



Investigation of the effect of number and length of layers on the torsional behavior of layered leaf spring systems

Onur Özener¹ , Tunç Apatay^{2*}

¹Philips Medical Systems, Veenpluis 6, 5684 PC Best, The Netherlands

²Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Gazi University, 06570, Ankara, Türkiye

Highlights:

- Leaf spring systems subjected to torsion
- The effects of spring length and number of layers on torsional behavior
- Comparison of experimental, numerical and analytical results

Keywords:

- Torsion test setup
- Leaf spring systems
- Stress analysis
- Torsional behavior

Article Info:

Research Article

Received: 08.01.2026

Accepted: 16.06.2026

DOI:

10.17341/gazimmfd.1859046

Correspondence:

Author: Tunç Apatay
e-mail: tapatay@gazi.edu.tr
phone: +90 543 560 1651

Graphical/Tabular Abstract

The main objective of the study is to investigate the torsional behavior of the laminated leaf springs and investigate the effects of number of layers, lengths of the layers on this behavior. The results are obtained experimentally, analytically and numerically and compared. In Figure A, it's seen that the analytical and numerical results are very close to each other. But differences in the results increases significantly as the number of layers increases.

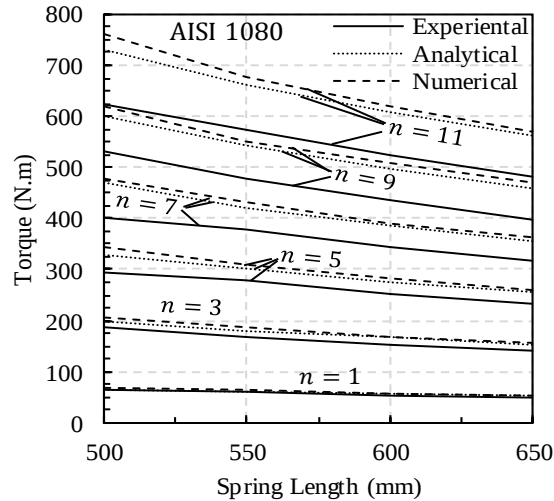


Figure A. Experimental, analytical and numerical comparison of the required torque values for different numbers of layers and different spring lengths for an angle of twist of $\theta = 90^\circ$

Purpose: The purpose of this study is to investigate the torsional behavior of the laminated leaf spring systems by using experimental, analytical and numerical approaches.

Theory and Methods: An adjustable torsion testing machine of 1000 N.m capacity was designed and manufactured for spring systems with different lengths and different layer numbers for experimental study. The variation in the required torsional moment values was investigated for different lengths and number of layers. The experimental, numerical, and analytical results were compared.

Results: It has been observed that the difference between experimental results and those obtained using analytical and numerical approaches increases with the number of layers. This difference can be approximately 15% on average in 11-layer systems compared to single-layer systems. For larger angle of twist values, increasing the number of layers also increases the rate of increase in the torque that needs to be applied. Also, for short spring systems, it is seen that more torque is applied for the same amount of torsion.

Conclusion: It has been observed that the difference between experimental results and those obtained using analytical and numerical approaches is because, in the experimental study, the nonlinear warping deformation in the contact areas between the torsional surfaces increases and the contact surfaces decrease with the increase in the number of layers. Additionally, the analytical and numerical results appear to be close to each other in all cases.



Tabakalı yaprak yay sistemlerinde tabaka sayısı ve uzunluğun burulma davranışına etkisinin incelenmesi

Onur Özener¹ , Tunç Apatay^{2*}

¹Philips Tıbbi Sistemler, Veenpluis 6, 5684 PC Best, Hollanda

²Gazi Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 06570, Ankara, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Burulma etkisindeki yaprak yay sistemleri
- Yay uzunluğu ve katman sayısının burulma üzerine etkileri
- Deneysel, nümerik ve analitik yaklaşım ile sonuçların karşılaştırılması

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 08.01.2026

Kabul: 16.06.2026

DOI:

10.17341/gazimmfd.1859046

Anahtar Kelimeler:

Burulma test düzeneği,
yaprak yay sistemleri,
gerilme analizi,
burulma davranışı

ÖZ

Tabakalı yaprak yaylar çoğu mühendislik uygulamasında eğilme momenti altında çalışsalar da burulma yüküne maruz kaldıkları uygulamalar da bulunmaktadır. Burulma davranışlarını etkileyen faktörler arasında ise sürtünme kayıpları, yayların kesit geometrileri, boyları, tabaka sayıları ve sabitleme şekilleri bulunmaktadır. Bu çalışmada farklı tabaka sayılarında ve boylarında AISI 1065 ve AISI 1080 çeliklerinden oluşan yaprak yay sistemlerinin burulma davranışları deneysel, sayısal ve analitik yaklaşımlarla incelenmiştir. Deneysel çalışmadaki temel sonuçlar 35 mm×2,78 mm kesit geometrisinde, 500 mm ve 650 mm arasındaki çubuklar ile 25,4 mm×1,57 mm boyutlarında daha ince kesit geometrisinde, 250 mm ve 300 mm uzunluktaki daha kısa çubuklar için sonuçlar değerlendirilmiştir. Sayısal analiz ile elde edilen sonuçlar deneysel olarak kullanılacak yay uzunluklarını belirlemekte kullanılmış ve tasarlanan deney setinde 0-90° burulma açısı için farklı boy ve tabaka sayısına sahip yay sistemlerinde gerekli burulma momenti değerlerinin değişimi incelenmiştir. Deneysel, sayısal ve analitik yaklaşımlarla elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Özellikle tabaka sayısı arttıkça analitik yaklaşım ve sayısal yaklaşım sonuçları arasındaki fark %5'in altında kalırken bu sonuçlar ile deneysel sonuçlar arasındaki farkın %15'e kadar çıkabildiği gözlemlenmiştir. Aynı tabaka sayısı için yay sisteminin boyu kısaltıldıkça belli bir burulma açısına ulaşmak için uygulanması gereken tork miktarının arttığı ve bu artışın tabaka sayısı ve burulma açısının artmasıyla daha fazla olduğu görülmüştür.

