MARKOV ZİNCİRLERİ İLE PAZAR PAYI ARAŞTIRMA MODELİ VE OTOMOBİL LASTİĞİ PAZARINDA BİR UYGULAMA

Yavuz SOYKAN*

ÖZET: Markov Zincirleri, biyoloji, fizik, kimya gibi fen bilimleri yanında, işletme ve ekonomi gibi sosyal bilimlerde de uygulanma imkanı olan bir yöneylem araştırması tekniğidir. Teknik matris cebiri ve olasılık kanunlarından yararlanarak karar vericilere, bir sistemin mevcut özelliklerinde meydana gelebilecek davranış değişikliklerinin saptanmasını sağlayan, etkin ve pratik bir tahmin tekniğidir. Bu amaçla, pazarda çok sayıda rakip markanın bulunduğu durumlarda, pazar payı tahminlerinin elde edilmesinde markov zincirlerinin nasıl kullanılabileceği gösterilmeye çalışılacaktır. Böylece pazar payı araştırmaları için etkin bir tekniğin uygulanabilirliği gösterilmiş olacaktır.

Anahtar Kelimeler: Markov Zincirleri, Pazar Payı Araştırmaları, Pazar Payı Tahmini, Yöneylem Araştırması Tekniği

ABSTRACT: Markov chains is an operations research technique that has the possibility of being applied in social sciences disciplines such as management and economics as well as in positive sciences such as biology, physchics and chemistry. This technnique provides the decision makers with the determining of behavior changes that are likely to ocur in a system's current characteristics by utilizing matrix algebra and probability laws. Fort his purpose, how markov chains can be used, in forecasting the market shares in cases where there are so many rival brands in the market, will be tried to be shown. Hence, the applicability of an efficient technique in market share researches will be shown

Keywords: Markov Chains, Market Share Researches, Market Share Forecast, Operations Research Technique

1. GİRİŞ

İşletmelerin mal ya da hizmetlerini sundukları pazarlarda varlıklarını sürdürebilmeleri, karar vericilerin alacakları kararların sağlıklı ve tutarlı olmasına bağlıdır. Bu amaca hizmet eden yöneylem araştırması teknikleri geliştirilmiştir. Söz konusu teknikler, model parametrelerinin önceden bilinmesi halinde deterministik model, parametrelerin olasılık kanunlarına göre belirlenmesi halinde ise stokastik model olarak adlandırılırlar. Stokastik modeller genel olarak stokastik süreçler başlığı altında incelenirler. Markov zincirleri ise stokastik süreçlerin özel bir sınıfını oluşturmaktadır.

Markov zincirleri, belirli koşullara bağlı rassal olayların davranışlarını açıklama ve kestirimi amacıyla kullanılmaktadır. İşletmelerde muhasebe, insan kaynakları, üretim kontrol, kalite kontrol problemleri Markov zincirleri uygulamalarının sıkça kullanıldığı alanlardır. Günümüz yöneticilerinin, markov süreçlerini başarılı bir şekilde nerelere uygulayabilecekleri anlayışını geliştirmeleri artık bir zorunluluk haline gelmiştir (Hoşcan:1992,1).

Markov zincirleri ile tutarlı pazar payı tahminlerinin elde edilmesi, pazarın yapısına ve tüketicilerin davranışlarına ilişkin bir takım varsayımların gerçekleşmesine bağlıdır. Tüketicilerin geçmiş dönemlerdeki satın alma davranışlarının gelecekte de devam etmesi gerekir. Tüketiciler muntazam satın alma davranışında bulunmalıdır. Pazarın yapısı ile ilgili olarak; araştırma sürecinde pazar büyüklüğü sabit kalmalı ve pazara yeni rakipler girmemelidir (Kurtuluş: 1996,22).

2. STOKASTİK SÜREÇLER VE MARKOV SÜREÇLERİ

Bir amacı gerçekleştirmek için, birbirlerini etkileyen ve birbirlerine bağımlı olan olayların meydana getirdiği bir bütün, sistem olarak tanımlanır (Demir ve Gümüşoğlu, 1986). Sistem elemanlarının sistem içi ve sistemler arası etkileşimleri sistem faaliyetleri üzerinde etkiler yaratır. Bu etkilerin sistemde meydana getirdiği değişikliğin büyüklüğü belirlenemeyebilir. Söz konusu etkilerin tahmini olan sistem davranışları ile stokastik süreçlerin temeli atılmış ve 1953 yılında J. L. Doob tarafından ileri sürülmüştür (Kumar and Varaiya, 1986).

2.1. Stokastik Süreçlerin Temel Kavramları

Stokastik süreç, tekrarlanabilen bir gözlem dizisidir. Ortaya çıkan iki veya daha fazla sonuç, olasılık kanunları ile belirlenir. Rassal deneme ile stokastik süreç aynı anlamdadır (Halaç, 1995).

S örnek uzayının, herbir basit olayını yalnız bir gerçel değere dönüştüren X fonksiyonuna rassal değişken adı verilir. X rassal değişkeni örnek uzayının her sonucunu bir gerçel sayıya bağlayan bir fonksiyondur. IR'nin her aralığının ilk görüntüsü S' nin bir olayıdır (İnal, 1982). X rassal değişkeninin değerlerini aldığı A kümesi, gerçel sayılar kümesinin bir tamsayılar alt kümesi ise, bu rassal değişkene, kesikli rassal değişken denir. Rassal değişkenler genellikle X, Y, Z gibi büyük harfler ile gösterilir (Aytaç, 1994).

X rassal değişkeninin değerler kümesinin alt kümesi,

$$A_1 = \{ X_i \mid i = 0,1,\ldots\ldots,n \} = \{ X_0 , X_1 , X_2 , \ldots\ldots, X_n \}$$

* Yrd.Doç.Dr. Dumlupınar Üniversitesi Uygulamalı Bilimler Yüksekokulu.

noktalarından oluşan bir gerçel sayılar kümesidir.

X rassal değişkeninin aldığı değerlerin kümesi A’ daki herhangi bir değere eşit olma olasılığı sıfır ise, bu rassal değişkene sürekli rassal değişken denir. Bu durumda A kümesi sonsuz elemanlıdır (Ersoy, 1977).

