Dinamik Matematik Yazılımı Kullanımının Öğrencilerin Türev Kavramının Geometrik Boyutuna Yönelik Anlamalarına Etkisi *

Erdem Çekmez[a] ve Adnan Baki[b]

[a]Trabzon Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon/Türkiye (ORCID: 0000-0001-8684-2820); [b]Trabzon Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Trabzon/Türkiye (ORCID: 0000-0002-1331-053X)

Makale Geçmişi: Geliş tarihi: 27 Nisan 2018; Yayına kabul tarihi: 7 Temmuz 2018; Çevrimiçi yayın tarihi: 17 Ekim 2018

Öz: Bu çalışma ile öğretim sürecinde dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin tek noktada türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisini incelemek amaçlanmıştır. Araştırmanın katılımcılarını bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programının iki şubesinde bulunan öğrenciler oluşturmaktadır. Yarı-deneysel yöntemin benimsendiği araştırmada kontrol grubunda öğretim sunuş yoluyla, deney grubunda ise bilgisayar destekli çalışma yaprakları ile yürütülmüştür. Araştırmanın verileri araştırmacılar tarafından geliştirilmiş iki testten ve seçilmiş öğrenciler ile gerçekleştirilen mülakatlardan elde edilmiştir. Testlerden biri uygulama öncesinde öğrencilerin türev kavramının öğrenilmesinde etkili olduğu belirtilen ön bilgilere ne düzeyde sahip olduklarını belirlemek, diğeri ise uygulama sonrasında ele alınan kavramın ne düzeyde öğrenildiğini belirlemek için kullanılmıştır. Öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar temelinde hazırlanan rubrikler ile öğrencilerin performansları puanlanmış ve elde edilen puanlar üzerinde tek yönlü kovaryans analizi yürütülmüştür. Testin sonuçları deney grubunun puan ortalamasının kontrol grubunun puan ortalamasından anlamlı düzeyde yüksek olduğunu göstermiştir. Seçilen test soruları üzerinde gerçekleştirilen mülakatlar deney grubu öğrencilerinin kontrol grubu öğrencilerine nazaran APOS teorisi çerçevesinde daha ileri düzeyde anlamalar oluşturduklarını göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Türev kavramı, matematiksel anlama, grafiksel gösterim, bilgisayar destekli matematik

DOI: 10.16949/turkbilmat.419038

Abstract: This study aimed to investigate the impact of dynamic mathematics software on students' understanding of the geometric meaning of the concept of derivative at a single point. The participants consisted of students who were enrolled in two separate classes in a primary mathematics teacher education programme at a state university. The study adopted a quasi-experimental approach, with the two classes randomly assigned as a control and an experimental group. The instructional approach in the control group was traditional, whereas in the experimental group, computer-supported worksheets were used. The data were gathered through two tests that were developed by the researchers, as well as through clinical interviews conducted with selected students. One of the tests aimed to determine the level of knowledge of students about the concepts that are recognized in the literature as being crucial to the learning of the derivative concept by research reports; the other aimed to assess students' learning regarding the content that was the focus of the study. Their performance was assessed using a rubric that was developed according to the level of understanding demonstrated in the students' responses. A one-way analysis of covariance test was conducted on the students' test scores to compare the performance of the two groups. The test concluded that there was a significant difference between the groups in favor of the experimental group. The clinical interviews showed that the students in the experimental group achieved a higher level of understanding, as proposed by APOS theory, in comparison to control group.

Keywords: Derivative concept, mathematical understanding, graphical representation, computer-based instruction

See Extended Abstract

Sorumlu yazar: Erdem Çekmez **e-posta:** erdemcekmez@gmail.com

*Bu çalışma birinci yazar tarafından ikinci yazarın danışmanlığında tamamlanan doktora tezinden üretilmiştir.

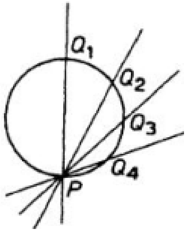
Kaynak Gösterme: Çekmez , E. ve Baki, A. (2019). Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna yönelik anlamalarına etkisi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 31-58.

1. Giriş

Matematiğin analiz dalına verilen önemin en temel sebebi araştırmacılara oldukça karmaşık olan problemleri bile basit kural ve yöntemlere indirgeme olanağı sunmasıdır (Hughes-Hallett ve ark., 1994). Bu öneme binaen literatürde analiz dersi kapsamında yer verilen içeriğin öğretimi ve bu ders çerçevesinde ele alınan kavramların öğrenciler tarafından nasıl anlaşıldığı üzerine birçok çalışma yürütülmüştür (Aksoy, 2007; Amit & Vinner, 1990; Asiala, Dubinsky, Cottrill & Schwingendorf, 1997; Bezuidenhout, 1998; Çetin, 2009; Dubinsky & Harel, 1992; Hartter, 1995; LeVeque, 2003). Dennis ve Confrey (1996), analiz dersindeki kavramların öğretiminin tanım, teorem, ispat ve problem çözme döngüsü şeklinde vuku bulmasının, öğrencilerin matematiğin doğasına ilişkin yanlış inançlar oluşturmasına ve ders içeriğindeki kavramlara yönelik olumsuz tutum geliştirmelerine yol açtığını belirtmektedir. Duyuşsal alanın yanı sıra bu şekilde işlenen derslerin öğrenmede bilişsel boyuta da olumsuz etkileri olduğu yapılan araştırmalarda rapor edilmiştir. Örneğin, ders sürecinin bu şekilde yürütülmesi öğrencilere matematiksel muhakeme yapmada kullanılan süreçlerin farkına varma ve kavramlara ilişkin akıl yürütmede sezgilerini kullanma fırsatı sunmamaktadır (Dreyfus & Halevi, 1991; Fischbein, 1982).

Berry ve Nyman (2003), analiz dersinde anlamanın sadece belirli kuralları kullanarak fonksiyonların diferansiyellerini ve integrallerini bulmak gibi cebirsel işlemleri gerçekleştirmekten ziyade, kavramların hem matematik hem de diğer alanlardaki kavramlar ile ilişkisinin farkında olmaya bağlı olduğunu belirtmektedir. Analiz dersindeki kavramların birçoğu cebirsel formun yanı sıra geometrik olarak da temsil edilmektedir. Zimmermann (1991) analiz dersindeki kavramlara yönelik yeterli düzeyde anlama gerçekleştirmek için görsel düşünmenin önemli olduğunu ve ele alınan konunun geometrik boyutuna vurgu yapmayan öğretimin kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirme açısından başarılı olamayacağını söylemektedir. Zimmermann'ın paralelinde Koirala (1997), analiz derslerinin kavramsal olarak grafikler ve fonksiyonlar üzerine temellendirilmesi gerektiğini, ayrıca formüllerin ve kuralların doğrudan verilmesinden ziyade sezgisel olarak öğrencilerin mevcut ön bilgileri üzerine yapılandırılması gerektiğini ifade etmektedir. Dolayısıyla analiz kavramlarının öğrenciler tarafından daha iyi anlaşılabilmesi için, öğretim sadece cebirsel temsiller üzerine değil, kavramların geometrik temsilleri ve bu temsiller arasındaki bağlantı üzerine de odaklanmalıdır (Kaput, 1994).

Analiz dersi içerisinde geometrik açıdan en zengin kavramlardan biri türev kavramıdır. Kavramın tanımı geometrik bir kavram olan teğet doğrusu üzerine inşa edilmektedir. Ayrıca, türev ünitesinde yer verilen konuların büyük kısmı yine fonksiyon grafiği ile teğet doğrusu arasındaki ilişkilere dayanmaktadır. Literatürde yer alan araştırmalar öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktadaki türevi ile grafiğine çizilen teğet doğrusu arasındaki ilişkiyi kurmada sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Örneğin, Orton (1983) türev alma kurallarını uygulamayı gerektiren sorularda başarılı olan öğrencilere Şekil 1'de resmedilen soruyu yöneltmiştir. Öğrencilere çember üzerinde P ve Q noktalarından geçen kesen doğrusunun, Q noktasının P noktasına sürekli yaklaşması sonucunda neye yakınsayacağını sormuştur. Öğrencilerin yaklaşık yarısı kesen doğrularının P noktasındaki teğet doğrusuna yakınsayacağını ifade edememiştir.



Şekil 1. Orton (1983) tarafından öğrencilere sorulan soru

Benzer olarak Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997) üniversite seviyesinde öğrenim görmekte olan öğrenciler üzerinde yaptığı çalışmasında, öğrencilerin türev alma kurallarını uygulamayı gerektiren sorularda başarı göstermesine rağmen yalnızca grafiksel temsili verilen bir fonksiyonunun türev fonksiyonu hakkında çıkarım yapmayı gerektiren sorularda başarı sergileyemedikleri sonucuna ulaşmıştır. Bingolbali, Monaghan ve Roper (2007), üniversite düzeyinde öğrenim görmekte olan öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarını inceleme amacıyla gerçekleştirdikleri araştırmada, öğrencilerin büyük bölümünün fonksiyon grafiğine çizilen teğet yardımıyla fonksiyonun türev değerini bulmada başarılı olamadıklarını ve kavramın geometrik boyutuna ilişkin cebirsel boyuta nazaran daha zayıf anlamalar gerçekleştirdiklerini rapor etmiştir. Bir diğer çalışmada Ubuz (2007), üniversite düzeyinde öğrenim görmekte olan öğrencilerin verilen bir fonksiyon grafiğini yorumlamadaki ve bu fonksiyona ilişkin türev grafiğini oluşturmadaki performanslarını incelemiştir. Elde ettiği bulgular, öğrencilerin bir bölümünün kendilerine verilen grafiğin türev grafiğini oluşturmayı isteyen sorularda grafiğin cebirsel formunu öğrenme ihtiyacı hissettiklerini, dolayısıyla türeve yönelik grafiksel veriden muhakeme yapma hususunda başarı sergileyemediklerini göstermiştir. Yapılan araştırmalarda ortaya çıkan bir başka durum ise öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktada türevi olarak teğet doğrusunun eğimini değil, cebirsel ifadesini kabul ettikleri yönünde kavram yanılgısına sahip olduğudur (Amit & Vinner, 1990; Park, 2011).