Investigation of the effect of number and length of layers on the torsional behavior of layered leaf spring systems

H I G H L I G H T S

- Leaf spring systems subjected to torsional effects
- The effects of spring length and number of layers on torsional behavior
- Comparison of experimental, numerical, and analytical results

Article Info

Research Article

Received: 08.01.2026

Accepted: 16.06.2026

DOI:

10.17341/gazimmfd.1859046

Keywords:

Torsion test setup,
leaf spring systems,
stress analysis,
torsional behavior

ABSTRACT

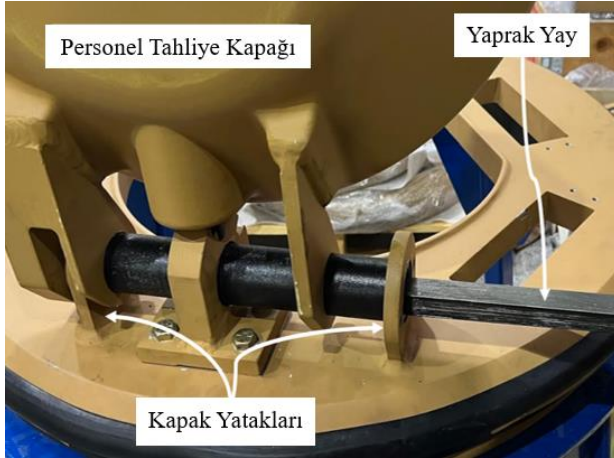
Although layered leaf springs operate under bending moment in most engineering applications, they are also subjected to torsional loads. Friction losses, spring cross-sectional geometries, lengths, number of layers, and fixation methods affect torsional behavior. In this study, the torsional behavior of leaf spring systems made of AISI1065 and AISI1080 steels with different numbers and lengths of layers was investigated experimentally, numerically, and analytically. Experimental results were evaluated for bars with a cross-sectional geometry of 35 mm×2.78 mm, between 500 mm and 650 mm, and for shorter bars with a thinner cross-sectional geometry of 25.4 mm×1.57 mm, between 250 mm and 300 mm in length. Numerical results were used to determine the spring lengths to be used experimentally, and the variation of the required torques in spring systems with different lengths and number of layers for a torsional angle of 0-90° was investigated. Experimental, numerical, and analytical results were compared. It has been observed that while the difference between the analytical and numerical results remains below 5% as the number of layers increases, the difference between these results and experimental results can reach up to 15%. For the same number of layers, it has been seen that the amount of torque required to reach a certain torsional angle increases as the length of the spring system decreases, and this increase is even greater with increasing number of layers and torsional angle.

1. Giriş (Introduction)

Tabakalı yaprak yaylar mühendislikte özellikle otomotiv ve raylı sistemlerde süspansiyon sistemi olarak kullanılmaktadırlar, Şekil 1. Her bir tabakası genellikle dikdörtgen kesitli düz çubuklardan oluşan bu yay sistemleri genellikle eğilme yüküne maruz kalmaktadırlar [1-4]. Buna karşın bazı uygulamalarda burulma yükü taşımak amacıyla da kullanılmaktadırlar. Buna örnek olarak askeri araçlarda ve denizaltılarda kullanılan personel ve bakım kapaklarında tabakalı yaprak yay sistemi ile kaldırıcı görevi gören tasarımlar gösterilebilir (Şekil 2) [5].



Şekil 1. Genel bir yük taşıma aracında kullanılan yaprak yay süspansiyon sistemi
(A leaf spring suspension used in a typical load-carrying vehicle (LCV)) [1]

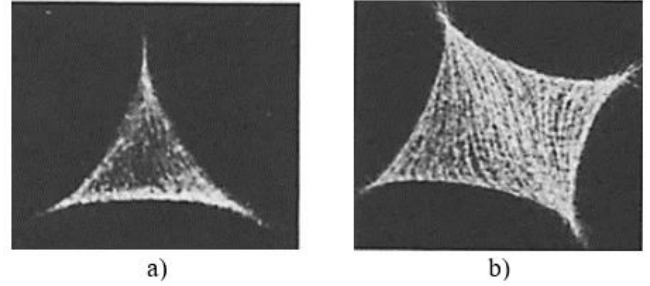


Şekil 2. Burulma etkisinde yaprak yay ile montajlanan personel tahliye kapağı (Personnel evacuation hatch mounted with leaf spring subjected to torsion) [5]

Bu sistemler daha çok eğilme momenti yükünü taşımak amacıyla kullanıldıklarından dairesel shaft geometrisi dışındaki geometrilerin burulma davranışı üzerine yapılan çalışmalar oldukça sınırlı sayıdadır. Dikdörtgen kesitli tek bir çubuğun burulma davranışı ilk olarak Saint-Venant tarafından ele alınmış, burulma momenti, burulma açısı ve maksimum kayma gerilmesi ifadeleri irdelenmiştir [6]. Saint-Venant analizine göre iki uçundan burulma momenti etkisindeki tek bir dikdörtgen kesitli çubuk için burulma öncesi düz olan kesitler burulduktan sonra düzlemselliğini kaybetmektedir, bu deformasyon buruşma olarak tanımlanmaktadır. Bunun sonucunda kesitin bazı kısımlarında kayma gerilmeleri artarken bazı kısımlarında ise azalmaktadır. Kesitin uzun kenarlarının orta noktası kayma gerilmesi maksimum köşe noktalar sıfır gerilme etkisindedir. Ayrıca bu deformasyon nedeniyle çubuk uzunluğu da sabit kalmayıp kısalmaktadır. Dolayısıyla dairesel olmayan kesitlerin burulma

davranışı oldukça karmaşıktır. Saint-Venant prensibi ile tanımlanan bu deformasyon davranışı daha sonrasında bilim adamları tarafından geliştirilmeye çalışılmış ve temel Elastisite Teorisi kaynaklarında da yer almıştır [7, 8].