X rassal değişkeninin değerler kümesinin alt kümesi,

$A_1 = \{ X_i \mid a \le X_i \le b \}$ veya

$A = IR$ durumunda,

$A = \{ X_i \mid -\infty < X_i < \infty \}$ olur (Kara, 1989).

Stokastik süreç, verilen bir T kümesinden alınan bir t zaman parametresi olmak üzere, $\{ X_t \}$ rassal değişkenler kümesi veya ailesi olarak tanımlanır. Rassal değişkenlerin aldığı herbir özel değer, bir durum olarak adlandırılır (Halaç, 1995).

$\{ X_t \}$, t zaman parametresine göre değerler alan rassal bir değişken

iken,

$\{ \{ X_t \} \mid t \in T \}$

kümesi sonsuz terim taşırsa, ilgilenilen olay bir stokastik süreçtir. Stokastik süreçlerin uygulamasında t bir zaman parametresi olarak ele alınmakta ve T olayın ilgilenilen zaman aralığı olmaktadır. $\{ X_t \}$ rassal değişkenin t anındaki değerini gösterir (Kara, 1979).

Bir stokastik sürecin parametre uzayı ve durum uzayı olmak üzere iki temel öğesi vardır.

Parametre Uzayı : Bir stokastik süreçte, rassal değişkenin bağlı bulunduğu (t) ‘lerin aldığı bütün değerler T parametre uzayını meydana getirir.

Durum Uzayı : Bir stokastik süreçte, rassal değişkenin t ’ ler için alabileceği değerler S durum uzayını meydana getirir.

Parametre ve durum uzayları ile tanımlanan bir stokastik süreç,

$X : T \rightarrow S$ $S = \{ X_t \}$ şeklindedir (Kara, 1979).

Stokastik süreçler parametre ve durum uzayının kesikli ya da sürekli oluşuna göre ve rassal değişkenler arası ilişkilere göre sınıflandırılabilir.

i. Parametre ve Durum Uzayına Göre Sınıflandırma : Parametre ve durum uzaylarının özellikleri, süreç üzerindeki çalışmalara temel oluşturur. Bir stokastik süreç oluşturan olayın durumları incelenirken, öncelikle sürecin parametre ve durum uzayları belirlenir (Kara, 1979).

Bir deneyin mümkün sonuçları, rassal değişken $\{ X_t \}$’ nin alabileceği değerlerdir. Söz konusu değerler kümesine örnek uzayı denir. $\{ X_t \}$’nin mümkün sonuçları ile S, tamsayılı kesikli değerler içerirse, $\{ X_t \}$ kesikli durumlu stokastik süreç olarak tanımlanır. Diğer bir ifade ile, S sürecin (yani denemeler dizisinin) tamsayılı durumlarını kapsar. S $-\infty$ dan $+\infty$ a kadar bir doğru üzerinde sürekli değerlerle tanımlanırsa, $\{ X_t \}$ sürekli durumlu stokastik süreç olarak tanımlanır.

S durum uzayı için verilen tanımlara benzer şekilde, T parametre uzayı değerleri kesikli veya sürekli olabilir. T tamsayı değerler ile tanımlanırsa, $T=\{0,1,2, ...\}$, $\{ X_t \}$ kesikli parametreli stokastik süreç adını alır. T sürekli değerler ile tanımlanırsa, $T=[0, \infty)$, $\{ X_t \}$ sürekli parametreli stokastik süreç adını alır.

ii. Rassal Değişkenler Arası İlişkilere Göre Sınıflandırma : Rassal değişkenler arasındaki ilişkiler, stokastik süreçleri karakterize eden ve sınıflandırılmalarında kullanılan bir diğer özelliktir. Bu özellik ile stokastik süreçler ; tekrarlayan, durağan, bağımsız artmalı ve Markov süreçleri şeklinde sınıflandırılabilir (Aslanargun, 1991).

a) Tekrarlayan Süreçler : Süreç akışı etkileyen rassal bir nokta ile temsil edilir. Bu noktaya yenileyici nokta veya markov noktası denir. Markov noktasına ulaşıldıktan sonra sürecin geleceği, geçmişteki durumundan etkilenmez.

b) Durağan Süreçler : $\{ X_t \mid t \in T \}$ stokastik süreci, zamana bağlı olmayan bir dağılıma sahip ise veya rassal değişkenlerin dağılım fonksiyonu zamanda sabit kalıyorsa, bu süreç durağan süreçtir.

c) Bağımsız Artmalı Süreçler : { $X_t \mid t \in T$ } stokastik süreci, $t_1 < t_2 < . .. .<t_n$ olsun. { $x_{t_i} - x_{t_j} \mid i \neq j$ } kümesinin elemanları birbirlerinden bağımsız iseler, X_t süreci bağımsız artmalı stokastik süreçtir.

d) Markov Süreçleri : { $X_t \mid t \in T$ } sürecinde parametre kümesindeki herhangi bir $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ kümesi için X_{t_n} 'in değeri X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, ..., $X_{t_{n-1}}$ in verilen değerlerine göre koşullu dağılımı yalnızca $X_{t_{n-1}}$ değerine bağlı olusa { $X_t \mid t \in T$ } süreci markov sürecidir.

2.2 Markov Süreçleri

Markov süreci, şu anda meydana gelen bir faaliyetin gelecekteki durumu hakkında bilgi edinmeyi mümkün kılan bir yöneylem araştırması tekniğidir (Karayalçın, 1977).

$t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ (n=1,2,.....) parametre uzayındaki noktaları temsil ederek, { X_t } rassal değişkenlerinin kümesi bir markov sürecidir.

$$P\{X_{t_n} = X_n / X_{t_{n-1}} = X_{n-1}, X_{t_{n-2}} = X_{n-2}, \ldots\ldots, X_{t_0} = X_0\} = P\{X_{t_n} = X_n / X_{t_{n-1}} = X_{n-1}\}$$

Sistemin t_{n-1} zamandaki durumu X_{n-1} verilerek, t_n zamandaki durumunun X_n olduğunu gösteren koşullu olasılığıdır. Bu bağıntı bir markov sürecinin şu andaki durumu bilinmek üzere, gelecekteki durumu, geçmiş durumlardan bağımsızdır (Taha, 1976).