Türev kavramının geometrik olarak ifade ettiği anlam noktaların ve noktalara bağlı olarak doğruların devinimini barındırmaktadır. Kavramın temelinde yatan bu devinimin statik olarak tahta üzerinde geleneksel öğretim yöntemiyle sunulması, yukarıda değinilen araştırmaların sonuçları dikkate alındığında, öğrencilerin zihinlerinde bu sürece yönelik anlam oluşturmada etkili olamamaktadır. Dolayısıyla, öğrencilerin bu süreci anlamlandırmasını destekleyecek farklı öğrenme ortamlarının tasarlanması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Matematik eğitimine özgün bilgisayar tabanlı yazılımların bu yönde öğrenme ortamlarının tasarlanmasında potansiyel sahibi olduğu ifade edilmektedir (Ellison, 1993; Isaacson, 1999). Bu durum dikkate alındığında analiz öğretimine ilişkin önemli sorulardan biri, teknolojik gelişmelerden istifade ederek, analiz kavramlarına sezgisel bir yaklaşım sunmanın yanı sıra öğrencilerin formel matematiksel bilgi ile tutarlı anlamalar gerçekleştirmesine imkân veren öğrenme ortamlarının nasıl geliştirilebileceğidir. Bu çalışma, yukarıda ifade edilen soru çerçevesinde literatüre türev kavramı özelinde katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

1.1 Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada bir Dinamik Matematik Yazılım (DMY) olan GeoGebra kullanılarak tasarlanmış öğrenme ortamının öğrencilerin tek noktada türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisini, geleneksel öğrenme ortamı ile kıyaslayarak incelemek amaçlanmıştır.

1.2 Araştırmanın Problemi

Bu araştırmada cevap aranacak problem aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

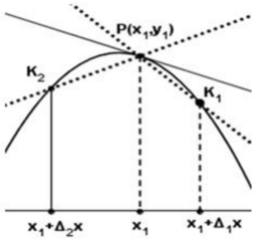
- Tek noktada türev kavramının geometrik boyutuna yönelik DMY destekli ve geleneksel yöntem ile yürütülen öğretim öğrencilerin anlamaları üzerinde farklılık oluşturmakta mıdır?

2. Teorik Çerçeve

2.1 Tek Noktada Türev Kavramının Geometrik Boyutu

Bilindiği üzere türev kavramının, bir fonksiyon grafiğine üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimini veren özel bir limit ve bir fonksiyonun tanım kümesinde türevlenebilir olduğu noktaları, bu noktalarda fonksiyonun türev değerine götüren fonksiyon olmak üzere iki anlamı mevcuttur. Bunlardan ilki araştırmacılar tarafından tek noktada türev kavramı ve bu içeriğin grafiksel manası ise tek noktada türev kavramının geometrik boyutu olarak isimlendirilmiştir.

Formel matematik bağlamında bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunan (x_1,y_1) noktasından geçen teğet, eğimi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}_1+\Delta\mathrm{x})-\mathrm{f}(\mathrm{x}_1)}{\Delta\mathrm{x}}$ değerine eşit olan doğru olarak tanımlanmaktadır (Salas, Hille & Etgen, 2007). Kavramın formel tanımı her ne kadar notasyonel formda statik bir yapıdaymış gibi görünse de geometrik boyutta noktaların ve buna bağlı olarak doğruların devinimini barındırmaktadır. Tanımın geometrik boyutu ele alındığında, bir y=f(x) fonksiyonun grafiğine üzerindeki $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen teğet, grafik üzerinde serbest olarak alınan $K(x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x))$ noktası ile $P(x_1, y_1)$ noktasından çizilen kesen doğrusunun, K noktasının yön fark etmeksizin P noktasına yaklaştığındaki limit durumudur (Şekil 2).



Şekil 2. Kesen doğrularının limit durumunda teğet doğrusuna dönüşümü

Bu tanımdan anlaşılacağı üzere bir fonksiyonun grafiğine $P(x_1, y_1)$ noktasında teğet çizilebilmesi için $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ limitinin mevcut olması, diğer bir ifadeyle sonlu bir reel sayıya eşit olması gerekmektedir. Bu limitin değerine, şayet mevcutsa, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_1$ için türevi denir. Bu kısımda açıklanan matematiksel bilgiye yönelik bir öğrencinin gerçekleştirdiği öğrenme, tek noktada türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlaması olarak isimlendirilecektir.

2.2 İleri Matematiksel Düşünme ve APOS Teorisi

Matematik eğitimi alanında ileri matematiksel düşünme ifadesi ile Euclid geometrisi ile temel cebirsel kavramların ve işlemlerin ötesinde yer alan kavramlara yönelik düşünme süreçleri kastedilmektedir. Temel ve ileri matematiksel düşünme süreçleri arasında keskin bir fark olmamakla birlikte, ileri matematiksel düşünme, tanımların ve mantıksal çıkarımların soyut tarafı üzerine odaklanmaktadır (Dreyfus, 1991). Tall (1991), temel matematikten ileri matematiğe geçişin iki önemli dönüşüm gerektirdiğini ifade etmektedir. Bunlardan birincisini matematiksel kavramları açıklamaktan tanımlamaya doğru dönüşüm; ikincisini ise iddiaların doğruluğunu göstermede ikna etmekten ispat etmeye doğru olan dönüşüm olarak belirtmektedir.

APOS (Action-Process-Object-Schema) olarak isimlendirilen teori, ileri matematiksel kavramlara yönelik öğrencilerin anlamalarını inceleme amacıyla bir araya gelen ve dâhil oldukları topluluğu Research in Undergraduate Mathematics Education olarak adlandıran araştırmacıların yaptıkları çalışmalar sonucunda ortaya çıkmıştır (Arnon ve ark., 2014). APOS teorisinin temelinde, Piaget'nin bireydeki mantıksal-matematiksel yapıların oluşumunu açıklamak için öne sürdüğü yansıtıcı soyutlama kavramı bulunmaktadır (Dubinsky, 1991). APOS teorisinin hipotezi, matematiksel bilginin, bireyin karşılaştığı problem durumlarını zihinsel eylemler, süreçler ve nesneler oluşturarak ele alması eğilimine ve oluşturduğu bu yapıları problem durumlarından anlam çıkartmak ve problem çözmek için şema halinde organize etmesine bağlı olduğudur (Dubinsky & MacDonald, 2001). Dubinsky (1991), ileri matematiksel düşünme bağlamında bireyin zihninde mevcut olan yapılardan yeni nesnelerin, süreçlerin ve şemaların oluşumunu açıklamak için Piaget'nin ortaya koyduğu beş yansıtıcı soyutlama türünü kullanmıştır. Bu yansıtıcı soyutlama türleri, içselleştirme (interiorization), koordinasyon (coordination), sarmalama (encapsulation), genelleme (generalization) ve terslemedir (reversal)[1].

Matematiksel bir kavrama yönelik öğrencilerin anlamalarının APOS teorisi çerçevesinde incelenmesi ilk olarak odağa alınan kavramın teorik analizini yapmayı gerektirmektedir. Bu teorik analizin amacı, bireyin hedeflenen kavramı öğrenme sürecinde zihninde oluşturacağı muhtemel yapıları tarif etmektir. Gerçekleştirilen analizin sonucunda hedef kavrama ilişkin bir genetik ayrışım (genetic decomposition) ileri sürülür. Bir kavramın genetik ayrışımı, kavrama ilişkin bireyin zihninde oluşması beklenen yapıları ve bu yapıların muhtemel oluşum sırasını gösteren yol haritasını içeren teorik tariftir. APOS teorisinde bireyin zihninde matematiksel kavramlara ilişkin oluşabilecek dört yapı olduğu ileri sürülmektedir. Bunlar sırasıyla eylem, süreç, nesne ve şemadır[2]. Bu dört yapıdan ilk üçü, bir kavrama ilişkin ileri sürülen genetik ayrışım içerisinde ifade edilen kazanımları seviyelendirmek için kullanılmaktadır. Bu çalışmada, öğrencilerin zihinlerinde genel olarak türev kavramının geometrik boyutuna yönelik oluşturabilecekleri yapıları nitelemek ve seviyelendirmek için Asiala ve arkadaşları (1997) tarafından ortaya konmuş genetik ayrışım temel alınmıştır. Bu genetik ayrışımın tek noktada türev kavramının değerine yönelik kısmı şu şekildedir:

I. Ön Bilgi

A. Matematiksel nesnelerin grafiksel temsilleri

- ✓ Bir noktanın grafiksel temsili.
- ✓ Eğim kavramını içerecek şekilde bir doğrunun grafiksel temsili.

B. Noktaların grafiksel gösterimlerinin fonksiyon kavramı ile koordine edilmesi

- ✓ $y = f(x)$ olarak tanımlandığında (x, y) sıralı ikilisinin grafiksel yorumu.
- ✓ İstenen sonuca ulaşmada yalnız fonksiyonun grafiğinin yeterli olduğu durumlarda fonksiyona ilişkin bir açık cebirsel ifade ihtiyacı hissetmemek.

II. Türev Kavramına İlişkin Anlam Oluşturmada İzlenebilecek Grafiksel Yol

A1. Grafiksel: Bir eğri üzerindeki iki noktayı bir kiriş oluşturacak şekilde birleştirme ve bu iki noktadan geçen kesen doğrusunun eğimini bu iki noktayı kullanarak bulma eylemi.

B1. Grafiksel: A1 kısmında ifade edilen eylemlerin, iki noktadan biri diğerine grafik üzerinden yaklaştıkça tek bir süreç olarak içselleştirilmesi.

C1. Grafiksel: B1 kısmında ifade edilen sürecin şu iki sonuca ulaştıracak şekilde sarmalanması.

- ✓ Teğet doğrusu aslında kesen doğrularının limit durumudur.
- ✓ Süreç, fonksiyon grafiğinin bir noktasındaki teğet doğrusunun eğimini vermektedir.

[1] Yansıtıcı soyutlama türlerine yönelik daha geniş açıklama ve örnekler için bakınız Çekmez (2013).

[2] Bu yapılara ait detaylı açıklamalar ve örnekler için bakınız Arnon ve arkadaşları (2014, s. 18-26).

3. Yöntem

Bu makale, DMY kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisini inceleme amacıyla yürütülmüş ve tamamlanmış bir doktora tezinin bir bölümünü rapor etmektedir. Doktora çalışmasına konu olan içeriğe yönelik öğretim 6 haftalık bir zaman dilimini kapsamıştır. Bu makaleye konu olan içeriğin öğretimi bu zaman diliminin ilk haftasında gerçekleşmiştir. Araştırmacı deney ve kontrol grubu olarak seçtiği sınıflara öğrencileri rasgele atayamamıştır. Bu husus eğitim alanında gerçekleştirilen çalışmalarda çokça karşılaşılan bir durumdur. Bunun sonucunda deney ve kontrol grupları rasgele seçilmektedir. Bu durumda araştırmacıların benimsediği tasarım yarı-deneysel veya denk olmayan gruplar tasarımı olarak isimlendirilmektedir (Cohen, Manion & Morrison, 2005). Böyle bir tasarımda katılımcılar denk gruplar oluşturacak şekilde atanamadığından, araştırmacı grupların kıyaslanabilir veya birbirine denk olduğundan emin olamamaktadır. Bu sebepten araştırma çerçevesinde elde edilen verilerden çıkarılan sonuçların daha manidar olması için, bağımlı değişkene etki ettiği bilinen değişkenler ortak değişken adı altında verilerin analizine dâhil edilmektedir. Çalışmada, yapılan literatür taraması sonucunda türev kavramının öğrenimine etki ettiği rapor edilen ön bilgiler doğrultusunda hazırlanan Yordama Testi (YT) ile grupların çalışmanın başında sahip oldukları farklılıklar kontrol altına alınmaya çalışılmıştır. Bunun neticesinde elde edilen verilerin analizinden ortaya çıkan sonuçların daha anlamlı olması amaçlanmıştır.