Literatürde dairesel olmayan kesitler üzerine yapılan çalışmaların büyük bir çoğunluğu tek bir çubuk ele alınarak yapılan deneysel ve sayısal çalışmalardan oluşmaktadır. Su Xunwen vd. [9], bir aktüatör yükleme sisteminde burulma yüküne maruz kalan tek bir yaprak yayın burulma davranışını deneysel ve nümerik olarak incelemişlerdir. Burulma açısının yüksek olduğu durumlarda sınır şartlarının etkisinin artacağını belirtmişler ve buna göre burulma teorisi denklemlerini türetmişlerdir ve uygulanan tork miktarı ile 30°'e kadar dönme açısı arasındaki lineer olmayan ilişkiyi kurarak sonuçlar için polinom eğri uydurmanın lineer eğri uydurmaya göre daha az hata oranına sahip olduğunu göstermişlerdir. Theocaris [10] dikdörtgen ve üçgen kesit geometrilili prizmatik çubukların burulma etkisinde büzüşme fonksiyonlarını ışık altında büzüşme nedeniyle kırılan ışınların görüntüsü (Şekil 3) üzerinden deneysel olarak çıkarmışlardır ve her iki kesit geometrisi tipinin deneysel sonuçlarının teorik sonuçlar ile uyumunu incelemişlerdir.



Şekil 3. Burulma sonrası kırılan ışık çizgileri görüntüsü a) eşkenar üçgen kesit, b) kare kesit [10]
(The experimental caustics images after torsion derived either a) equilateral triangle cross section, b) the square cross section) [10]

Dikdörtgen kesit geometrisinin burulma davranışının deneysel olarak incelendiği bir diğer çalışmada Tran vd. [11] plastik deformasyona uğratan bir kesitte nötron tomografi ile mikroyapı değişimini görüntüleyerek optik mikroskop ile elde ettikleri sonuçları sonlu elemanlar yöntemiyle elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Stronge ve Zhang [12] sonlu burulma açısı değerleri için prizmatik çubuklarda buruşma ve kayma merkezinin çok küçük deformasyona maruz çubuklardakinin aksine her kesit için farklı olan konumlarının tespit edilmesi problemi için çözüm geliştirmişlerdir. Kostopoulos vd. [13]'nin çalışmalarında burulma momenti etkisindeki genel kesit geometrileri için bir topoloji optimizasyonu metodolojisi önerilmiştir. Buruşma fonksiyonu için genellikle burulma rijitlik sabiti için kullanılan Prandtl gerilme fonksiyonu yerine problemin sonlu elmanla metodu ile çözümünü kolaylaştırmak amacıyla eğilme sabitinin tespiti için kullanılan eğilme fonksiyonu yaklaşımını tercih etmişlerdir. Zhang vd. [14] farklı kesit geometrisindeki (I-kesit, T-kesit ve C-kesit) çelik kirişlerin burulma dayanımları için kesit şekilleri, bağlantı rijitlikleri ve narinlik oranlarının etkilerini sonlu elmanlar modeli kullanarak belirleyecek ve tasarım önerileri sunmaya imkan sağlayacak bir çözüm geliştirmişlerdir.

Homojen malzemelerin yanında dairesel olmayan kesit geometrisindeki çubuklar üzerine yapılan çalışmalar fiberlerle güçlendirilmiş tabakalı kompozit malzemeden üretilmiş çubuklara genişletilmiştir. Petrich vd. [15] dört katmanlı cam fiber destekli kompozit ince bir şerit için deneysel ve sayısal olarak burulma etkisini incelemişlerdir. Deneysel çalışmaları kırılma ve yorulma olarak iki şekilde gerçekleştirmişlerdir. Analitik yaklaşımların sadece küçük

burulma açıları için daha doğru sonuçlar verebileceğini göstermişlerdir. Günay [16] alışlagelmiş düz fiber serimi yerine eğrisel elyaf yapısı kullanarak değişken rijitlikli kompozit lamineli ve dikdörtgen kesitli kirişlerin hem burulması hem de eğilmesi için analitik çözüm ile sonlu elemanlar sonuçlarını karşılaştırmıştır. Swanson [17] ince ve tabakalı dikdörtgen kesitli kompozit çubuklar için membran yaklaşımı ile yaklaşık bir çözüm geliştirmiş, genişlik ve kalınlık oranının burulma analizlerinde etkin olduğunu belirtmiştir.

Birden fazla çubuk kullanılarak oluşturulan tabakalı yaprak yay sistemlerinin burulma davranışı üzerine ise yapılan çalışmaların literatürde oldukça kısıtlı olduğu görülmüştür. Gentiluomo [18] uygulanan tork miktarı, burulma açısı, çubuk uzunlukları ve maksimum gerilme değerlerine göre burulma yüküne göre katmanlı yaprak yay tasarımı üzerine tasarım prosedürü için teknik bir rapor yayınlamıştır. Bu raporda, belirtilen bu parametrelere karşılık yay çubuklarının genişliği, kalınlığı ve yay sayısının belirlenmesini hedeflemiştir. Močilnik vd. [19] yay çeliği malzemesinden yapılmış ve katman sayısı 1-10 arası değişen 350 mm uzunluğundaki çubuklardan oluşan yaprak yay sistemlerinin burulma davranışlarını nümerik ve deneysel olarak inceleyip karşılaştırmışlar ve sonuçlar arasında düzeltme katsayıları belirlemeye çalışmışlardır. Bu katsayıların yaprak yay sisteminin uçlarından sabitlenme şekillerine göre değiştiğini göstermişlerdir. Ayrıca çubukların yükseklik-genişlik oranlarının 7'den büyük olduğu durumlarda Saint-Venant prensibinde kullanılan sabitlerle elde edilen sonuçların deneysel sonuçlarla uyumunun azaldığını göstermişlerdir.