Bir markov sürecinde bir önceki durum verilerek, bir sonraki durumun koşullu olasılığının daha önceki durumlardan bağımsız olma özelliğine Markov Özelliği denir (Or, 1986).

Mevcut (veya bir önceki) durum verilerek bir sonraki durumun koşullu olasılığı, mevcut (veya bir önceki) duruma göre daha önceki durumlardan bağımsızdır.

Kesikli durumlu ve kesikli parametreli stokastik süreçler için mevcut durum ($x_t = x_t$) ve mevcut duruma göre öncelikli durumlar $x_0 = x_0$,$x_1 = x_1$,.. $x_{t-1} = x_{t-1}$ verilerek bir sonraki durumun koşullu olasılığına özdeştir ve t=0,1,. . . . değerlerini alarak Markov Özelliği ;

$P(x_{t-1} = x_{t-1} \mid x_0 = x_0, x_1 = x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_t = x_t) = P(x_{t+1} = x_{t+1} \mid x_t = x_t)$

olarak yazılır.

a ve b rassal değişkenin değişim aralığı, t_k durumun bir önce gerçekleştiği zaman içindeki nokta, t_{k+1}, durumun onu takiben gerçekleştiği nokta ve $t_0 < t_1 < . . . . . . < t_k < t_{k+1}$ olmak üzere gerçek değerli ve sürekli parametreli süreç için matematiksel ifade,

$$P(a < x_{tk+1} \leq b) \mid x_{t_0} = x_0, x_{t_1} = x_1, \ldots\ldots, x_{t_k} = x_k) = P(a < x_{tk+1} \leq b) \mid x_{t_k} = x_k)$$

şeklinde yazılır (Halaç,1995).

2.3. Markov Süreçlerinin Uygulama Alanları

Yöneylem Araştırması tekniklerinden birisi olan Markov süreçlerinin, hemen hemen her alanda uygulamalarına rastlamak mümkündür. Markov süreçleri, biyoloji, fizik, astronomi, kimya ve benzeri bilimlerin yanında, ekonomi ve işletme gibi sosyal bilimlerin aşağıda sıralanan özel konularında da uygulama olanağı bulmuştur (Erçelebi, 1993).

Markov süreçleri, bir kurumda insangücü hareketliliğinin modellenmesi durumunda uygun bir yaklaşımdır. Kariyer planlaması açısından personeli işletme içi yükseltme ve kaydırma süreçlerine ilişkin problemler matematik teknikler ile çözülebilir. Bu amaçla uygulamada stokastik analiz yaklaşımlarına sıkça rastlanmaktadır (Kaynak, 1996) (Özkan, 1983).

Markov süreçleri bir işletmenin alacaklı hesapların tahsil edilemeyen miktar oranının hesaplanmasında başarı ile uygulanmaktadır. İşletmeler belirsizlik altında gelirin belirlenmesi amacı ile markov süreçlerini kullanabilirler (Markland and Sweigart, 1987).

İşletmeler analitik bir model ile tüketici davranışlarını ifade edebilmek için çaba sarfederler. Pazarlama problemlerindeki değişkenlerin yapısı stokastiktir. İşletmeler bulundukları pazarda, pazar paylarını belirlemek ve marka bağlılığının etkisini analiz etmek amacıyla markov süreçlerini kullanmaktadırlar (Kotler,1993).

Baraj göllerinde su depolanmasını içeren davranışların incelenmesinde, bu davranışları etkileyen fiziksel olayların stokastik özellik taşıdığı görülmektedir. Baraj göllerinde toplanan su miktarı ve çökelmenin zamana bağlı olarak açıklanmasında markov süreçleri kullanılmaktadır (Can ve Yücel, 1979). Markov süreçleri biyolojide de uygulanma imkanı bulmuştur. Genetikçiler tarafından kullanılan bir tekniktir (Kutsal, v.d., 1975).

Markov süreçlerinin belirtilen uygulama alanları yanında, hisse senedi fiyat dalgalanmalarının analiz edilmesi, fiyatlama stratejilerinin değerlendirilmesi, bir petrol şirketinin verilen bir pazar alanında kurması gereken optimum servis istasyonları sayısının belirlenmesinde markov süreçlerinden sıkça faydalanılmaktadır (Çınar, 1990).

3. Markov Zincirleri ile Pazar Payı Araştırma Modeli

Bir markov zincirinde m mümkün durum olabilir. Pazar Payı Araştırma Modelinde m, pazarda bulunan mevcut bir malın toplam marka sayısını ifade eder. Böylece bir malın, m sayıda farklı markaya ilişkin bugünkü pazar payları, başlangıç olasılık vektörü ile gösterilir. Başlangıç olasılık vektörü, elemanları toplamı 1'e eşit, pozitif değerlere sahip bir olasılık vektörüdür.

$\Pi_0 = [\ P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, \ldots\ldots, P_m^{(0)}\ ]$

İ=1,2,3, ..., m olmak üzere,

$P_i^{(0)}$ = i nci markaya ilişkin bugünkü pazar payını ifade etmektedir.

Tüketicinin n nci dönem tercihinde i nci markayı, n+1 nci dönem tercihinde j nci markayı satın alma olma olasılığı $P_{i\,j}$ ile gösterilir. $P_{i\,j}$ lerden oluşan mxm boyutlu geçiş olasılıkları matrisi, satır toplamları 1' e eşit, pozitif değerlerden oluşan bir olasılık matrisidir. Köşegen üzerindeki (i=j) olasılıkları, sürecin bir dönem sonra, muhafaza edilen müşteri oranlarını ya da müşterilerin muhafaza edilme olasılıklarını ifade eder. Köşegen dışındaki (i≠j) olasılıkları, bir dönem sonra kazanılan veya kaybedilen müşteri oranlarını ya da kazanma veya kaybetme olasılıklarını ifade eder. Bir adım geçiş olasılıklarından oluşan geçiş olasılıkları matrisi;

$$P=[P_{ij}] = \begin{bmatrix} P_{11}\ P_{12}\ \ldots\ldots P_{1m} \\ P_{21}\ P_{22}\ \ldots\ldots P_{2m} \\ P_{31}\ P_{32}\ \ldots\ldots P_{3m} \\ . \quad . \qquad . \\ . \quad . \qquad . \\ . \quad . \qquad . \\ P_{m1}\ P_{m2}\ \ldots\ldots P_{mm} \end{bmatrix} \quad i=1,2,\ldots\ldots,m\ ,\ j=1,2,\ldots\ldots,m$$

şeklinde ifade edilir.