3.1. Katılımcılar

Çalışmanın örneklemini bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programının iki şubesinde yer alan ikinci sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Öğrencilerin sınıflara rasgele atanması mümkün olmadığından, sınıflar deney ve kontrol grubu olarak rasgele atanmıştır. Çalışmada öğrencilerin YT'den elde ettikleri puanlar yapılan istatistiksel analizlerde ve mülakat öğrencilerinin seçiminde kullanıldığından, çalışmanın başında YT'ye katılamayan öğrenciler örneklemin dışında bırakıldı. Bunun yanı sıra dersi daha önce alıp başarısız olan ve tekrar alan öğrenciler de örneklemin dışında bırakıldı.

Örneklemin yer aldığı bölümün müfredatında türev kavramı ilk olarak 2. sınıfta sunulan Analiz-I dersi bağlamında ele alınmaktadır. Çalışmanın yürütüldüğü ders olan Grafik Analiz dersi, Analiz-I dersi ile aynı yarı dönem içerisinde verilmektedir. Çalışmada yer alan öğrencilere Analiz-I dersi bağlamında türev kavramına ilişkin öğretim, araştırma çerçevesinden yürütülen öğretimin son haftasında başladı. Dolayısıyla araştırma öncesinde katılımcılar türev kavramına ilişkin üniversite düzeyinde herhangi bir öğretim almamış, türev kavramına ilişkin bilgileri ortaöğretim seviyesinde kazandıkları ön bilgilerine dayanmaktaydı.

Çalışmada her iki gruptan mülakata alınacak öğrencilerin seçiminde öğrencilerin YT'den elde ettikleri puanların dağılımı dikkate alınmıştır. Her iki grupta yer alan öğrenciler YT'ye katıldıktan sonra, iki grup birleştirilerek puanların ortalaması ve standart sapması belirlendi. Ortalamadan bir standart sapma solda ve sağda bulunan puanlar arasında yer alan puanlar dağılımın yaklaşık %68'ini oluşturduğundan her iki gruptan seçilecek 9 öğrencinin 5'i bu aralıktan ve bu aralıktaki dağılımı yansıtacak şekilde seçildi. Geriye kalan 2 öğrenci ortalamadan bir standart sapmadan daha büyük puanların bulunduğu bölgeden, diğer 2 öğrenci ise ortalamadan bir standart sapmadan daha küçük olan puanların bulunduğu bölgeden seçildi. Böylece seçilen mülakat öğrencilerinin hem dağılımı temsil etmesi hem de iki gruptan mülakata seçilen öğrencilerin birbiriyle denk olması amaçlandı.

3.2. Veri Toplama Araçları

Çalışmada mülakat öğrencilerinin seçimi ve öğrencilerin sahip oldukları ön bilgiyi kontrol değişkeni olarak almak için katılımcılara YT uygulandı. YT içerisinde yer alan soruların seçiminde literatürde türev kavramının öğrenimini etkileyen ön bilgileri belirlemeye yönelik yapılan çalışmaların (Hartter, 1995; Pinzka, 1999; Pustejovsky, 1999) sonuçları dikkate alınmıştır. Bunun neticesinde hazırlanan YT'nin odaklandığı kazanımlar Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Yordama testinde yer alan soruların odaklandığı kazanımlar

Soru	Odaklanılan Kazanım
1	Sözel ifadesiyle verilen bir fonksiyonun grafiksel gösterimini tanıyabilme.
2	Düzlemde verilen bir eğrinin bir fonksiyon belirtip belirtmediğini belirleyebilme.
3	Cebirsel ifadesiyle verilen bir fonksiyonun üzerindeki noktaları belirleyebilme. Bu noktalardan geçen kesen doğrusunun eğimini hesaplayabilme.
4 – 5	Sözel olarak verilen iki değişken arasındaki ilişkiyi bir fonksiyon olarak yorumlayabilme ve düzlemde grafiğini oluşturabilme. Sözel olarak verilen iki değişken arasındaki ilişkiyi belirleyebilme ve devamında iki nokta arasındaki ortalama değişim oranını hesaplayabilme.
6	Grafiksel gösterimleri ile verilen fonksiyonlar üzerinde gerçekleştirilen temel işlemleri, kurulan eşitsizlikleri yorumlayabilme ve bunlara yönelik muhakeme yapabilme.
7	Verilen bir fonksiyon içerisinde yer alan değişkenler arasındaki ilişkileri tanıyabilme ve bunların grafiksel gösterimlerini oluşturabilme.

Öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik anlamalarını belirlemek için, literatürde yer alan çalışmalar, Asiala ve arkadaşları (1997) tarafından ortaya konan genetik ayrışım içerisindeki kazanımlar ve uzman görüşleri dikkate alınarak Noktasal Bağlamda Türev Testi (NBTT) oluşturuldu (Ek-1). NBTT içerisinde yer alan soruların odaklandığı kazanımlar Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. NBTT içerisinde yer alan soruların odaklandığı kazanımlar

Soru	Odaklanılan Kazanım
1	Tek noktada türevin düzlemdeki temsilini belirleyebilme.
2	Grafiksel veriden hareketle bir fonksiyonun birden fazla noktada türev değerlerini kıyaslayabilme.
3	Grafiksel veriden hareketle bir fonksiyonun farklı noktalardaki türev değerlerini, pozitif, negatif, sıfır, en büyük ve en küçük olma açısından belirleyebilme.
4	Grafiksel veriden hareketle tek noktada, temel işlemler altında fonksiyonların türev değerini hesaplayabilme.
5	Grafiksel veriden hareketle bir fonksiyonun tek noktada türevine ilişkin, bu noktanın civarında bulunan kesen doğrularının eğimlerinden yararlanarak muhakeme yapabilme.

3. 3. Verilerin Analizi

YT araştırma kapsamında yürütülen ilk dersten bir hafta önce her iki grupta yer alan öğrencilere uygulandı. Öğrencilerin teste verdikleri cevaplar incelendikten sonra bir puanlama rubriği oluşturuldu. Teste katılan tüm öğrencilerin cevapları oluşturulan puanlama sistemine göre değerlendirilerek testten elde ettikleri puanlar hesaplandı. Deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin YT puan ortalamaları arasında bir farklılık olup olmadığını belirlemek için puanlar üzerinde bağımsız t-testi gerçekleştirildi. Öğrencilerin Yordama testinden elde ettikleri puanlar, deney ve kontrol grubunda yer alan öğrencilerin NBTT testinden elde ettikleri puanları kıyaslamada ortak değişken olarak kullanıldı.

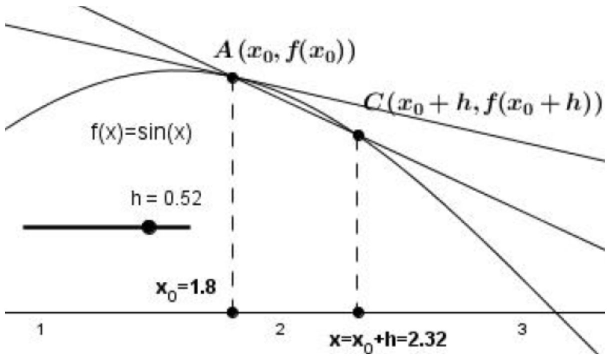
Tek noktada türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin yürütülen dersten iki gün sonra öğrencilere NBTT uygulandı. Öğrencilerin teste verdikleri cevaplar incelenerek puanlama rubriği oluşturuldu ve öğrencilerin testten aldığı puanlar bu rubrik kullanılarak belirlendi. Yürütülen iki farklı öğretim yönteminin öğrencilerin testten aldıkları puanlar arasında bir farklılık oluşturup oluşturulmadığını belirlemek için alınan puanlar üzerinde, YT puanları ortak değişken olarak alınarak tek yönlü kovaryans analizi gerçekleştirildi.

Her iki gruptan seçilen öğrenciler ile NBTT'nin 1, 2, 3, ve 5 numaralı soruları çerçevesinde mülakatlar gerçekleştirildi. Mülakatlar öğrenciler ile bire bir olarak yerleşke içerisinde yer alan proje odasında gerçekleşmiştir. Tartışmalar süresince mülakata alınan öğrencilerden, soruları sesli düşünerek ve kâğıt üzerinde çalışarak çözmesi istenmiştir. Bu süreçte araştırmacı öğrencinin yaptığı işlemlere ve yürüttüğü muhakeme sürecine doğru-yanlış şeklinde dönüt vermekten kaçınmış, öğrencinin düşüncelerini olabildiğince açıklaması yolunda cesaretlendirici tavır takınmıştır. Öğrenciler ile yaşanan diyalogların tümü ses kayıt cihazı ile kaydedilmiş, ayrıca öğrencinin mülakat süresince üzerinde çalıştığı cevap kâğıdı mülakat sonunda araştırmacı tarafından saklanmıştır. Daha sonra tüm öğrencilerin ses kayıtları dinlenmiş ve kağıtlara aktarılarak mülakat dökümleri oluşturulmuştur. Mülakat dökümleri ile öğrencinin cevap kâğıdı birlikte değerlendirilerek, öğrencinin sergilediği anlama seviyesi genetik ayrışım içerisinde yer alan kazanımlar doğrultusunda belirlenmiştir.

3.4. Öğretim Süreçleri

Tek noktada türev kavramının geometrik boyutunun öğretimine yönelik kontrol grubunda gerçekleşen uygulamada öğretmen rolündeki araştırmacı derse konu olan bilgileri beyaz tahta üzerinde sunarken, uygun yerlerde sınıfa yöneltilen sorularla sınıf tartışmaları gerçekleştirmeye çalışmıştır. Araştırmacı elinden geldiği kadarıyla, ele alınan konu ve kavramların altında yatan matematiksel süreçleri ve mantığı öğrencilere aktarmaya çalışmıştır.

Deney grubunda gerçekleştirilen öğretim bilgisayar donanımlı bir sınıfta yürütülmüştür. Oturma düzeni bir bilgisayarda iki kişilik grup oluşacak şekilde belirlenmiştir. Dersin başlangıç aşamasında, derste öğrencilerin üzerinde çalışacağı çalışma yaprağı içinde bulunan adımları GeoGebra ortamında gerçekleştirmeleri için gereken teknik bilgiye ilişkin kısa bir sunum gerçekleştirilmiştir. Dersin devamında öğrenciler kendilerine verilen çalışma yaprağı içerisinde yer alan yapılar ve yönergeler üzerinde çalışmışlardır. Bu süreçte araştırmacı gruplar arasında dolaşarak öğrencilere çalışma yapraklarını icra etmede rehberlik etmiştir. Hazırlanan çalışma yaprağı içinde yer alan GeoGebra ortamında oluşturulmuş yapılardan biri Şekil 3'te görülmektedir. Bu yapıda öğrenciler, A ile C noktalarından geçen kesen doğrusunun hareketini h değişkeninin değerini değiştirerek incelemiş ve bu doğrunun eğiminin, h değişkeninin aldığı değerler sıfıra yaklaştığında neye yaklaşacağını araştırmışlardır. Dersin sonunda öğrencilerin çalışma yapraklarından elde ettikleri sonuçlar sınıf tartışmasına açılmıştır. Tartışmanın sonunda araştırmacı elde edilen sonuçları projeksiyon yardımıyla sınıfa özetlemiştir[3].