Bu çalışmada ise iki farklı malzeme için (AISI 1065 ve AISI 1080) uzunlukları 250 mm ve 650 mm arasında değişen çubuklardan oluşan ve katman sayısı 1 ile 17 arasında değişen yaprak yay sistemlerinin burulma davranışları hem teorik, hem deneysel hem de sayısal yaklaşımlarla incelenmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Deneysel çalışmalar için 100 mm ve 1500 mm arasında değişebilen

farklı boylarda ve farklı kesit alanlarına sahip yay sistemlerine adapte edilebilen ayarlanabilir ve 1000 N.m tork kapasitesinde bir burulma deney seti tasarlanmış ve üretilmiştir. Sonuçlar iki farklı yay grubu planlanarak elde edilmiştir. İlk grupta boyları 500 mm ve 650 mm arasında değişen yay sistemlerinde 35 mm × 2,78 mm kesit geometrisine sahip çubuklar kullanılırken ikinci grupta daha kısa olan 250 mm ve 350 mm'lik çubuklar için kesit geometrisi 25,4 mm × 1,57 mm olan çubuklar kullanılmıştır. Askeri araçlarda kullanılan personel kapaklarının 0°-100° derece açı aralığında çalışmasından esinlenilerek burulma açısı çalışmalarda 90° olarak seçilmiştir. Genel olarak tabaka sayısının artmasıyla deneysel sonuçların sayısal analiz ve analitik yaklaşım sonuçları ile arasındaki uyumun azaldığı, nümerik sonuçlar ile analitik sonuçların ise daha uyumlu olduğu görülmüştür.

2. Dikdörtgen Kesitli Yaprak Yay Seti İçin Analitik Burulma Yaklaşımı

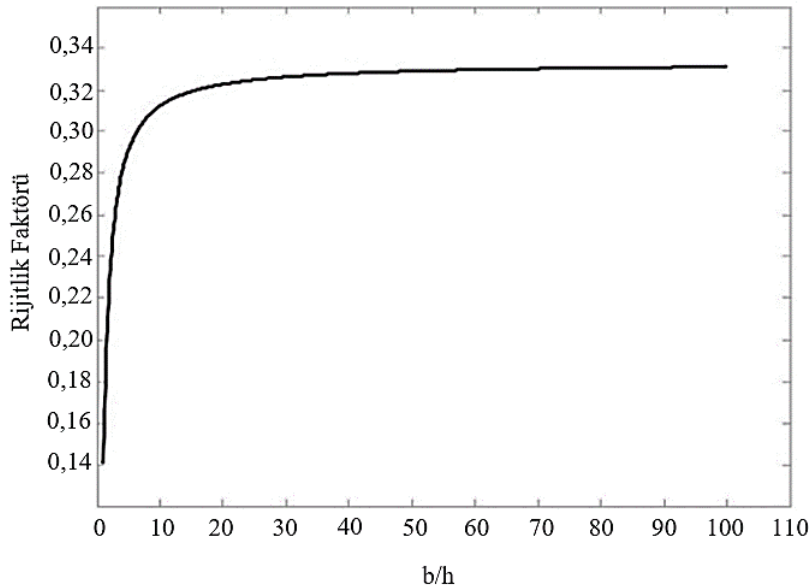
(Analytical Approach for Torsion for a Rectangular Cross-Section Leaf Spring Set)

Değişik kesit geometrisine sahip çubukların burulma davranışları analitik olarak ilk defa Saint-Venant tarafından elde edilmiştir [6]. Buna göre prizmatik bir çubuk için burulma problemi Prandtl gerilme fonksiyonu Eş. 1 ile verilen $\phi(x, y)$ kullanılarak türetilen diferansiyel denkleminin çözülmesiyle elde edilir [7].

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \text{sabit} \quad (1)$$

Dar dikdörtgen kesitli bir çubuk için membran benzetimi, burulma problemi için basit bir çözüm sunmaktadır. Buna göre Eş. 2'de birim boy için elde edilen tork ifadesi verilmiştir:

$$T = \frac{1}{3} G \theta (2b)(2h)^3 \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{h}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2h} \right) \quad (2)$$



Şekil 4. Rijitlik faktörünün kesit geometrisi cinsinden fonksiyonunun grafiği [18] (Plot of rigidity factor as function of rectangle ratio [18])

Tablo 1. Dikdörtgen kesitli prizmatik çubuklarda burulma parametreleri [8]
(Torsional parameters in rectangular cross-section prismatic rods [8])

b/h	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
K_1	0,141	0,198	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
K_2	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333

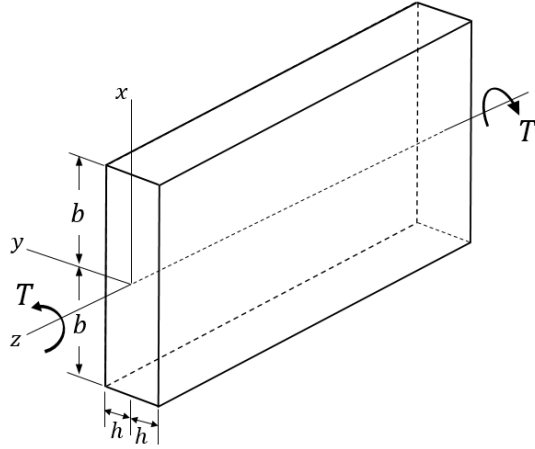
Şekil 5’de verilen T burulma momenti etkisindeki L boyundaki dar kesitli çubuk için herhangi bir kesitte oluşan maksimum kayma gerilmesi ve toplam burulma açısı ifadeleri ise Eş. 3 ve Eş. 4 ile verilmiştir [8].

$$\theta = \frac{TL}{K_1 G(2b)(2h)^3} \quad (3)$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{K_2(2b)(2h)^2} \quad (4)$$

Bu denklemlerde L çubuk boyu, G kayma modülü, K_1 ve K_2 ise b/h oranına bağlı faktörlerdir. Bu faktörler Tablo 1’de verilmiştir [7, 8]. K değerleri b/h oranıyla çok hızlı bir şekilde 0,333 değerine yakınsamaktadır. Louis vd. [18] çalışmalarında bu sabiti burulma rigidliği faktörü olarak isimlendirmişlerdir ve bu sabitin kesit geometrisi ile değişiminin grafiğini Şekil 4’de gösterildiği gibi sunmuşlardır.