Sözkonusu malın n nci dönemde markalara göre pazar payları (Π_n), başlangıç olasılık vektörü (Π_0) ile geçiş olasılıkları matrisinin (P) n nci kuvvetinin çarpımı ile elde edilir. (1xn) ve (nxn) boyutlu iki matrisin çarpımından (1xn) boyutlu n-adım olasılık vektörü (Π_n) oluşur(Budnic,1988) (Kirkpatrick,1984).

$\Pi_n = [P_1^{(n)},P_2^{(n)},P_3^{(n)},\ldots\ldots,P_m^{(n)}]$

İ=1,2,3, ..., m olmak üzere,

$P_i^{(n)}$ = i nci markaya ilişkin n nci dönem pazar payını ifade etmektedir.

$$\Pi_n = \Pi_0 \cdot P^n$$

$$[P_1^{(n)},P_3^{(n)},\ldots\ldots,P_m^{(n)}] = [P_1^{(0)},P_2^{(0)},\ldots\ldots,P_m^{(0)}\ ]. \begin{bmatrix} P_{11}\ P_{12}\ \ldots\ldots P_{1m} \\ P_{21}\ P_{22}\ \ldots\ldots P_{2m} \\ P_{31}\ P_{32}\ \ldots\ldots P_{3m} \\ . \quad . \qquad . \\ . \quad . \qquad . \\ . \quad . \qquad . \\ P_{m1}\ P_{m2}\ \ldots\ldots P_{mm} \end{bmatrix}^n$$

$P_1^{(n)} = P_1^{(0)}.P_{11} + P_2^{(0)}.P_{21} + P_3^{(0)}.P_{31} + \ldots\ldots\ldots + P_m^{(0)}.P_{m1}$
$P_2^{(n)} = P_1^{(0)}.P_{12} + P_2^{(0)}.P_{22} + P_3^{(0)}.P_{32} + \ldots\ldots\ldots + P_m^{(0)}.P_{m2}$

$P_m^{(n)} = P_1^{(0)}.P_{1m} + P_2^{(0)}.P_{2m} + P_3^{(0)}.P_{3m} + \ldots\ldots\ldots + P_m^{(0)}.P_{mm}$

n-adım olasılık vektörünün yukarıdaki matris çarpımından elde edilmesi ile, birden fazla döneme ilişkin pazar paylarının hesaplanması mümkündür. Π_{n+1} ile ifade edilecek n nci dönemden bir sonraki döneme ilişkin, markaların pazar payları, n-adım geçiş olasılıkları vektörü ile geçiş olasılıkları matrisi çarpımı ile hesaplanır.

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n \,.\, P$$

$$[P_1^{(n+1)}, P_2^{(n+1)}, \ldots\ldots, P_m^{(n+1)}] = [P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \ldots\ldots, P_m^{(n)}] . \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots\ldots P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots\ldots P_{2m} \\ P_{31} & P_{32} & \ldots\ldots P_{3m} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ P_{m1} & P_{m2} & \ldots\ldots P_{mm} \end{bmatrix}$$

$P_1^{(n+1)} = P_1^{(n)}.P_{11} + P_2^{(n)}.P_{21} + P_3^{(n)}.P_{31} + \ldots\ldots\ldots + P_m^{(n)}.P_{m1}$
$P_2^{(n+1)} = P_1^{(n)}.P_{12} + P_2^{(n)}.P_{22} + P_3^{(n)}.P_{32} + \ldots\ldots\ldots + P_m^{(n)}.P_{m2}$

$P_m^{(n+1)} = P_1^{(n)}.P_{1m} + P_2^{(n)}.P_{2m} + P_3^{(n)}.P_{3m} + \ldots\ldots\ldots + P_m^{(n)}.P_{mm}$

P geçiş olasılıkları matrisinin n nci kuvvetleri alındığında (P^n), n değeri büyüdükçe $P_{i\,j}$ değerlerinin sabit bir değere yaklaştığı ifade edilmişti. Pazar Payı Araştırma Modelinde, merkezi limit teoremi olarak bilinen bu durum, pazarda bir süre sonra kayıp ve kazançların enaza ineceğini, geçiş olasılıkları matrisinin kararlı bir yapıya ulaşacağını gösterir.

$$\Pi = \Pi \,.\, P$$

$$[P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_m] = [P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_m] . \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots\ldots P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots\ldots P_{2m} \\ P_{31} & P_{32} & \ldots\ldots P_{3m} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ P_{m1} & P_{m2} & \ldots\ldots P_{mm} \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağlayan $\Pi = [P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots, P_m]$ vektörüne denge vektörü denir. Denge durumu koşullarını içeren olasılıkları kapsar. Eşitliğin sol tarafında bulunan satır vektörü ile P geçiş olasılıkları matrisinin çarpımı ile, yine bir satır vektörü bulunarak eşitliğin sağ tarafındaki vektör elemanlarına herbiri eşitlenerek m adet denklem elde edilir.

$$\sum_{j=1}^{m} P_i = 1$$

şartı ile denklem sistemine bir denklem daha eklenebilir. m bilinmeyen, m+1 denklemden oluşan sistemde denklemlerden bir tanesi keyfidir. Çözüme dahil edilmeyebilir (Halaç,1991).

$$P_1.P_{11}+ P_2.P_{21}+ P_3.P_{31}+. . . . .+ P_m.P_{m1} =P_1$$
$$P_1.P_{12}+ P_2.P_{22}+ P_3.P_{32}+. . . . .+ P_m.P_{m2} =P_2$$

$$P_1.P_{1m}+ P_2.P_{2m}+ P_3.P_{3m}+. . . . .+ P_m.P_{mm} =P_m$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + ...+ P_m= 1$$

Markov zincirleri ile müşteri eğilimlerini inceleyen Markov Zincirleri tekniği, özellikle işletmenin belirli bir bölgede kısıtlı sayıda müşteriye sahip olduğu durumlarda ve pazarın küçük olması halinde daha kesinlik kazanır

4. Uygulama

Anket formunun uygulanmasıyla, başlangıç olasılık vektörü ve geçiş olasılıkları matrisinin oluşturulmasından önce, modelde kullanılan mümkün durumlar, başlangıç olasılık vektöründeki anlamları ($P_i^{(0)}$), geçiş olasılıkları matrisindeki anlamları ($P_{i\,j}$) ve n-adım olasılık vektöründeki anlamları ($P_i^{(n)}$) aşağıda tanımlanmıştır.