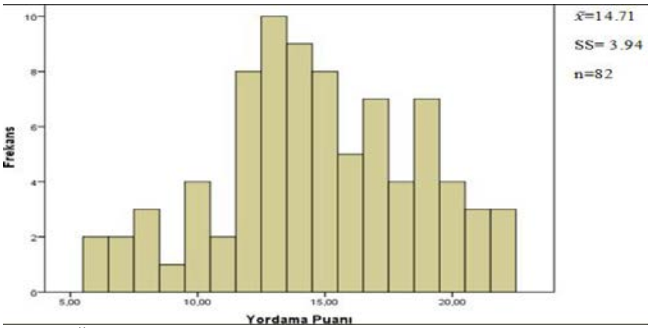
Şekil 3. Çalışma yaprağı içerisinde yer alan yapılardan birine ait ekran görüntüsü

[3] Deney ve kontrol grubuna ait detaylı ders planları için bakınız Çekmez (2013).

4. Bulgular

4.1. YT ile elde edilen bulgular

Her iki grupta yer alan öğrenciler arasında, türev kavramının öğrenilmesinde etkili olduğu rapor edilen bilgilere sahip olma açısından bir farklılık olup olmadığını belirlemek için YT kullanıldı. Öğrencilerin cevapları temel alınarak hazırlanan puanlama rubriği aracılığıyla testten alınabilecek maksimum puan 22 olup tüm öğrencilerin aldıkları puanların dağılımını gösteren histogram grafiği Şekil 4'te verilmiştir.



Şekil 4. Öğrencilerin YT Puan dağılımının histogram grafiği

Her iki grubun YT puan ortalamaları arasında bir farkın olup olmadığını belirlemek için yürütülen bağımsız t-testinin sonuçları Tablo 3'de görülmektedir.

Tablo 3. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin YT puanlarına ilişkin t-testi sonuçları

		n	$\bar{X}$	SS	t	p
Yordama Testi	Kontrol	40	14.38	3.86	-.744	.46
	Deney	42	15.02	4.02		

Tablo 3'den görüldüğü üzere deney grubunun YT puan ortalaması kontrol grubunun ortalamasından büyük olmakla beraber bu farklılık istatistiksel olarak anlamlı değildir ($t=-.744$ $p>.05$). Başka bir ifadeyle uygulama öncesinde iki grup literatürde türev kavramının öğrenilmesine etki ettiği rapor edilen konulara yönelik ön bilgilere sahip olma açısından denktir. Yukarıdaki dağılım esas alınarak seçilen mülakat öğrencilerinin mahlasları ve aldıkları puanlar Tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4. Mülakata seçilen öğrencilerin YT puanları

	Kontrol									Deney								
Katılımcılar	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
YT Puanı	16	17	14	21	12	22	9	13	7	14	17	8	18	10	17	20	22	12

4.1. NBTT ile elde edilen bulgular

Gerçekleştirilen iki farklı öğretim yönteminin öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin anlamalarında farklılık oluşturup oluşturmadığını belirlemek için, öğrencilerin NBTT'den aldıkları düzeltilmiş puanları üzerinde tek yönlü gruplar arası kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin YT puanları ortak değişken olarak alınmıştır. Analizin öncesinde elde edilen verilerin kovaryans analizinin ön varsayımları olan bağımlı değişken ile ortak değişken arasında doğrusal bir ilişkinin bulunması, regresyon doğrularının eğimlerinin homojenliği ve gruplar içi varyansın homojenliği kriterlerinin ihlâl edip etmediği sınanmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar herhangi bir varsayımın ihlâl edilmediğini göstermiştir. NBTT sonucu grupların ham ve düzeltilmiş puanlarının betimsel istatistikleri Tablo 5'de verilmiştir.

Tablo 5. Deney ve kontrol gruplarının NBTT puanlarının betimsel istatistikleri

		NBTT Puanı		Düzeltilmiş NBTT Puanı	
Grup	n	$\bar{X}$	SS	$\overline{x_d}$	SH
Deney Grubu	42	7.98	2.33	7.83	.22
Kontrol Grubu	40	6.43	2.26	6.58	.22
Toplam	82	7.22	2.41		

$\overline{x_d}$: Düzeltilmiş NBTT Puanı Ortalaması

Tablo 5'den görüldüğü üzere deney grubu öğrencilerinin NBTT puan ortalaması kontrol grubu öğrencilerinin ortalamasından daha büyüktür. Bu farkın anlamlı olup olmadığını belirlemek için, iki grubun YT puanları kontrol değişkeni olarak alınarak kovaryans analizi gerçekleştirilmiştir. Yapılan kovaryans analizinin sonuçları Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6. NBTT'den elde edilen düzeltilmiş puanlara ait ANCOVA testi sonuçları

Varyansın Kaynağı	Kareler Toplamı	sd	Kareler Ortalaması	F	Anlamlılık Değeri(p)	Etki Büyüklüğü (eta kare)
YordamaTesti	267.72	1	267.72	136.43	.00	.63
Grup	31.82	1	31.82	16.22	.00	.17
Hata	155.01	79	1.96			
Toplam	472.05	81				

Gerçekleştirilen kovaryans analizi sonuçlarına göre, öğrencilerin YT puanları kontrol altına alındığında, NBTT puan ortalamaları arasında deney grubu lehine anlamlı bir farklılık bulunmaktadır [F (1-79) =16.22, p<.01].

4.3. Mülakatlardan elde edilen bulgular

Tek noktada türev kavramının değerine ilişkin genetik ayrışım içerisinde ifade edildiği üzere, bir noktada türev ile teğetin eğimi arasında ilişki öğrencinin zihninde farklı yapılanma gösterebilir. Bunlardan ilkinde öğrenci sadece bir noktada türevin o noktada çizilen teğetin eğimini verdiği şeklinde yüzeysel olarak ezber niteliğinde bir anlamaya sahip olabilir. Bu türden anlama sergileyen öğrencinin tek noktada türev kavramına ilişkin anlaması eylem seviyesindedir. Bunun tersine öğrenci tek noktada türeve ilişkin anlaması, genetik ayrışım içerisinde ifade edilen daha önceki süreçleri barındıracak şekilde olabilir. Daha açık olarak öğrenci tek noktada türevi ve onun karşılığı olan teğeti, kesen doğrularının teğet alınacak noktaya yaklaşma süreci ve farkların bölümünün türev alınacak noktadaki limit süreci sonunda ortaya çıkan bir nesne olarak yapılandırmış olabilir. Bu türden anlamaya sahip olan öğrencinin tek noktada türev kavramına ilişkin anlamasının nesne seviyesinde olduğuna karar verildi. Son olarak eğer öğrenci bir noktada türev ile o noktadaki teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi kuramamış ise, öğrencinin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin eylem öncesi seviyede anlama sergilediğine hükmedildi. NBTT içerisinden seçilen sorular bağlamında öğrenciler ile gerçekleştirilen mülakatlar vasıtasıyla, öğrencilerin tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin sahip oldukları anlama seviyeleri belirlenmiştir. Takip eden kısımda farklı anlama seviyelerine sahip öğrenciler ile gerçekleştirilen mülakatlara örnekler verilecektir.

Kontrol grubu öğrencilerinden olan Erkan ile gerçekleşen mülakatta öğrencinin tek noktada türev kavramına ilişkin eylem öncesi seviyede anlamaya sahip olduğu ortaya çıktı. Erkan ile yapılan mülakatta NBTT içerisindeki ikinci soru bağlamında gerçekleşen bir kesit aşağıdaki gibidir:

Araş. : $f'(1)$ sana ne söyler?
Erkan : Birinci türevdeki yerini.
Araş. : Birinci türevinin neyi?
Erkan : [Cevap yok]
Araş. : $f'(1)$ değeri geometrik olarak ne ifade ediyor sana?
Erkan : Yani birinci türevi alınmış, oradaki yeri gibi bir şey.
Araş. : Tamam burası 1 noktası bu da $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, grafiksel olarak $f'(1)$ değeri sana bir şey ifade ediyor mu, ya da $f'(2)$ değeri.
Erkan : Muhakkak söyler ama çıkartamadım şimdi türevin grafiği olmadığı için; yani burada azalma var fonksiyon azalmış.

Buraya kadar yaşanan diyalogdan anlaşılacağı üzere Erkan $f'(1)$ değerine ilişkin yorum yapabilmek için türev fonksiyonunun grafiğini görme ihtiyacı hissetmekte, yalnız fonksiyonun grafiğinden $f'(1)$ değerine ilişkin teğeti kullanarak herhangi bir çıkarım yapamamaktadır. Mülakatın devamı aşağıdaki gibi gerçekleşti:

Araş. : Peki yalnız bu grafiğe dayalı olarak çıkarım yapamaz mısın $f'(1)$ ile $f'(2)$ değerleri arasında?
Erkan : $f'(1)$ küçük $f'(2)$ derim.
Araş. : Nasıl karar verdin?
Erkan : Azaldığı için.
Araş. : Azalan ne?

Erkan : Fonksiyonun kendisi azalıyor. Burada bir minimum yapıp tekrar artma gösteriyor. Yani o sebepten $f'(1)$ küçük $f'(2)$ denebilir, çünkü fonksiyonun türevinin grafiği fonksiyonun grafiğine yakın bir grafik olması lazım.
Araş. : Niçin böyle düşünüyorsun?
Erkan : Öyle bir şey vardı; yok muydu? Yanlış mı hatırlıyorum? Ona benzer çok fark olmadan diye biliyorum.
Araş. : O zaman $f'(1), f'(2), f'(3)$ değerleri arasında nasıl bir sıralama olacak?
Erkan : $f'(1)$ büyük f '(2) o da büyük $f'(3)$ olacak.
Araş. : Az önce $f'(1)$ küçük f' (2) dedin.
Erkan : Bir dakika, fonksiyon 1'den 3'e doğru azalıyor, buna göre, yanlış söylemişim son söylediğim doğru.

Diyalogdan görüldüğü gibi, öğrenci türev değerlerine ilişkin muhakeme yapma sürecinde teğet doğrusuna hiç değinmemiştir. Bunun yerine zihninde mevcut olan, türev fonksiyonunun grafiğinin fonksiyonun grafiğine bir şekilde benzemesi gerektiği yanılgısına dayalı olarak, fonksiyon azalıyorsa türevinin de azalması gerektiği sonucunu çıkarmıştır. Sonuç olarak Erkan tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin eylem öncesi seviyede anlama sergilemektedir. Erkan benzer muhakeme sürecini kullanarak NBTT üçüncü soruda B noktasındaki türev değerinin A noktasındaki türev değerinden büyük, E noktasındaki türev değerinin ise D noktasındaki türev değerinden küçük olduğuna karar vermiştir. NBTT beşinci soruda ise Erkan sorunun cevabına ilişkin bir yaklaşım sergileyememiştir.