Bu çalışmada kullanılan yaprak yay kesit ölçüleri $b = 17,5$ mm ve $h = 1,39$ mm için $b/h = 12,68$ ve $b = 12,7$ mm ve $h = 0,785$ mm için $b/h = 16,17$ olduğundan yukarıda açıklanan yakınsama durumu nedeniyle Tablo 1’e ve Şekil 4’e göre $K_1 = K_2 = 0,333$ alınmıştır.



Şekil 5. Burulma momenti etkisinde yaprak yay kesit geometrisi (Leaf spring cross-section geometry under torsional moment effect)

Uygulamada tek bir yaprak yayda belli bir burulma açısı elde etmek için hesaplanan tork değerinin (Eş. 3) n adet tabaka sayısı ile

çarpılmasıyla n tabakalı yaprak yay setinde aynı burulma açısı için gerekli tork değeri belirlenmektedir [19, 20]. Bu çalışmada da tabakalı yaylar için analitik sonuçlar bu yaklaşımla belirlenmiştir.

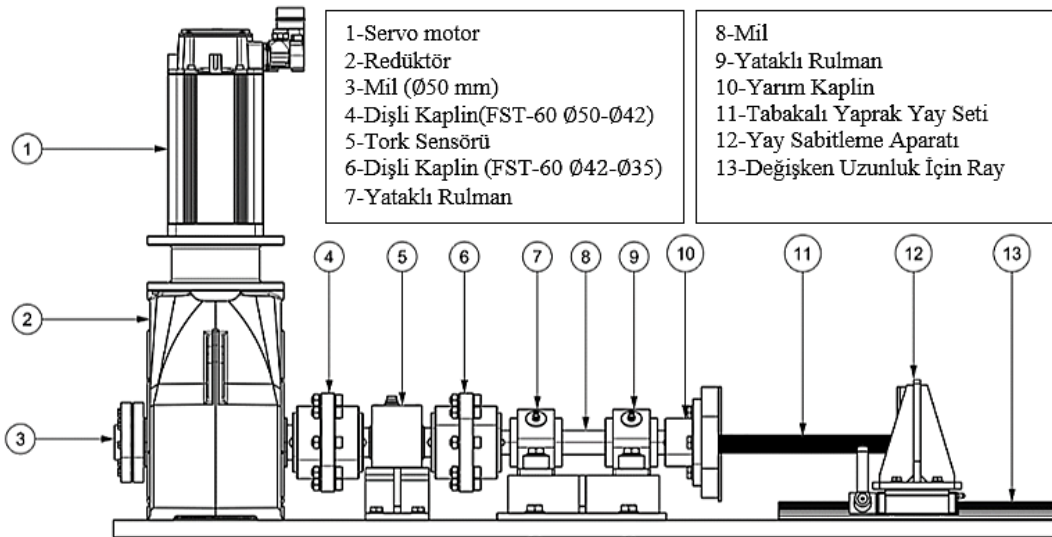
3. Burulma Test Düzeneği ve Yaprak Yay Özellikleri (Torsion Test Setup and Leaf Spring Properties)

Şekil 6’da tasarlanan burulma düzeneği ve düzeneğin bileşenleri gösterilmiştir. Bu düzeneğe ile 1000 N.m’ye kadar burulma momenti uygulanabilmektedir. Farklı yay sayılarına uyumlu olacak şekilde ayarlanabilir sabitleme elemanları ile ayarlanabilir fişür tasarlanmıştır. Çalışmada kullanılan iki farklı kalınlık değeri olan 2,78 mm’lik çubuklardan 11 adet, 1,57 mm’lik çubuklardan ise 25 adet kullanılabilme kapasitesi elde edilmiştir. Bu aşamada yaprak yay sabitleme parçalarının geometrileri savunma sanayinde kullanılan araçlardaki personel tahliye kapaklarının tasarımına uyumlu olacak şekilde belirlenmiştir. Benzer şekilde farklı uzunluklardaki yayların test edilebilmesi için sabitleme elemanlarından birinin ray üzerinde kayabilme özelliği bulunmaktadır (Şekil 7). Böylece minimum 100 mm ve maksimum 1500 mm uzunluğundaki yaprak yay setlerinin burulma testleri mümkün kılınmaktadır. Rexroth Servo Motor arayüz programı ile testin ayarlanabilir hızlarda ve açılarda gerçekleştirilmesi sağlanmıştır. Servo motorun özelliklerinde bulunan tork-açısız hız grafiğinde 0-25 rpm aralığında 20-23 N.m tork alınabilmektedir.



Şekil 7. Test düzeneğindeki yatak plakaları (Bearing Plates in the Test Setup)

Deneylerin düşük açısal hızlarda gerçekleştirilmesi gerekliliğinden ve yüksek tork değerlerine ihtiyaç duyulduğundan helisel dişli tip bir redüktör seçilmiştir. Düzeneğin bağlantı elemanlarının hem burulmaya karşı rijit hem de düşük eksenel kaçıklıklara izin verebilen bir yapısı olması istendiğinden dişli kaplin seçilmiştir. Test düzeneği tasarımı gereğince tork sensörü ile yaprak yaylar arasında radyal, eksenel ve moment yüklerinin oluşması beklenmektedir. Bu nedenle



Şekil 6. Yaprak yay seti için burulma test düzeneği [5] (Torsion Test Setup for Leaf Spring Sets [5])

yaprak yay testleri sırasında oluşabilecek momentlerin tork sensörünün dayanım kuvvetlerini geçmemesi için test düzeneğine yataklama elemanı olarak konik bilyeli rulman çifti içeren ve aralarında 10 cm mesafe bulunacak iki ayrı yataklı rulman kullanılmıştır. Yüksek gerilme oluşumunu engellemek ve yaprak yayların birbiri üzerinde kaymasına imkan vermek amacıyla yay sabitleme aparatı ile yaylar arasında 0,1 mm' lik boşluk bırakılmıştır. Deney düzeneğini oluşturan tüm bileşenlere ait teknik özellikler detaylı olarak Özener'in Yüksek Lisans tez çalışmasında bulunmaktadır [5].