Mümkün durumlar: P_i , i=1,2,3, ...12

P_1 : Bridgestone
P_2 : Cooper
P_3 : Dunop
P_4 : Falken
P_5 : Fulda
P_6 : Goodyear
P_7 : Hankkok
P_8 : Lassa
P_9 : Michelin
P_{10} : Petlas
P_{11} : Pirelli
P_{12} : Stunner

Başlangıç olasılık vektörü: $\Pi_0 = [\ P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, ..., P_{12}^{(0)}\ ]$

$P_i^{(0)}$: Daha önce satın alınan i nci marka lastiğin, toplam satın alınan lastik markaları içindeki oransal değeri. Tüm markalar için $P_i^{(0)}$ (i=1,2, . . .,12) değerleri hesaplanarak başlangıç olasılık vektörü bulunacaktır.

Geçiş olasılıkları matrisi: $P=[P_{i\,j}]$

$P_{i\,j}$: Bir önceki lastik markası tercihinde i nci markayı, son tercihinde j nci markayı tercih eden tüketicilerin oransal değeri.

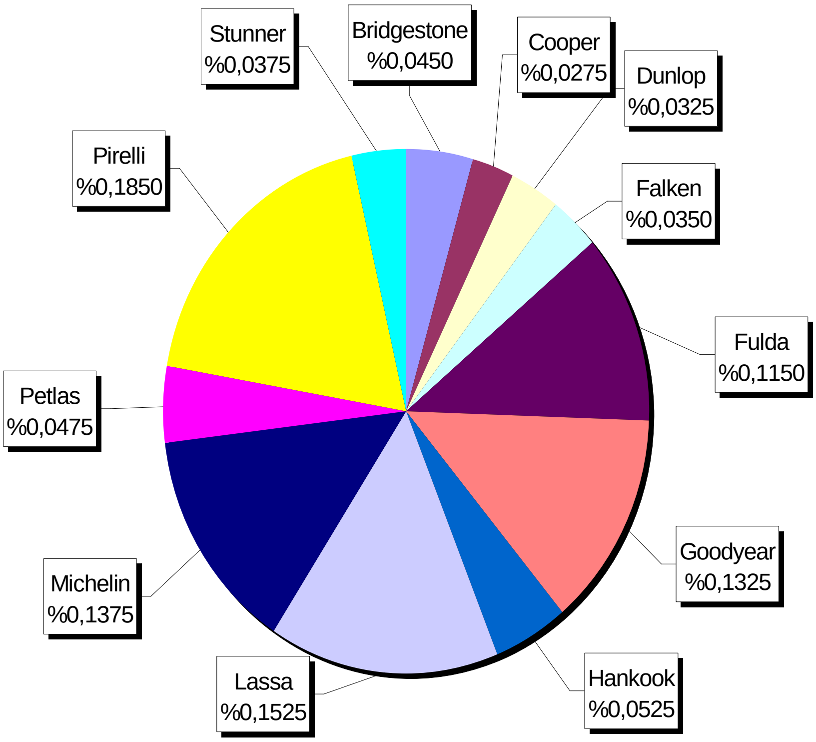
n-adım olasılık vektörü: $\Pi_n = [P_1^{(n)},P_2^{(n)},P_3^{(n)},.....,P_m^{(n)}]$

$P_i^{(n)}$: Modelin çözümü ile i nci marka lastiğin n nci dönemde pazar payını gösteren oransal değerdir.

Anket formları değerlendirilerek modelin çözümünde kullanılacak başlangıç olasılık vektörü ve geçiş olasılıkları matrisi bulunur.

Başlangıç Olasılık Vektörü Π_0 : Araştırmada 12 otomobil lastiği markasına karşılık gelen 12 mümkün durumdan oluşan başlangıç olasılık vektörü elemanları.

$P_i^{(0)}$ (i=1,2, . . .,12): Daha önce satın alınan i nci marka lastiğin, toplam satın alınan lastik markaları içindeki oransal değerini göstermektedir. Böylece herbir $P_i^{(0)}$ değeri aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.



$P_i^{(0)}$ = Daha önce i. marka lastiği kullanan tüketici sayısı / Örneklem hacmi

$$\Pi_0 = \left[\frac{18}{400} \ \frac{11}{400} \ \frac{13}{400} \ \frac{14}{400} \ \frac{46}{400} \ \frac{53}{400} \ \frac{21}{400} \ \frac{61}{400} \ \frac{55}{400} \ \frac{19}{400} \ \frac{74}{400} \ \frac{15}{400} \right] =$$

[0.045 0.0275 0.0325 0.035 0.115 0.1325 0.0525 0.1525 0.1375 0.0475 0.185 0.0375]

Başlangıç olasılık vektörüne göre, otomobil lastiği pazarında %18.5 ile Pirelli, %15.25 ile Lassa, %13.75 ile Michelin, %13.25 ile Goodyear, %1.15 ile Fulda, %0.525 ile Hankook, %0.475 ile Petlas, %0.45 ile Bridgestone, %0.375 ile Stunner, %0.35 ile Falken, %0.325 ile Dunlop ve %0.275 ile Cooper sıralanmaktadır. Bu değerler markaların başlangıç (2009 yılı) pazar paylarını ifade etmektedir.

Başlangıç olasılık vektörü elemanları toplamı 1'e eşit olmalıdır. $\sum_{i=1}^{m} P_i^{(0)} = 1$ koşulunun sağlanması, pazarda mevcut 12 lastik markasının bulunduğunu ve anket formunda 5. soruya verilen cevaplarda (diğer) şıkkının hiç işaretlenmediğini gösterir. Başlangıç olasılık vektörünün oluşturulmasından sonra, modelin çözümünde kullanılacak olan geçiş olasılıkları matrisi belirlenir.