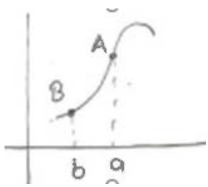
Kontrol grubunda yer alan Veysel de tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin eylem öncesi seviyede anlama sergiledi. Fakat Erkan'dan farklı olarak Veysel, soruların çözümünde ortaöğretim seviyesinde türev kavramına ilişkin edindiği fonksiyonun artan-azalan karakteristiği ile türev işareti arasındaki ilişkiyi kullanma eğilimi sergilediği gözlenmiştir. Bu şekilde NBTT'de yer alan ikinci soruya doğru, üçüncü soruya ise kısmen doğru cevap verebildi. Fakat mülakatın ilerleyen kısımlarında Veysel'in kullandığı akıl yürütme sürecinin hatalı olduğu, ikinci ve üçüncü sorulara doğru yanıt verebilmesinin sebebinin sorulardan kaynaklandığı ortaya çıktı. NBTT'nin ikinci sorusu etrafında Veysel ile gerçekleşen diyalog şu şekildedir:

Veysel : *[Soruyu okuyor]* Bu 4 noktasında fonksiyonun minimum değerinde mi?
Araş. : Tamam öyle kabul edelim.
Veysel : O zaman şimdi dördün solunda grafik azalan olduğu için türev negatif, dördün sağında da pozitif olacak buna *göre [Türev değerlerini büyükten küçüğe doğru olarak sıralıyor]*.
Araş. : Peki şunu sorayım $f'(6)$ ile $f'(7)$ değerlerini nasıl kıyasladın?
Veysel : Dört noktasında türev değeri sıfır olduğundan $f'(6)$ değeri sıfıra daha yakın bir değer olacak dolayısıyla $f'(7)$ değeri daha büyük.

Buraya kadar olan süreçte öğrencinin ortaya koyduğu muhakeme sürecinin kusursuz, hatta bir fonksiyonun türevinin işareti ile artan-azalan karakteristiği arasındaki ilişkiye yönelik öğretim henüz gerçekleşmediği için beklenenden daha derin olduğu söylenebilir. Fakat NBTT üçüncü soruda öğrencinin sergilediği yaklaşımın temelde iyi yapılanmadığı ortaya çıktı. Öğrenci NBTT üçüncü soruda yer alan ilk dört şıkta aynı muhakeme sürecini kullanarak doğru cevap verebilmiş, fakat türev değerinin en küçük olduğu noktayı soran son şıkta kullandığı muhakeme sürecinin yetersizliği ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda yaşanan diyalog şu şekildedir:

Araş. : Son şıkta ise bu verilen noktalardan hangisinde $f'(x)$ değerinin en küçük olduğunu soruyor.
Veysel : Bakalım, D ve E noktalarında türev negatifti çünkü fonksiyon azalan, bunlardan hangisi küçük olur, *[Biraz düşünüyor]*, bunları kıyaslayamayız bence.
Araş. : Niçin kıyaslayamayız?
Veysel : Çünkü şimdi C noktasında fonksiyon maksimum yapmış dolayısıyla türev sıfır, F noktasında ise minimum olmuş orada da türev sıfır, D ve E noktalarının her ikisi de sıfıra yakın yerlerde ama hangisinin sıfıra daha yakın olduğunu bilmiyoruz.
Araş. : Peki şunu varsayalım, D noktası daha yakın olsun o zaman ne dersin?
Veysel : Öyleyse en küçük E noktasında olur türev.

Diyalogdan anlaşılacağı üzere, Veysel türev değerlerini kıyaslamada teğet doğrularının eğimlerine başvurmamakta, bunun yerine noktaların türev değerinin sıfır olduğu noktalara uzaklıklarını kıyaslama yoluyla türev değerlerini karşılaştırarak geçersiz bir muhakeme süreci yürütmektedir. Bu durumdan emin olmak için mülakat esnasında kâğıt üzerine araştırmacı tarafından yeni bir problem durumu oluşturuldu (Şekil 5).



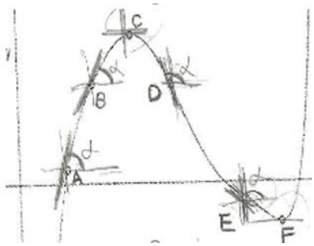
Şekil 5. Veysel ile yapılan görüşme sırasında araştırmacı tarafından oluşturulan problem

Bu problemde Veysel'den A ve B noktalarındaki türev değerlerini kıyaslaması istendi. Bu süreçte Veysel ile yaşanan diyalog şu şekildedir:

Araş. : Sana başka bir soru sormak istiyorum *[Araştırmacı problemi kağıt üzerinde oluşturuyor]*. A ve B noktalarının hangisinde fonksiyonun türev değeri daha büyüktür?
Veysel : B noktasında.
Araş. : Niçin?
Veysel :Çünkü grafiğe baktığımızda burada bir maksimum nokta var ve o maksimum noktanın solunda fonksiyon artmış böylece türev pozitif, bu tepe noktada türev sıfır olacak, A noktası o tepe noktaya daha yakın olduğu için türevi de sıfıra B noktasından daha yakın olacak.

Diyalogdan görüldüğü gibi Veysel aynı muhakeme sürecini kullanarak soruyu yanlış cevaplamıştır. Veysel soruları cevaplamada teğet doğrularından hiç bahsetmemiştir. Sonuç olarak Veysel tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik eylem öncesi seviyede anlama sergilemektedir. Veysel'in NBTT beşinci soruda sergilediği yaklaşım yine ulaşılan bu sonucu destekler niteliktedir. Veysel beşinci sorudaki fonksiyonun grafiğini bir parabol grafiği olarak ele almış, böylece grafiğe ait fonksiyonun denkleminin $y=ax^2+bx+c$ olacağını söyleyip, grafik üzerinde verilen noktalardan yaralanarak denklem içerisindeki a, b ve c katsayılarını belirleme yoluna gitmiştir.

Yapılan mülakatlar sonucunda öğrencilerin bir kısmının tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna yönelik eylem seviyesinde anlama sergilediği fakat nesne seviyesinde bir anlamaya sahip olmadığı belirlendi. Öğrencilerin eylem ya da nesne seviyelerinden hangisinde olduğu beşinci soruya ilişkin mülakatlarda ortaya çıkmıştır. Ersel ile gerçekleşen mülakatta öğrencinin tek noktada türevin grafiksel yorumuna ilişkin eylem seviyesinde olduğu fakat nesne seviyesinde bir anlama sergilemediği belirlendi. Ersel'in NBTT üçüncü soru üzerinde yaptığı çizimler Şekil 6'da görülmektedir.



Şekil 6. Ersel'in NBTT üçüncü soruya ilişkin çizimleri

Öğrencinin eylem seviyesinde olduğunu gösteren NBTT üçüncü soru üzerinde yaşanan diyalog şu şekildedir:

Ersel : *[Soruyu okuyor]* Hangi noktalarda $f'(x)$ değeri pozitiftir. Yani eğim değerini kastediyor bize.

Araş. : Evet.

Ersel : Şimdi bu noktalardaki teğetleri çizeyim *[Ersel kağıt üzerinde teğetleri çiziyor]* şimdi buralardaki açıları oluşturursam *[her teğet noktasında küçük koordinat eksenlerini oluşturarak teğet doğrularının, oluşturduğu küçük koordinat eksenlerinde yatay eksenle yaptığı açıları işaretliyor]* o zaman A ve B noktalarında açı 0^o ile 90^o arasında dolayısıyla buralarda pozitif olacak.

Araş. : Peki $f'(x)$ değerinin negatifliğine ilişkin ne söyleyebilirsin?

Ersel : O zaman açı 90^o ile 180^o arasında olmalı yani buradaki D ve E noktalarında negatif olacak. O zaman C ve F noktalarında sıfır olacak türev.

Araş. : Tamam, $f'(x)$ değeri en büyük nerede olur sence?

Ersel : Pozitif olduğu noktalara bakmamız lazım, açı büyüdükçe eğim değeri büyüyordu, o zaman A noktasına bakarsak açı böyle, B noktasında ise böyle, A noktasındaki açı daha büyük böylece eğim daha büyük yani türevi daha büyük bu A noktasında.

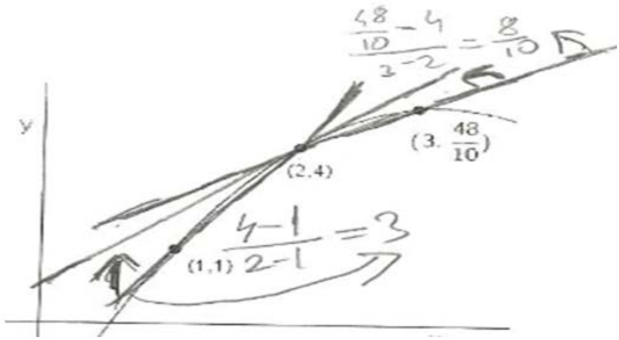
Diyalogdan görüldüğü gibi Ersel bir noktadaki türev ile o noktadaki teğet arasındaki ilişkiyi kurmuş ve bunu problem çözme sürecinde kullanabilmektedir. Dolayısıyla eylem seviyesinde bir anlamaya sahip olduğu gözükmektedir. Bununla birlikte Ersel teğetin eğimini hesaplamada her seferinde oluşturduğu küçük koordinat eksenleri vasıtasıyla teğetin x-ekseni ile yaptığı açıyı kullanmaktadır. Bu durum kontrol grubu öğrencilerinin büyük bölümünde görülmüştür. Ersel her ne kadar tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin eylem seviyesinde anlama sergileyebilse de NBTT beşinci soru üzerinde yapılan tartışmada nesne seviyesinde anlamaya sahip olmadığı görüldü. Beşinci soru bağlamında gerçekleşen diyalog şu şekildedir:

Araş. : Şimdi şu soruya bakalım.
Ersel : *[Soruyu okuyor]* ilkinde $x = 2$ noktasındaki türevi 1 olabilir diyor bize.
Araş. : Evet sence olabilir mi?
Ersel : *[Biraz düşünüyor]* teğeti çizeyim mi buraya.
Araş. : İstediğini yapabilirsin.
Ersel : *[$x = 2$ için fonksiyon grafiğine teğeti çiziyor ve x eksenini kesecek şekilde uzatarak yaptığı açıyı işaretliyor ve biraz düşünüyor]* bence 1'den küçük olur.
Araş. : Niçin öyle düşünüyorsun?
Ersel : Çünkü bu teğetin açısına baktığımızda 45^o'den küçük gibi gözüküyor, o zaman eğim birden küçük olur, o zaman ikinci ve üçüncü şık hiç olamaz, dördüncü ve beşinci şık olabilir çünkü 1'den küçük.
Araş. : Peki burada $(2, 4)$ noktasının dışında iki nokta daha verilmiş, bunlar sana yardımcı olabilir mi?
Ersel : Nasıl yani?
Araş. : Biz bir noktada türevi limit olarak tanımlamıştık ve bu limit tanımının grafiksel karşılığında kesen doğruları vardı, o tanımı hatırlıyor musun?
Ersel : Türevin limit tanımını hatırlıyorum, bu şekildeydi *[bir noktada türevin limit ifadesini yazdı].*
Araş. : Evet bu tanımın grafiksel karşılığını bu soruda $x = 2$ noktasındaki türev durumu için oluşturabilir misin?
Ersel : *[Bir müddet düşünüyor]* Yok, hayır.