Yaprak yayların mekanik özellikleri Rezonans Frekansı ve Sönümlenme Analizi (RFDA) yöntemi ile deneysel olarak belirlenmiş ve Tablo 2'de verilmiştir. Ölçümler, Atılım Üniversitesi Metal Şekillendirme Mükemmeliyet Merkezi laboratuvarında bulunan IMCE NV firmasına ait HTVP1600 RFDA sisteminden alınmıştır. Bu yöntem, rezonans frekanslarını ve numunelerin iç sürtünmelerini ölçerek ASTM E1876-15 [21] standartına göre elastisite modülü, kayma modülü ve Poisson oranını hesaplar. Ölçüm sırasında tahribatsız vurma tekniğinin temeli, numuneye küçük bir mermi ile vurmaya ve mikrofon gibi ekipmanlarla titreşim sinyali kaydetmeye dayanır. Zaman alanında kaydedilen sinyaller Fourier dönüşümü ile frekans alanına dönüştürülerek sistem tarafından ASTM E1976-15 standartına göre işlenir.

Malzemelerin akma dayanımları ise çekme testleri sonucunda 1065 çeliği için 1305 MPa, 1080 çeliği için 1409 MPa olarak belirlenmiştir. Bu değerler ayrıca sonlu elemanlar analizlerinde girdi olarak kullanılmıştır.

Test edilecek yaprak yayların boylarının ve tabaka sayılarının belirlenmesinde Sonlu Elemanlar Yöntemi aracılığıyla iki yaklaşım kullanılmıştır. İlk yaklaşımda 35 mm × 2,78 mm kesit

geometrisindeki 1065 yay çeliği ele alınmış ve farklı tabaka sayıları için 90° burulmada Sonlu Elemanlar Yöntemi ile akmanın başladığı minimum yay boyları iterasyonla belirlenmiştir. Şekil 8'de sırasıyla katman sayısı $n = 1, 5, 9$ ve 11 olan yay sistemlerinde 90° burulma durumunda akma sınırı olan 1305 MPa değerine ulaşana kadar çubuk boyları değiştirilerek limit boylar belirlenmiştir. Buna göre $n = 1$ tabaka için $L = 468$ mm, $n = 5$ tabaka için $L = 472$ mm, $n = 9$ tabaka için $L = 480$ mm ve $n = 11$ için $L = 484$ mm değerleri elde edilmiştir (Şekil 8). Elde edilen bu limit değerler üzerinden deneysel çalışmada tüm katman sayıları için 90° burulma açısında malzemenin elastik deformasyon bölgesinde kalmasını sağlayacak yay boyunun en küçük değeri, sayısal analizdeki en büyük limit değer olan 484 mm'den büyük olacak şekilde $L = 500$ mm olarak belirlenmiş ve yay boyunun etkisinin belirlenmesi amacıyla diğer boylar, 550 mm, 600 mm ve 650 mm olarak seçilmiştir.

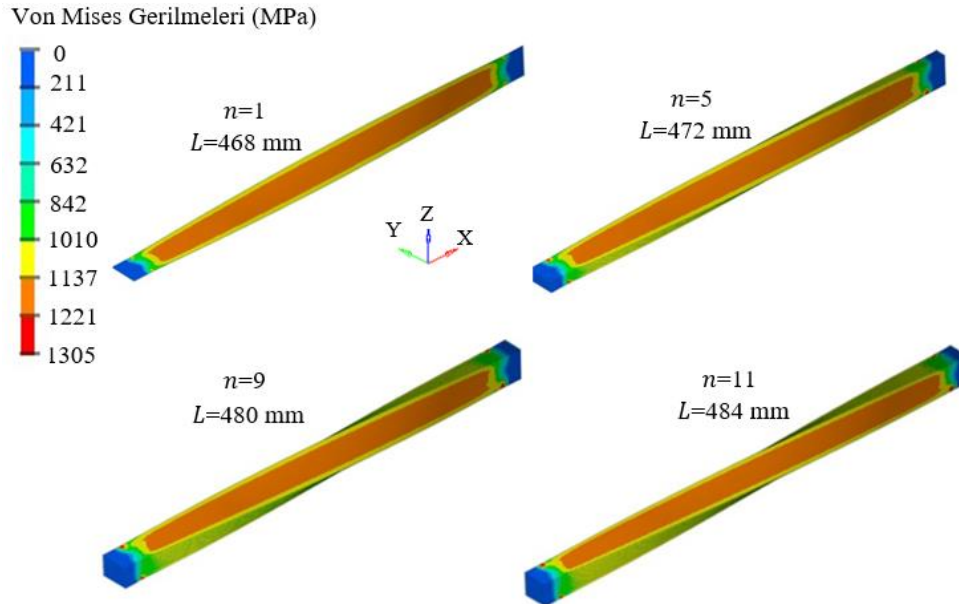
İkinci yaklaşımda ise daha kısa uzunluktaki çubukların davranışını incelemek için ($L = 250$ mm ve $L = 300$ mm) 25,4 mm × 1,57 mm kesit geometrisindeki 1080 çeliği için 90° burulmada akma sınırındaki tabaka sayıları sonlu elemanlar yöntemi ile iterasyonlar sonucu belirlenmiş ve minimum tabaka sayıları $L = 250$ mm için $n = 15$ ve $L = 300$ mm için $n = 17$ olarak belirlenmiş ve bu katman sayıları deney parametresi olarak kullanılmıştır. Elastik limit durumundaki analiz sonuçları Şekil 9'da verilmiştir.

