in \Lambda_s$. Açıkça görülebilir ki T'deki sonsuz bir uzantıya sahip her dizi tanım gereği Λ da da vardır. Bunun tersi de doğrudur. İfadenin devriğinden yola çıkarsak, farzedelim ki σ nın Λ kümesinde sonsuz bir uzantısı olmasın. O halde σ, T'de bir terminal olmalı ve bu yüzden σ nın T'de sonsuz bir uzantısı olamaz. Aksi halde σ nın Λ kümesinde sonsuz bir uzantısı olurdu. Ayrıca $[T] \neq \emptyset$ olduğu, her adım sonunda tümevarım varsayımını koruduğumuzdan çıkmaktadır.

Önsav 3.7. *R_{2e+1} gereksinimi sağlanır.*

İspat. Bir $e \in \omega$ için $S \in [T]$ ve $S = \Psi_e(\emptyset)$ olsun. O halde $\sigma \subset \Psi_e(\emptyset)$ ifadesini sağlayan her $\sigma \subset S$ için $2e+1$ düzeyinde bir $\sigma \in T$ vardır. σ_0 dizisi σ nın öncülü olsun. O zaman σ ile uyumlu olan her σ_0, T'den kaldırılacaktır. Fakat bu durumda, sadece sonlu sayıda $\sigma \subset \Psi_e(\emptyset)$ T'de olur. Çelişki. □

Önsav 3.8. *R_{2e+2} gereksinimi sağlanır.*

İspat. Varsayalım ki bir e için $\Psi_e(A \oplus B) = D$ ifadesini sağlayan birer $A \in [T]$ and $B \in [T]$ varolsun. O halde, n sayısı $\{\sigma,\tau\}$ çifti için tanımlanmış olan değer olmak üzere, $\Psi_e(\sigma' \oplus \tau'; n) = D(n)$ ifadesini sağlayan, $\sigma' \supset \sigma$ ve $\tau' \supset \tau$ olmak üzere, T'de $2e$ düzeyinde birer $\sigma \subset A$ ve $\tau \subset B$ vardır. Fakat bu inşamıza göre bir çelişkidir. Teoremin kanıtı böylece bitmiştir. □

□

Sonuç 3.9. *Öyle bir özel ve boş olmayan bir $\mathscr{P}$ Π^0_1 sınıfı vardır ki, dereceleri* **a** *ve* **b** *olan $\mathscr{P}$'deki her iki eleman için $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \neq \mathbf{0}'$ koşulu sağlanır.*

Teorem 3.10. *Öyle bir aksiyomlanabilir teori T vardır ki eğer R ve S kümeleri T'nin tam tutarlı olan herhangi iki uzantısı ise, $\emptyset' \not\leq_T R \oplus S$.*

İspat. Bu sonuç, Teorem 3.6 ve Teorem 2.6'dan çıkmaktadır. □

Kanıtlanan teorem, oldukça özel bir konuma sahip durma kümesini hesaplayamayan aksiyomlanabilir teorilerin uzantılarının varlığını göstermektedir. Hatta sadece iki uzantısının birleşimi değil, sonsuz sayıda tam tutarlı uzantısının sonsuz birleşiminin de durma kümesini hesaplayamadığı aksiyomlanabilir teorilerin var olduğunu öngörüyoruz. Ayrıca kanıtladığımız teorem, Jockusch ve Soare'in kesişim baz teoremine karşılık birleşim baz teoreminin elde edilemeyeceğini ifade etmektedir.

Teşekkür

Yorum ve önerileri için anonim hakeme teşekkürlerimi sunarım.

Kaynakça

[1] Cenzer, D. 1999. Π^0_1 Classes in Recursion Theory. Handbook of Computability Theory. North-Holland, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **140**, 37–89.

[2] Cooper, S. B. 2004. Computability Theory. Chapman & Hall/CRC Mathematics.

[3] Çevik, A. 2013. Antibasis theorems for Π^0_1 classes and the jump hierarchy. Archive for Mathematical Logic, **52**, Sayı 1-2, 137-142.

[4] Çevik, A. 2014. Degrees of members of Π^0_1 classes. University of Leeds, Doktora Tezi, 104s.

[5] Çevik, A. 2012. Hesaplanabilirlik Kuramı ve Turing Derecelerine Giriş, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Bilimsel Araştırma Dergisi **1**, 1-20.

[6] Downey, R., D. Hirshfeldt, D. 2010. Algorithmic Randomness and Complexity. Springer-Verlag, 855s.

[7] Groszek, M. J., Slaman, T. A. 1997. Π^0_1 classes and minimal degrees. Annals of Pure and Applied Logic, **87**(2), 117-144.

[8] Jockusch, C., Soare, R. I. 1972. Π^0_1 classes and degrees of theories. Trans. Amer. Math. Soc. **173**, 33–56.

[9] Moss, L. S., Topal, S. (teslim edildi, 2017). Syllogistic Logic with Cardinality Comparisons, On Infinite Sets.

[10] Odifreddi, P. 1999. Classical Recursion Theory Vol. I & Vol. II. North-Holland, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.

[11] Soare, R. 1987. Recursively Enumerable Sets and Degrees. Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 437s.

[12] Topal, S. 2015. An Object-Oriented Approach to Counter-Model Constructions in a Fragment of Natural Language. Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 4(2), 103-111.

[13] Topal, S. 2016. A Syllogistic Fragment of English with Ditransitive Verbs in Formal Semantics. Journal of Logic, Mathematics and Linguistics in Applied Sciences, 1(1), 1-23.

[14] Topal, S. 2017. Bazı Sillojistik ve Kardinalite Karşılaştırmalı Lojiklerin Türetimlerinin Cebirsel ve Etiketli Çizge Teorik Özellikleri Üzerine. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. DOI:10.19113/sdufbed.50072