Diyalogdan görüleceği üzere, Ersel zihninde tek noktada türev kavramının geometrik karşılığı olan teğet doğrusunu, limit tanımı içerisinde yer alan kesen doğrularının yakınlaşması sürecini sarmalayacak şekilde oluşturamamıştır. Dolayısıyla öğrencinin teğet kavramına ilişkin anlaması eylem seviyesinde kaldığı nesne seviyesine ulaşamadığı görülmektedir.

Ersel ile yapılan mülakatta elde ettiğimiz bulgulara benzer şekilde, kontrol grubunda yer alan öğrencilerin çoğunluğu tek noktada türev değerine ilişkin teğet doğrusunun eğiminden çıkarım yaparken, teğet doğrusunun x-ekseni ile yaptığı açıyı kullanmaktadır. Bu yöntemin bazı öğrencilere, teğetlerin eğimlerinin birbirine yakın olduğu durumlarda zorluk yaşattığı gözlemlendi. Örneğin kontrol grubu öğrencilerinden olan Zehra NBTT'nin 2'nci sorusunda teğetlerin eğimlerini kıyaslamada bir sorun yaşamaz iken, 3'üncü soruda türev değerinin en büyük olduğu noktayı belirlemede A ve B noktalarındaki eğimleri kıyaslamada zorlandığı gözlenmiştir. Yaşadığı bu sıkıntının sebebi, A ve B noktalarından çizilen teğetlerin eğimlerinin birbirine yakın olmasından ötürü, teğetlerin x-ekseni ile yaptığı açıların birbirine yakın değerde olması, dolayısıyla görsel olarak hangisinin büyük olduğunu belirleyememesidir.

Mülakatlardan ortaya çıkan bulgular, bazı öğrencilerin tek noktada türev kavramının grafiksel yorumuna yönelik nesne seviyesinde anlamaya sahip olduğunu gösterdi. Nesne seviyesinde anlama sergileyen öğrencilerden biri deney grubunda yer alan Kadriye'dir. Kadriye ve anlama seviyesi nesne olarak belirlenen diğer öğrenciler tüm mülakat sorularına doğru yanıt vermiştir. Kadriye'nin nesne seviyesinde anlamaya sahip olduğunu ortaya çıkaran NBTT 5'inci soruda yaptığı çizimler Şekil 7'de görülmektedir.



Şekil 7. Kadriye'nin NBTT 5'inci soruda yaptığı çizimler

Kadriye ile yürütülen mülakatın bir kısmı şu şekildedir:

Araş. : Sıradaki soruya bakalım.
Kadriye : Tamam *[öğrenci soruyu okuyor]* fonksiyonun $x = 2$ için türevi 1 olabilir diyor bize.
Araş. : Sence olabilir mi?
Kadriye : Biraz düşüneyim... $x = 2$ noktasındaki türevi 1 olabilir mi diyor bize, yani $x = 2$ noktasındaki teğetin eğimini soruyor, 1 olabilir mi bu eğim... teğeti çizeyim mi?
Araş. : Her şeyi yapmakta özgürsün.
Kadriye : Şimdi bu noktada *[*$(2,4)$ *noktasını kastediyor]* teğeti çizersek böyle olacak *[öğrenci teğeti doğru olarak çiziyor]*.
Araş. : Evet sence o teğetin eğimi bir olabilir mi?
Kadriye : Bir dakika... şimdi burada iki tane daha nokta var *[bir müddet düşünüyor]* hani teğeti tanımlarken kesen doğruları vardı, bunları oluştursam bu noktalar yardımıyla.

Araş. : Dediğim gibi istediğini yapmakta özgürsün.

Kadriye : Bu kesen doğrularını çizeyim o zaman *[öğrenci kesen doğrularını çiziyor]*, şimdi bunların eğimlerini de bulabiliriz aslında *[kesen doğrularının eğimlerini doğruların geçtiği noktalardan yararlanarak buluyor ve biraz düşünüyor]* tamam anladım şimdi.

Araş. : Neyi anladın?

Kadriye : Şimdi bu (2,4) ile (3,48/10) noktalarından geçen kirişin eğimi 8/10 olur. Bu noktayı *[(3,48/10) noktasını kastediyor]* buraya *[(2,4) noktasını kastediyor]* doğru sürüklersek bu kiriş teğete yaklaşacak ve gitgide eğimi büyüyecek o zaman bu teğetin eğimi 8/10'dan büyük olur. Benzer olarak (1,1) ile (2,4) noktalarından geçen kirişin eğimini 3 bulmuştuk. Yine bu noktayı *[(1,1) noktasını kastediyor]* buraya *[(2,4) noktasını kastediyor]* doğru sürüklersek bu kiriş teğete yaklaşacak ve eğimi gitgide azalacak, böylece teğetin eğimi 3'den kesin küçük olacak.

Diyalogdan anlaşılacağı üzere Kadriye'nin zihnindeki tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin şema, kesen doğrularının limit sürecini sarmalayacak şekilde yapılanmıştır. Dolayısıyla Kadriye soruda bu yapılanma içerisindeki süreçler üzerine odaklanarak, soruda yer alan önermeleri doğru-yanlış olması bakımından doğru olarak sınıflandırabilmiştir. Sonuç olarak Kadriye tek noktada türev değerinin geometrik boyutuna ilişkin nesne seviyesinde anlama sergilemektedir. Nesne seviyesinde anlama sergileyen diğer öğrenciler de Kadriye gibi NBTT'nin 5'inci sorusunda verilen önermeler hakkında muhakeme yaparken, kesen doğrularının eğimlerini kullanmışlardır. Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda görüşme yapılan öğrencilerin belirlenen anlama seviyeleri ve NBTT'den aldıkları puanlar Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. Mülakat öğrencilerinin belirlenen anlama seviyeleri ve NBTT puanları

	Kontrol									Deney								
Katılımcılar	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
NBTT Puanı	7	12	8	7	5	10	7	8	3	10	11	7	10	6	9	12	12	8
Anlama S.	E	N	E	E	EÖ	N	E	E	EÖ	N	N	E	N	E	N	N	N	E

EÖ: Eylem Öncesi; E: Eylem; N: Nesne

5. Tartışma

Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda eylem öncesi kategorisine dâhil edilen öğrenciler, en temel anlamda bir noktadaki türev değeri ile teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi oluşturamadıklarından, grafiğin yeterli veri sunduğu problem durumlarında çözüme ulaşmada geçersiz yollara başvurmuşlardır. Erkan ile yapılan mülakatta görüldüğü üzere, öğrenci fonksiyonun grafiği ile fonksiyonun türev fonksiyonunun grafiği arasında benzerlik olması gerektiğini düşünmektedir. Bunun neticesinde Erkan bu geçersiz özelliğe dayalı yürüttüğü muhakeme süreci ile soruları cevaplayamamıştır. Eylem öncesi kategorisine dâhil edilen bir diğer öğrenci olan Veysel ise farklı noktalarda fonksiyonun türev değerlerini birbiriyle kıyaslamada fonksiyonun bu noktalarda teğetlerini tasavvur etmek yerine, kıyaslanacak noktaların fonksiyonun ekstremum noktalarına olan uzaklığından yola çıkarak yanlış bir muhakeme süreci yürütmüştür. Veysel bir noktada türev değeri ile teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi kuramadığından, tek noktada türev değerine ilişkin çıkarım yapmayı isteyen 5'inci soruda fonksiyonun cebirsel ifadesini öğrenme arayışı içerisine girmiştir. Eylem öncesi kategorisinde yer alan bu öğrencilerin sergilediklerine benzer ve tek noktada türev değeri ile teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi kuramamaktan kaynaklanan geçersiz akıl yürütme süreçleri literatürde yer alan başka araştırmalarda da (Bezuidenhout, 1998; Ubuz, 2007) rapor edilmiştir.

Yapılan mülakatlar sonucunda deney grubunda yer alan öğrencilerin, fonksiyonun bir noktadaki türevi ile teğetinin eğimi arasındaki ilişkiyi oluşturmada kontrol grubu öğrencilerine nazaran daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Dolayısıyla bu ilişkiyi kurmada ortaya çıkan bu fark deney grubunda yürütülen öğretim yönteminin, dolayısıyla yazılımın bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Deney grubunda yer alan öğrencilerin çalışma yaprağı içerisinde teğet doğrusunun tanımını kesen doğrularının limit durumu olarak kendilerinin dinamik olarak oluşturmaları ve devamında tek noktada fonksiyonun türevini formel olarak tanımlamaları sonucunda, grafiksel verilerin yeterli done sunduğu durumlarda türevi hesaplamak için fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç hissetmemişlerdir. Bununla birlikte yazılım vasıtasıyla öğrencilerin yaşadığı bu süreçler, kontrol grubu öğrencilerinde ortaya çıkan fonksiyonun türev grafiği ile fonksiyon grafiğinin birbirine benzemesi gerektiği gibi kavram yanılgılarının oluşumuna engel olmuştur.

NBTT'nin 5'inci sorusunda deney grubu öğrencilerinin daha iyi performans sergiledikleri ve bunun sonucunda daha fazla öğrencinin nesne seviyesinde anlama oluşturduğu belirlenmiştir. Bu ise yazılım içerisinde öğrencilerin teğet doğrusunu kesen doğrularının yaklaşımı olarak kendilerinin dinamik olarak oluşturmasının, bu sürecin tahta üzerinde öğretmen tarafından açıklanmasından daha etkili olduğunu göstermektedir. Yazılımın öğrencilere sunduğu bu olanak sonucunda, deney grubunda yer alan öğrenciler yazılım içerisinde kendilerinin aktif olarak yaşadığı bu süreci zihinlerinde de yapılandırabilmiş, böylece problem durumunda bu süreci uygulayabilmişlerdir. Özellikle deney grubunda daha fazla öğrencinin Kadriye ile yapılan mülakatta ortaya çıktığı gibi, yaklaştırırsak, taşırsak, sürüklersek gibi fiilleri içeren cümleler kullanmaları, yazılımın bu dinamik sürecin öğrencilerin zihninde oluşumunda tahtadan daha etkili bir rol üstlendiğine işaret etmektedir.