4. Sonlu Elemanlar Yaklaşımı (Finite Element Method Approach)

Sonlu elemanlar modeli Hypermesh 2021 yazılımında hazırlanmıştır ve çözümler OptiStruct yazılımı ile yapılmıştır. Modellerde test cihazındaki geometrik şartlar aynı ölçülerde kullanılmış ve burulma açısının 0°-90° aralığındaki değerleri için burulma momentleri ve maksimum gerilme değerleri belirlenmiştir.

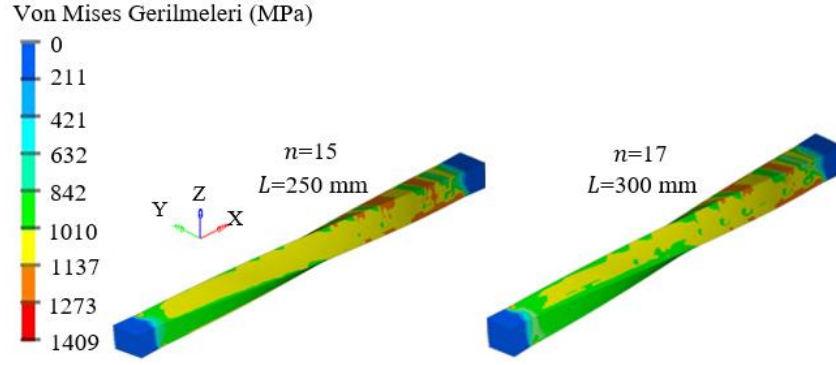
Tablo 2. Test numunelerinin mekanik özellikleri (Mechanical properties of test samples)

Malzeme	Elastisite Modulu (GPa)	Kayma Modulu (GPa)	Poisson Oranı
AISI-1065	206,55	81,18	0,27
AISI-1080	218,40	85,11	0,28

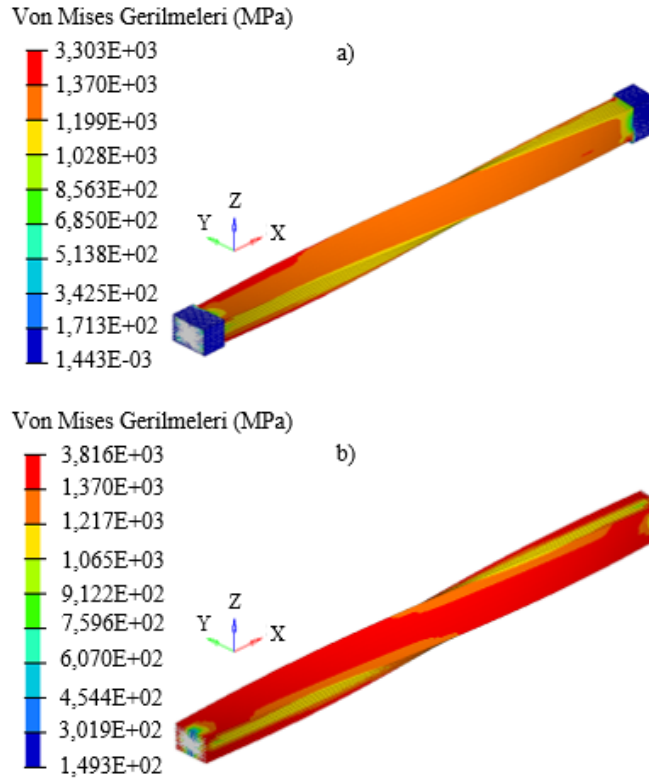


Şekil 8. 2,78 mm kalınlıklı 1065 çeliği için farklı tabaka sayılarında 90° burulmada akma sınırında (1305 MPa) minimum boylardaki gerilme analizi

(Stress analysis of minimum lengths at yield limit (1305 MPa) of 90° angle of twist for 2,78 mm thick 1065 steel with different number of layers)



Şekil 9. 1,57 mm kalınlıklı 1080 çeliği için $n = 15$ ve $n = 17$ için 90° burulmada akma sınırındaki (1409 MPa) gerilme analizi (Stress analysis at yield limit (1409 MPa) for 90° angle of twist for 1.57 mm thick 1080 steel for $n = 15$ and $n = 17$)



Şekil 10. Uçlardan serbestlik verilen (üst analiz) ve serbestlik verilmeden sabitlenen (alt analiz) durumdaki gerilme dağılımları (Stress distributions for the case where the ends are freed (upper analysis) and fixed without being freed (lower analysis))

Tablo 3. Sonlu elemanlar modelinde kullanılan parametreler (Parameters used in finite element modeling)

	2,78 mm AISI 1065 Yay Çeliği				1,57 mm AISI 1080 Yay Çeliği	
	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5	Model 6
	$L = 468$ mm, $n = 1$	$L = 472$ mm, $n = 5$	$L = 480$ mm, $n = 9$	$L = 484$ mm, $n = 11$	$L = 250$ mm, $n = 15$	$L = 300$ mm, $n = 17$
Eleman Tipi	Quad 1st order (linear)	Quad 1st order (linear)	Quad 1st order (linear)	Quad 1st order (linear)	Quad 1st order (linear)	Quad 1st order (linear)
Eleman Boyutu	4 mm	4 mm	4 mm	4 mm	4 mm	4 mm
Eleman Sayısı	8408	7859	13153	15854	20584	26620