Geçiş Olasılıkları Matrisi P : mxm boyutlu bir kare matris olan geçiş olasılıkları matrisi oluşturulur. Otomobilinde önceki tercihinde i. marka lastiği, bir sonraki tercihinde j. marka lastiği kullanan tüketicinin hareketi $P_{i\,j}$ ile ifade edilir.

Geçiş olasılıkları matrisinde herbir $P_{i\,j}$ elemanı markalar arası tercih değişikliklerini ya da aynı markada tercihini kullanan tüketici oranlarını ifade eder.

400 birimlik örnekleme uygulanan anket sonuçlarının değerlendirilmesi ile, otomobil lastiği pazarında mevcut 12 lastik markasının başlangıç pazar paylarını gösteren başlangıç olasılık vektörü ve tüketicilerin markalar arası tercih hareketlerini gösteren geçiş olasılıkları matrisi elde edilmiştir. Her bir lastik markasının gelecek dönemlere ilişkin beklenen pazar paylarının hesaplanmasında;

$\Pi_n = \Pi_0 \, . \, P^n$ eşitliği kullanılacaktır.

n. döneme ilişkin markaların beklenen pazar paylarını gösteren n-adım olasılık vektörü;

$\Pi_n = [\, P_1^{(n)} \ P_2^{(n)} \ P_3^{(n)} \ P_4^{(n)} \ P_5^{(n)} \ P_6^{(n)} \ P_7^{(n)} \ P_8^{(n)} \ P_9^{(n)} \ P_{10}^{(n)} \ P_{11}^{(n)} \ P_{12}^{(n)} \,]$

İ=1,2,3, ..., 12 olmak üzere,

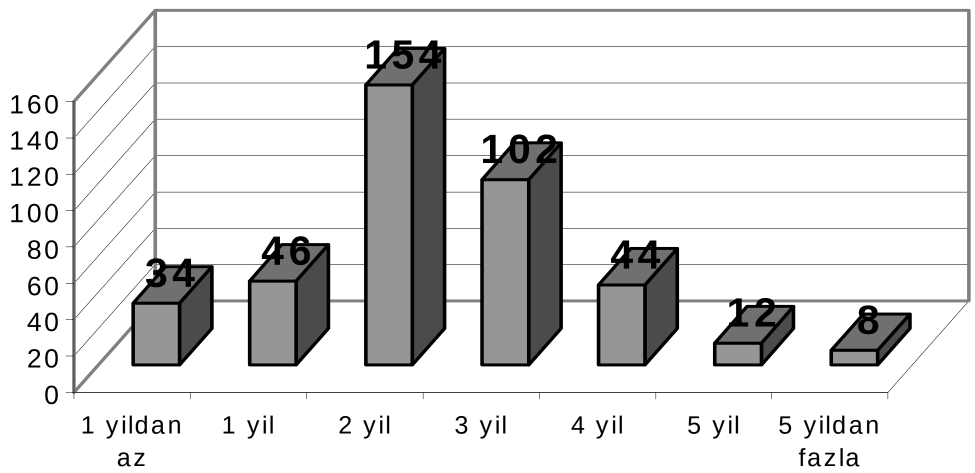
$P_i^{(n)}$ = i nci markaya ilişkin n nci dönem pazar payını ifade etmektedir.

Dönemler itibari ile 12 lastik markasının pazar paylarını tahmin ederken tahmin dönemleri arası sürenin (periyodun) belirlenmesi gerekir. Tahmin dönemleri arası süre (periyot) ile belirlenmiştir. 400 birimlik örneklemin ortalama lastik değiştirme süreleri aşağıdaki tabloda görülmektedir.

x_i	1 yıldan az	1 yıl	2 yıl	3 yıl	4 yıl	5 yıl	5 yıldan fazla
n_i	34	46	154	102	44	12	8

Aşağıdaki grafikte de görüldüğü gibi tüketicilerin otomobillerinin lastiklerini değiştirme süreleri farklılık göstermektedir. Ancak en yüksek frekansa karşılık gelen 2 yıl olduğu için, araştırmada tahmin dönemleri arası süre 2 yıl olarak alınmıştır. Başlangıç olasılık vektörü 2009 yılı başında oluştuğundan, n-adım olasılık vektörleri de sırası ile 2011, 2013, 2015, 2017, 2019 yıllarına ait olacaktır.

Pazara mevcut 12 lastik markasından farklı bir markanın ne zaman gireceğini bilmek mümkün değildir. Markov zincirleri ile pazar payı tahmininde bulunurken, pazara yeni markaların girmeyecek olması varsayımına olabildiğince işlerlik sağlamak amacıyla, tahmin dönemi 5 ile sınırlandırılarak, 2010 ile 2020 yılları arası için hesaplanmıştır. Tahmin sonuçları 1x12 boyutlu başlangıç olasılık vektörü ve 12x12 boyulu geçiş olasılıkları matrisinin n.kuvvetinin çarpımı ile elde edileceğinden, hesaplamalarda QSB paket programından yararlanılmıştır. Çözüm sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.



		Markaların Beklenen Pazar Payları				
LASTİK MARKASI	Bugünkü Pazar Payları **2009** (Π_0)	**2011** (Π_{n+1})	**2013** (Π_{n+2})	**2015** (Π_{n+3})	**2017** (Π_{n+4})	**2019** (Π_{n+5})
Bridgestone	0.0450	0.0875	0.0946	0.0980	0.0982	0.0981
Cooper	0.0275	0.0425	0.0454	0.0459	0.0461	0.0462
Dunlop	0.0325	0.0349	0.0336	0.0308	0.0299	0.0295
Falken	0.0350	0.0351	0.0332	0.0329	0.0330	0.0331
Fulda	0.1150	0.1674	0.1718	0.1727	0.1733	0.1736
Goodyear	0.1325	0.1649	0.1657	0.1651	0.1647	0.1646
Hankook	0.0525	0.0402	0.0358	0.0338	0.0331	0.0328
Lassa	0.1525	0.1549	0.1479	0.1460	0.1458	0.1458
Michelin	0.1375	0.1274	0.1329	0.1361	0.1373	0.1379
Petlas	0.0475	0.0250	0.0214	0.0207	0.0205	0.0205
Pireli	0.1850	0.1002	0.0959	0.0959	0.0960	0.0959
Stunner	0.0375	0.0200	0.0218	0.0221	0.0221	0.0220
TOPLAM	**1.0000**	**1.0000**	**1.0000**	**1.0000**	**1.0000**	**1.0000**

Her bir lastik markasının pazar payları yıldan yıla değişiklik göstermektedir. Bu değişiklikler, markaların pazar paylarında artış ya da azalış şeklinde ortaya çıkmaktadır. İkinci bölümde değinildiği üzere, P geçiş olasılıkları matrisinin n. kuvvetlerinin alınmasıyla, n değeri büyüdükçe $P_{i\,j}$ değerlerinin kararlı bir yapıya ulaşacağı ifade edilmişti. Markov zincirlerinde denge durumu olasılıkları olarak ifade edilen bu olasılıklar, belirli bir dönemden sonra markaların pazar paylarında bir değişikliğin olmayacağını kabul eder.