Giriş kısmında değinilen araştırmalardan bazıları (Amit & Vinner, 1990; Park 2011) öğrencilerin bir noktadaki türevi, o noktadaki teğet doğrusunun eğimi olarak değil de bizzat teğet doğrusunun cebirsel formu olarak tanımladığını rapor etmekteydi. Araştırmacı, araştırma öncesinde bu durumun sebebinin öğretmenlerin sınıf içi diyaloglarda sergilediği dikkatsizlik olabileceği varsayımında bulunmuş ve her iki grupta yürüttüğü derslerde "bir noktada türev o noktada teğeti verir" gibi öğrencilerde daha önceki araştırmaların rapor ettiği yanılgıyı oluşturabilecek ifadelerden kaçınmıştır. Yapılan mülakatlarda hiçbir öğrencinin bu yönde bir ifade kullanmamış olması araştırmacının varsayımını doğrular niteliktedir.

6. Sonuç

Her iki grubun NBTT puan ortalamaları arasında bir fark olup olmadığını belirlemek için gerçekleştirilen tek yönlü kovaryans analizi sonucunda deney grubu lehine anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Bu sonuç deney grubunda benimsenen öğrenme ortamının geleneksel öğrenme ortamına kıyasen, tek noktada türev değerinin geometrik boyutunu anlamada daha etkili olduğunu söylemektedir.

Araştırmada her iki gruptan seçilen mülakat öğrencileri ile testte yer alan sorular üzerinde görüşmeler gerçekleştirildi. Böylece iki grubun sorular üzerindeki gösterdikleri performansın yanı sıra, tâbi oldukları öğrenme ortamlarının, şayet sebep olduysa, düşünme biçimlerinde nasıl farklılıklar oluşturduğunu ve APOS teorisi temelinde anlama seviyelerini saptamak amaçlandı. Gerçekleştirilen mülakatlar sonucunda deney grubunda yer alan öğrencilerin kontrol grubu öğrencilerine nispeten, APOS teorisi bağlamında daha ileri anlamalar gerçekleştirdikleri ortaya çıkmıştır. Düşünme biçimlerindeki farklılığa ilişkin mülakatlar vasıtasıyla ortaya çıkan sonuçlardan ilki, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının bir noktadaki türev değeri ile o noktada fonksiyon grafiğine çizilen teğetin eğimi arasındaki ilişkiyi oluşturmada geleneksel öğrenme ortamına oranla daha etkili olduğudur. Bunun sonucunda deney grubu mülakat öğrencilerinin hiçbirinde, kontrol grubu mülakat öğrencilerinin düşünme süreçlerinde rastlanan (türev fonksiyonunun grafiği ile fonksiyonun grafiği arasında benzerlik bulunması gerektiği veya farklı noktalardaki türev değerlerini noktaların fonksiyonun ekstremum noktalarına olan uzaklıklarından yola çıkarak kıyaslamak gibi) geçersiz akıl yürütme süreçlerine rastlanmamıştır.

Mülakatlardan ulaşılan bir diğer sonuç, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının grafiksel verilerden hareketle bir noktada türev değerine ilişkin çıkarımda bulunmada geleneksel öğrenme ortamına nazaran daha etkili olduğudur. Bunun sonucunda kontrol grubu öğrencilerinde karşılaşıldığının aksine deney grubu öğrencilerinden hiçbiri, grafiksel verilerin yeterli olduğu problem durumlarında türev değerine ilişkin çıkarımda bulunmada fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç hissetmiştir. Bunun yanı sıra kontrol grubu öğrencilerinin bir kısmı teğetin eğim değerine ilişkin çıkarımda bulunurken, her defasında teğetin x-ekseni ile yaptığı açıdan yola çıkmakta ve bazı durumlarda izledikleri bu yol onları hataya sürüklemekteydi. Deney grubu öğrencileri ise yalnızca teğet doğrusunun grafik üzerinde pozisyonuna bakarak eğim değeri hakkında doğru çıkarımda bulunabilmekteydi. Bu durumun sebebi, deney grubunda yer alan öğrencilerin yazılım içerisinde fonksiyon grafikleri üzerinde çizilen teğetleri serbestçe hareket ettirerek, teğet doğrularının eğim değerlerindeki değişimi fonksiyonun cebirsel ifadesine ihtiyaç duymadan izleyebilmeleridir. Bu eylemlerin sonucunda deney grubu öğrencileri, bir fonksiyon grafiği üzerinde farklı noktalarda çizilen teğetlerin eğim değerlerini, teğetlerin konumlarına bakarak düşünebilir hale gelmiştir.

Düşünme biçimleri bağlamında mülakat verileri ile ortaya konabilecek bir diğer sonuç, DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının bir noktada teğet doğrusu ile o nokta civarındaki kesen doğruları arasındaki ilişkiyi anlamada geleneksel öğrenme ortamına nispetle daha etkili olduğudur. Böylece deney grubunda daha fazla öğrenci tek noktada türev değerine ilişkin, noktanın civarında bulunan kesen doğrularının eğimlerini kullanarak muhakeme yapabilmiştir. Yazılım içerisinde bir noktada teğetin ve bu noktanın civarında kesen doğrularının serbest bir değişkene bağlı olarak oluşturabilmesi sonucunda, deney grubu öğrencileri kesen doğrularının serbest değişkeni değiştirme vasıtasıyla teğet doğrusuna yaklaşımını hem grafiksel hem de sayısal olarak inceleyebilmiştir. Yazılımın sunduğu bu olanaklar öğrencilere bu ilişkiye yönelik başlangıçta sezgisel bir anlama kazandırmada rol oynamıştır.

7. Öneriler

Araştırmadan elde edilen sonuçlar, DMY kullanılarak yürütülen öğretim süreçlerine katılan olan öğrencilerin geleneksel öğretim süreçlerine katılan öğrencilere nazaran tek noktada türev kavramının geometrik boyutuna yönelik daha iyi anlamalar gerçekleştirdiklerini göstermiştir. Bu sebepten analiz kavramlarının geometrik boyutuna yönelik öğrencilerde daha iyi anlamalar gerçekleştirme adına öğretim süreçlerinde DMY kullanılması önerilmektedir.

Türev kavramının geometrik boyutta en temel karşılığı, bir fonksiyon grafiğine bir noktadan çizilen teğet doğrusudur. Araştırmanın sonuçları DMY ile zenginleştirilmiş öğrenme ortamının, teğet doğrusunun eğimi ile bir noktada türev değeri arasındaki ilişkiyi oluşturmada ve teğet doğrusunu kesen doğrularının limit durumu olarak anlamada daha etkili olduğunu göstermiştir. Bilhassa teğet doğrusunu kesen doğrularının limit durumu olarak yapılandıran öğrencilerin bir sonraki adım olan kavramın formel tanımını anlamada daha başarılı oldukları görülmüştür. Dolayısıyla bir noktada türev değeri ile teğet doğrusu arasındaki ilişkiye yönelik gerçekleştirilecek öğretim süreçlerinde DMY'den faydalanılması önerilmektedir.

Yapılan bu çalışmada DMY destekli tasarlanan öğrenme ortamının bilişsel açıdan öğrenciler üzerindeki etkileri incelenmiştir. Yapılacak benzer başka çalışmalarda bilişsel etkinin yanı sıra duyuşsal etkiler de incelenebilir. Araştırma sonucunda her ne kadar deney grubu öğrencileri kontrol grubu öğrencilerine nazaran ele alınan konu başlıklarında daha başarılı olsalar da deney grubu öğrencileri arasında bazı öğrencilerin geri kaldıkları belirlenmiştir. Bu durumun gerekçesi olarak kontrol edilemeyen birçok değişken gösterilebilir. Bununla birlikte literatürde yer alan bazı araştırmalar öğrencilerin farklı öğrenme stillerine sahip olduğunu ve tasarlanan bir öğrenme ortamının sağlayacağı avantajın öğrenme stiline göre farklılaşabileceğini belirtmektedir. Bu görüş akla "acaba DMY destekli tasarlanan öğrenme ortamları farklı öğrenme stillerine sahip öğrencilere aynı düzeyde katkı sağlamakta mıdır?" sorusunu getirmektedir.

The Effect of Using Dynamic Mathematics Software on Students' Understanding of the Geometric Meaning of the Derivative Concept

Extended Abstract

Introduction

Most of the concepts in calculus can be represented both algebraically and graphically. Zimmermann (1991) asserts that, in order to develop students' understanding of calculus concepts, a teaching approach should be applied that enables students to recognize the link between algebraic and graphical representations. One aspect of calculus that has a rich geometric background is the derivative concept. Its definition is based on the geometric concept of tangent line, and a substantial part of the content covered in instructional units about derivatives concerns the relationship between the graph of a function and its tangent line. The research on this topic reports that students often face difficulties in recognizing these relationships. For example, Aspinwall, Shaw, and Presmeg (1997) found that students who successfully responded to questions that asked them to apply differentiation rules were not equally successful on questions that asked them to reason about the derivative of a function represented in graphic form only. Similarly, Bingolbali, Monaghan, and Roper (2007) reported that students were unable to reason about the derivative of a function represented graphically using the tangent line drawn to the graph of the function. The geometrical meaning of the derivative includes the movement of points and secant lines on the plane. However, current research indicates that statistical presentation of this concept on the board in the classroom does not sufficiently convey the dynamic structure of this concept. Hence, there is a need to design learning environments that make it easier for students to comprehend the concept. It is proposed that computer software designed especially for mathematics teaching and learning has the potential to support such understanding. To deepen the current understanding of this issue, this study presents the results of a teaching session that incorporated the dynamic mathematics software (DMS) package GeoGebra into the classroom practice. The study sought to answer the research question: Does DMS-supported instruction differ from traditional instruction in terms of students' understanding of the geometric meaning of derivative at a single point?

Method

The participants in the study were composed of two separate classes of students enrolled in a primary mathematics teacher preparation program at a state university in Turkey. The study utilized a quasi-experimental research design in which the two classes were randomly assigned as a control and an experimental group. Because the participants were not assigned to the classes at random, the equivalence of the groups could not be established prior to the study. To overcome this problem, the researchers developed a test (YT) in consideration of the research in the literature concerning the prerequisite mathematical knowledge that influences the learning of the derivative concept. The students' performance on the YT test were taken as a control variable and incorporated into the analysis of the data. By doing so, the researchers aimed to control the differences between the students in the two groups. The instruction in the control group took place in a traditional setting in which the instructor, who is the first author of this study, taught the geometrical meaning of the derivative at a point using a white board. On the other hand, instruction with the experimental group took place in a computer laboratory in which the students worked in pairs to complete a worksheet using the GeoGebra program. In the week following the instructional session, a test (NBTT) was administered to assess students' understanding of the geometrical meaning of derivative at a point. Afterward, clinical interviews were conducted with selected students concerning the specific test questions, and their level of understanding was determined according to APOS theory.