$\Pi = \Pi \, . \, P$ eşitliği ile hesaplanacak denge vektörü Π , otomobil lastiği markalarının denge durumu olasılıklarını verecektir.

Π olasılık vektörü ve P geçiş olasılıkları matrisinin çarpımı ile elde edilecek denklem sayısı 12 dir. 12 otomobil lastiği markası için denge durumu olasılıklarını veren olasılık vektörünün elemanları toplamı 1' e eşit olacaktır. $\sum_{j=1}^{12} P_i = 1$ olduğunu gösteren aşağıdaki denklem de denklem takımına eklenir.

$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + P_{12} = 1$

$P_1=0.28P_1+0P_2+0P_3+0P_4+0.22P_5+0P_6+0P_7+0.17P_8+0.17P_9+0.06P_{10}+0.11P_{11}+0P_{12}$

$P_2=0.09P_1+0.27P_2+0P_3+0.18P_4+0P_5+0.28P_6+0P_7+0P_8+0.18P_9+0P_{10}+0P_{11}+0P_{12}$

$P_3=0P_1+0P_2+0.39P_3+0P_4+0.15P_5+0.31P_6+0P_7+0.15P_8+0P_9+0P_{10}+0P_{11}+0P_{12}$

$P_4=0P_1+0P_2+0.14P_3+0.29P_4+0.21P_5+0P_6+0P_7+0.29P_8+0.07P_9+0P_{10}+0P_{11}+0P_{12}$

$P_5=0.07P_1+0.02P_2+0P_3+0P_4+0.26P_5+0.15P_6+0P_7+0.11P_8+0.17P_9+0.04P_{10}+0.11P_{11}+0.07P_{12}$

$P_6=0.15P_1+0.08P_2+0.04P_3+0.04P_4+0.1P_5+0.23P_6+0.04P_7+0P_8+0.08P_9+0P_{10}+0.21P_{11}+0.04P_{12}$

$P_7=0.01P_1+0P_2+0.01P_3+0P_4+0P_5+0.01P_6+0.43P_7+0P_8+0.01P_9+0P_{10}+0.14P_{11}+0.05P_{12}$

$P_8=0.01P_1+0.05P_2+0P_3+0P_4+0.15P_5+0.25P_6+0.03P_7+0.38P_8+0.05P_9+0P_{10}+0P_{11}+0P_{12}$

$P_9=0P_1+0.04P_2+0P_3+0.02P_4+0.24P_5+0.15P_6+0.06P_7+0.15P_8+0.33P_9+0P_{10}+0.04P_{11}+0P_{12}$

$P_{10}=0.11P_1+0P_2+0P_3+0P_4+0.26P_5+0P_6+0P_7+0.21P_8+0.05P_9+0.37P_{10}+0P_{11}+0P_{12}$

$P_{11}=0.07P_1+0.05P_2+0.04P_3+0.07P_4+0.18P_5+0.14P_6+0P_7+0.14P_8+0.01P_9+0P_{10}+0.23P_{11}+0P_{12}$

$P_{12}=0.20P_1+0P_2+0P_3+0P_4+0P_5+0.33P_6+0P_7+0.20P_8+0.13P_9+0P_{10}+0P_{11}+0.13P_{12}$

ve denklem sistemine,

$1 = P_1+ P_2+ P_3+ P_4+ P_5+ P_6+ P_7+ P_8+ P_9+ P_{10}+ P_{11}+ P_{12}$ eklenir.

Yukarıda 12 bilinmeyenden oluşan, 13 denklem çözülerek denge durumu olasılıkları vektörü elde edilir. Hesaplamalarda QSB paket programından yararlanılmıştır. Denge durumu olasılıkları QSB paket programında 12. iterasyonda elde edilmiştir.

Π=[0.098 0.0462 0.0292 0.0331 0.1738 0.1645 0.0327 0.1459 0.1381 0.0205 0.0959 0.022]

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Otomobil lastiği pazarında faaliyet gösteren işletmelerin yöneticilerinden alınan bilgiler ile, öncelikle pazarda mevcut otomobil lastiği markaları belirlenmiştir. Türkiye genelinde üretilen ya da ithal edilen toplam 25 otomobil lastiği markasının 12 tanesinin pazarda satışa sunulduğu görülmüştür. Bu bilgiler ışığında, anket formu hazırlanarak, 400 birimlik örnekleme, etkin ve yaygın kullanım imkanına sahip olması nedeni ile, basit tesadüfi örnekleme tekniği ile uygulanmıştır.

Anket sonuçlarının değerlendirilmesi ile, başlangıç olasılık vektörü (markaların 2009 yılı pazar payları) ve geçiş olasılıkları matrisi belirlenmiştir. Tahmin modelinin kurulması için gerekli ve yeterli olan başlangıç olasılık vektörü ve geçiş olasılıkları matrisinin belirlenmesinden sonra, 2 yıllık periyodlar ile 2010-2020 yılları arası otomobil lastikleri markalarının pazar payları tahminleri elde edilmiştir. Tahmin dönemleri arası süre 2 yıl olarak belirlenmiştir. Çünkü anket formlarının değerlendirilmesi sonucu, tüketicilerin ortalama lastik değiştirme sürelerinde en yüksek frekans, 2 yıl şıkkına karşılık gelmektedir. Otomobil lastiği markalarının pazar payları tahminlerini, pazar denge durumunun oluşacağı yıla kadar hesaplamak mümkündür. Ancak, yeni bir otomobil lastiği markasının, pazara bir süre sonra gireceğine kesin gözüyle bakılarak, tahminler 10 yıllık dönem ile sınırlandırılmıştır. Markov zincirleri ile sağlıklı ve tutarlı pazar payı tahminlerinin elde edilmesi, pazara yeni markaların girmeyecek olması varsayımına bağlıdır.