Findings

To assess the students' performance on the YT test, a rubric was developed by researchers based on the level of understanding demonstrated by the responses. The students' performance was then scored individually using this rubric, and an independent t-test was performed on the scores to determine whether there was a difference between the groups with respect to the evidence of mathematical knowledge that is recognized as being crucial in the learning of the derivative concept. The test concluded that there was no statistically significant difference between the groups ($t=-.744$ $p>.05$). Following the instruction, the NBTT test was administered to the students; and to assess their performance, a rubric was developed based on the level of understanding demonstrated by the responses. A one-way ANCOVA test with YT scores as covariate was conducted on the NBTT scores. The test concluded that there was a statistically significant difference between the groups in favour of the experimental group [F (1-79) =16.22, $p<.01$]. Based on the distribution of their scores on the YT test, nine students from each group were selected to participate in clinical interviews. The level of understanding of these students was determined according to APOS theory. Their levels of understanding, as well as their NBTT scores, is presented in Table 1.

Table 1. The level of understandings and NBTT scores of interview students

	Control									Experimental								
Participants	Dila	Tülin	Özgür	Hülya	Veysel	Nilüfer	Zehra	Ersel	Erkan	Mehmet	Saliha	Orkun	Yeşim	Sinan	Melih	Kadriye	İnci	İrem
NBTT Scores	7	12	8	7	5	10	7	8	3	10	11	7	10	6	9	12	12	8
Level	A	O	A	A	PA	O	A	A	PA	O	O	A	O	A	O	O	O	A

PA: Pre-Action; A: Action; O: Object

Results

The result of the one-way ANCOVA test showed a significant difference between the mean of the NBTT scores of the two groups. This indicates that the instruction carried out in the experimental group was more effective when compared to the control group in terms of teaching the geometrical meaning of derivative at a single point. In line with this result, the interviews revealed that the students in the experimental group exhibited higher levels of understanding compared to those in the control group. Furthermore, the interviews revealed that the students in the experimental outperformed those in the control group in recognizing the connection between the slope of the tangent line and the derivative value of a function at a point. Namely, none of the students in the experimental group exhibited incorrect reasoning by, for instance, comparing the derivative values of a function at two points by considering the distances of the points to an extremum point, a strategy employed by some of the students in the control group. Moreover, none of the students in the experimental group wanted the algebraic expressions of the functions to be given in only graphical form to reason about the derivative value at a point when the graph provided enough information. However, some of the students in the control group could not progress in reasoning about the derivative of the function, even though the graph of the function provided enough information. This indicates that the instruction in the experimental group was more effective in developing their grasp of the relationship between the slope of the tangent line and the derivative value of a function at a point.

Kaynaklar/References

Aksoy, Y. (2007). *Türev kavramının öğretiminde bilgisayar cebir sistemlerinin etkisi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Amit, M., & Vinner, S. (1990). *Some misconceptions in calculus – Anecdotes or the tip of the iceberg?* In G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, pp. 3-10). Mexico: Program Committee

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

Asiala, M., Dubinsky E., Cottrill J., & Schwingendorf, E. K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 301-317.

Berry, S. J., & Nyman, A. M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 481–497.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29*(3), 389-399.

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(6), 763-777.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2005). *Research methods in education* (5th ed.). London: Routledge Falmer.

Çekmez, E. (2013). *Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çetin, N. (2009). The ability of students to comprehend the function-derivative relationship with regard to problems from their real life. *Primus, 19*(3), 232-244.

Dennis, D., & Confrey, J. (1996). The creation of continuous exponents: A study of the methods and epistemology of Alhazen and John Wallis. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp. 33-60). Providence, RI: AMS & MAA

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). The Netherlands: Kluwer Academic Pub.

Dreyfus, T., & Halevi, T. (1991). QuadFun-A case study of pupil computer interaction. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 10*(2), 43-48.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). The Netherlands: Kluwer Academic Pub.

Dubinsky, E., & Macdonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at the university level* (pp. 275-282). Netherlands: Kluwerd Academic Pub.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Ellison, M. J. (1993). *The effect of computer and calculator graphics on students' ability to mentally construct calculus concepts* (Unpublished doctoral dissertation). University of Minnesota, USA.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-18.

Hartter, B. (1995). *Concept image and concept definition for the topic of derivative* (Unpublished doctoral dissertation). Illinois State University, USA.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A., Flath, D., Gordon, S., Lomen, D., Lovelock, D., … Thrash, K. (1994). *Calculus.* USA: Wiley & Sons, Inc.

Isaacson, J. (1999). *The effects of static graphic, animated graphic, and interactive animated graphic presentations on acquisition of the tangent concept* (Unpublished doctoral dissertation). University of Florida, USA.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77–156). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Koirala, H. P. (1997). Teaching of calculus for students' conceptual understanding. *The Mathematics Educator, 2*(1), 52–62.

LeVeque, R. J. (2003). *The development of the function concept in students in freshman precalculus* (Unpublished doctoral dissertation). Morgan State University, USA.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(2/3), 235-250.

Park, J. (2011). *Calculus instructors' and students' discourses on the derivative* (Unpublished doctoral dissertation). Michigan State University, USA.

Pinzka, M. K. (1999). *The relationship between college calculus students' understanding of function and their understanding of derivative* (Unpublished doctoral dissertation). University of Minnesota, USA.

Pustejovsky, F. S. (1999). *Beginning calculus students' understanding of the derivative: Three case studies* (Unpublished doctoral dissertation). Marquette University, USA.

Salas, S., Hille, E., & Etgen, G. (2007). *Calculus: One and several variables* (10th ed.). USA: Wiley & Sons, Inc.

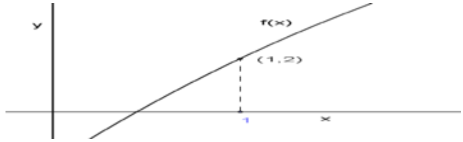
Tall, D. O. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: Stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(5), 609–637.

Zimmermann, W. (1991). Visiual thinking in calculus. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-138). Washington DC: MAA.

Ek 1. Noktasal Bağlamda Türev Testi ve Puanlama Rubriği

1. Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun x=1 noktasındaki türev değerinin düzlemde neyi temsil ettiğini grafik üzerinde çizerek gösteriniz.

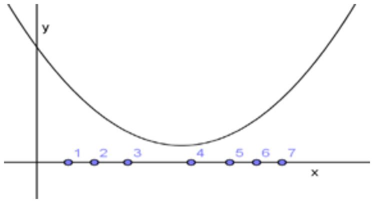


Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap verilmemiş veya "Teğeti temsil eder" yönünde ifade var.
1	Yalnızca teğet çizilmiş veya teğet doğrusu çizilmeden "eğimi verir" veya "fonksiyonun eğimini verir" yönünde ifadeler var.
2	Teğet doğrusu çizilerek teğetin eğimi belirtilmiş.

2. Yandaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonun grafiği verilmiştir.

$f'(1), f'(2), f'(3), f'(4), f'(5), f'(6), f'(7)$

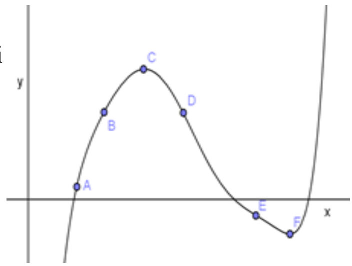
değerlerini *büyükten küçüğe* doğru sıralayınız.



Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya yanlış sıralama yapılmış.
1	1,2,3 için türev değerleri ve 5,6,7 için türev değerleri kendi aralarında kıyaslanmış, tüm noktalar kıyaslanmamış.
2	Doğru sıralama yapılmış.

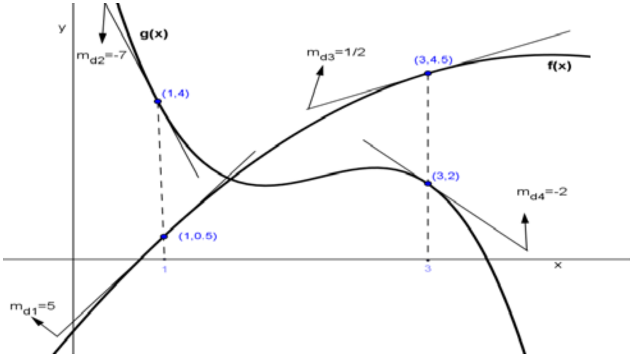
3. Yandaki şekilde bir y=f(x) fonksiyonunun grafiği ve grafiğin üzerinde bazı noktalar verilmiştir. Bu verilere dayanarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Hangi nokta(lar)da f '(x) değeri pozitiftir? Cevap:
b) Hangi nokta(lar)da f '(x) değeri negatiftir? Cevap:
c) Hangi nokta(lar)da f '(x) değeri sıfırdır? Cevap:
d) Hangi noktada f '(x) değeri en büyüktür? Cevap:
e) Hangi noktada f '(x) değeri en küçüktür? Cevap:



Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya istenen özellikleri sağlayan noktalar yanlış belirlenmiş.
1	Türev değeri pozitif, negatif ve sıfır olan noktalar doğru olarak belirlenmiş, fakat en büyük ve en küçük türev değerine ilişkin yorum yapılmamış veya yanlış belirlenmiş.
2	Tüm istenen noktalar doğru olarak belirlenmiş.

4. Aşağıdaki şekilde $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ve grafiklere çizilen teğetler eğim değerleri ile birlikte $(m_{d1} = 5, m_{d2} = -7, m_{d3} = 1/2, m_{d4} = -2)$ verilmiştir. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki soruları yanıtlayınız.



$(f + g)'(1) =$

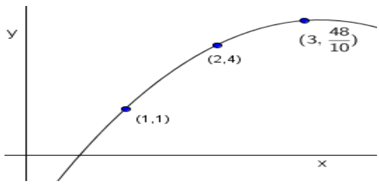
$(f.g)'(1) =$

$f'(3) - g'(1) =$

$g'(3) + f'(1) =$

Puan	Cevabın Tasviri
0	Cevap yok veya istenen türev değerleri yanlış olarak belirlenmiş
1	$(f.g)'(1) = f'(1).g'(1)$ şeklinde geçersiz eşitlik kurularak yanlış sonuç elde edilmiş. Diğer istenen değerler doğru olarak bulunmuş.
2	Tüm istenen değerler doğru olarak belirlenmiş.

5. Yandaki grafikte y=f(x) fonksiyonunun grafiği ve grafik üzerinde 3 nokta koordinatları ile birlikte verilmiştir. Bu verilerden hareketle aşağıdaki yargıları doğru veya yanlış olarak belirleyiniz.



i) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri 1 olabilir Doğru Yanlış

ii) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri $\frac{7}{2}$ olabilir Doğru Yanlış

iii) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri $\frac{7}{3}$ olabilir Doğru Yanlış

iv) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri $\frac{1}{2}$ olabilir Doğru Yanlış

v) Fonksiyonun x=2 noktasındaki türev değeri $\frac{3}{4}$ olabilir Doğru Yanlış

Puan	Cevabın Tasviri
0/1	Önermenin doğruluğu yanlış belirlenmiş/ Önermenin doğruluğu doğru belirlenmiş