KAYNAKÇA

Aytaç, Mustafa. **Matematiksel İstatistik**. Bursa: Uludağ Üniversitesi Basımevi, 1994.

Aslanargun, Atilla. **Stokastik Süreçler**, Ders Notları, Eskişehir, 1991.

Budnick, Frank S. **Applied Mathematics for Business, Economics and Social Sciences**. 3 rd ed., New York : McGraw-Hill Internationals Editions, 1988.

Emre, Can ve Yücel, Önder. " Baraj Göllerinde Çökelmenin StokastikYöntemle İncelenmesi". **Yöneylem Araştırması V. Ulusal Kongresi Bildirileri**, 1979.

Curwin, John., Slater, Roger. **Quantitative Methods For Business Decisions**. 3 th. ed. London: Chopman and Hall, 1991.

Çalık, Nuri. **Pazarlama Yönetiminde Satış Tahmin Sürecine Bütünleşik Bir Yaklaşım**.Eskişehir:Anadolu Üniversitesi Basımevi, 1992.

Çınar, Mehmet. **Yönetsel Kararlara İlişkin Sayısal Yöntemler**, Kayseri: Erciyes Üniversitesi Basımevi, 1990.

Çömlekçi, Necla. **Temel İstatistik,** 3. Baskı. Eskişehir: Bilim Teknik Yayınevi, 1998.

Doğan İbrahim. **Yöneylem Araştırması Teknikleri ve İşletme Uygulamaları**, Eskişehir, Bilim TeknikYayınevi, 1995.

Erçelebi, Selamet G. "Homojen Olmayan Markov Prosesleri", **Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği XV. Ulusal Kongresi Bildirileri** , 1993.

Esin, Alptekin. **Yöneylem Araştırmasında Kullanılan Karar Yöntemleri**.Ankara: Gazi Üniversitesi,1988.

Forgionne, Guiseppi A. **Quantitative Management**. 2 th.ed. Chicago:The Dryden Press, 1990.

Grinstead, Charles M., Snell, J. Laurie. **Introduction to Probability**. 2 th. ed.USA: 1997.

Güler, Nergül. "Araç Motor Yağlarının Bursa' daki Pazar Paylarının Belirlenmesi Üzerine Bir Uygulama Denemesi", Yayınlanmamış Uzmanlık Tezi. Uludağ Üniversitesi, 1992.

Haeussler, Ernest F., Paul Richard S. **Introductory Mathematical Analysis For Business, Economics and the Life and Social Sciences**. 7 th.ed. New Jersey :A. Simon & Schuster Co., 1993.

Halaç, Osman. **Kantitatif Karar Verme Teknikleri.** 4. Baskı.İstanbul: Melisa Matbaacılık, 1995.

Hillier, Frederick S., Lieberman Gerald J. **Introduction to Operations Research**. California: Holden-Day Inc., 1967.

İnal, Ceyhan. **Stokastik Süreçler**.Ankara: Hacettepe Ünv.,İstatistik Ders Notları, 1982.

Kara, İmdat. "Rastnal Süreç Olarak Markov Zincirleri", **Eskişehir İ.T.İ.A. Dergisi**, C.15,S.2,1979.

Karlin, Samuel. **A First Course in Stochastic Processes**. New York: Academic,1975.

Kaynak, Tuğray. **İnsan Kaynakları Planlaması**. İstanbul: Melisa Matbaacılık, 1996.

Kotler, Philip. **Marketing Decision Making A Model Building Approach.** Great Britain: A Holt İnternational Edition,1974.

Kumar P., Varaiya P. **Estimation, Identification and Adaptive Control**. New Jersey: Printice Hall Inc., 1986.

Kurtuluş, Kemal. **Pazarlama Araştırmaları**. Genişletilmiş 5. Baskı. İstanbul: Avcıol Basım-Yayın, 1996.

Kutsal, Alaettin., İnal, Ceyhan. ve Ergül, Hülya. "Dengede Olan Topluluklarda Rasgele Genetik Kaymaların Markov Zincirleri ile Açıklanması", **Hacettepe Fen, Mühendislik Bilimleri Dergisi**, C.5, Mart 1975.

Levin, Richard I., Kirkpatrick, C .A. **Quantitative Approaches to Management**..New York: McGraw Hill Book Company, 1984.

Lipschutz, Semour. **Theory and Problems of Probability**. New York: Schaum's Outlines Series, McGraw Hill Book Company,1968.

Markland, Robert E., Sweigart, James R. **Quantitative Methods: Application to Managerial Decision Making** . Canada: John Wiley & Sons Inc. 1987.

Meyn, J.P., Tweedie, R.L. **Markov Chains and Stochastic Stability** Great Britain: Springer-Verlag London Ltd.,1993.

Özkan,İsmail ."İnsangücü Planlaması ve Markov Zincirleri Uygulaması" **Anadolu Üniversitesi Afyon İ. İ. B. F. 15. Yıl Armağanı**, No: 365, 1983,

Philippe, B., Saad, Yocuef. and Stenard William J."Numerical Methods in Markov Chain Modelling", **Operations Research Society of America**, Vol.40, No.6, November-December 1992,

Revuz,D. **Markov Chains**. Revised edition, Elsevier Science Publisher B.V., 1984.

Şahinoğlu, Mehmet ,**Applied Stochastic Processes.** Ankara: Set Ofset, 1988.

Taha, Hamdy A. **Operations Research An Introduction**. Fifth Ed. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.

Tanaka, A. Atsuhiro. Kino, Issei. "Lumpability of Markov Chains", **Journal of Operations Research Society of Japan**, Vol.41, No.1, March 1998.

Tenekecioğlu, Birol ve Kara, İmdat. "Pazarlama Kararlarında Yöneylem Araştırması", **Eskişehir İ.T.İ.A. Dergisi**, C.16,S.1,Ocak 1980.

Tokol, Tuncer. **Pazarlama Yönetimi**. Bursa : Ceylan Matbaacılık Ltd., 1996.