Model oluşturulurken yaprak yaylar arasına sürtünme katsayısı 0,1 olan doğrusal olmayan sürtünmeli kontaklar tanımlanmıştır. Analiz süresinin optimum olması ve yakınsama problemlerinden kaçınmak amacıyla 4 mm linear 2-Boyutlu kabuk elemanlar kullanılmıştır [22]. Analizlerde 20 mm uzunluğunda sabitleme parçası modellenmiş, sabitleme parçası içerisinde x ve y eksenleri boyunca hareket serbestliği verilerek deney setindeki bağlantının en uygun şekilde

modellenmesi sağlanmıştır. Sonrasında ise x eksenı etrafında 90° burulma açısı verilmiştir. Analiz sonuçlarında küçük tork değerlerinde çok yüksek gerilme değerleri ve plastik deformasyonla karşılaşmamak ve deneysel sonuçlarla kıyaslama imkanının ortadan kalkmaması amacıyla bu serbestlik verilmiştir. Bu modellemeler örnek bir set için analiz edilmiş ve bahsedilen gerçekçi olmayan yüksek gerilme dağılımı Şekil 10'da karşılaştırmalı olarak

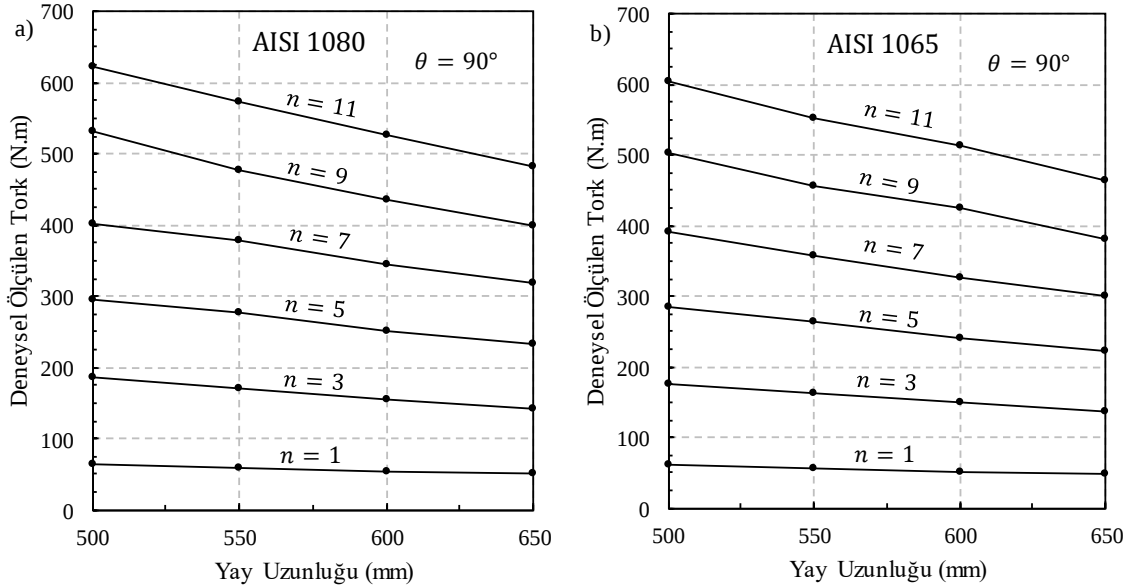
gösterilmiştir. Sürekli bir burulma problemi ele alınmadığından analizler yorulma tabanlı değil akma kriteri göz önünde bulundurularak yapılmıştır. Plakaların bir kısmı sıkı geçme ile flanşlara bağlanarak sabitlenmiş ve diğer tarafta ise benzer sabitleme ile 90° burulma açısı tanımlanmıştır. Plakaların sabitlendiği yatak elemanları 1 boyutlu rijit elemanlarla bağlanmıştır. Şekil 8 ve Şekil 9'da verilen analiz sonuçları için kullanılan analiz parametreleri Tablo 3'de sunulmuştur.

5. Sonuçlar ve Tartışmalar (Results and Discussion)

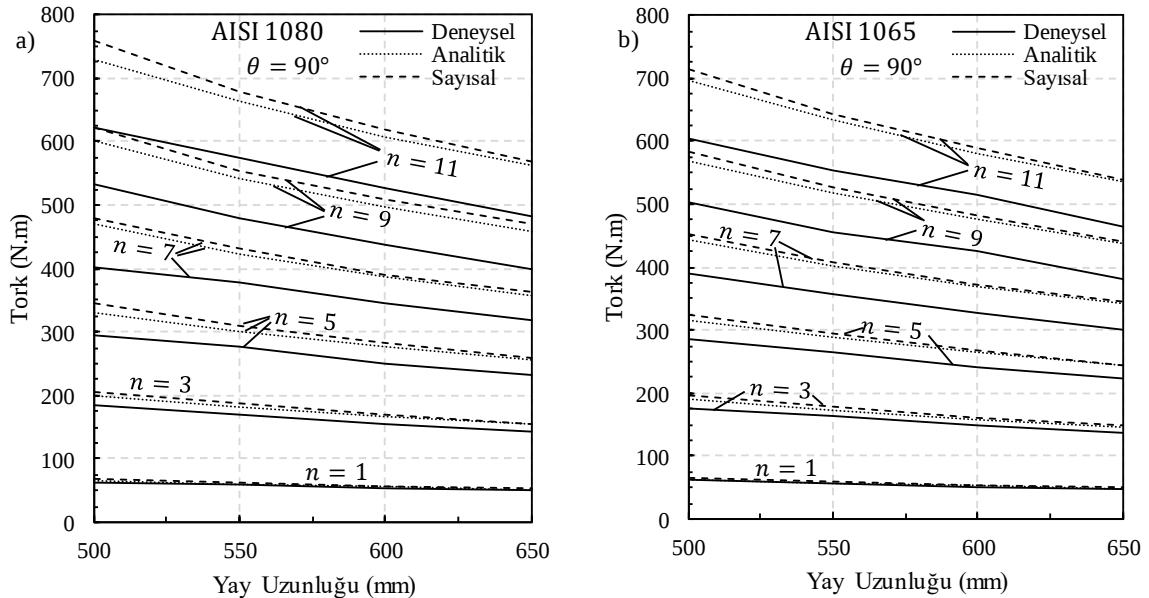
Bu bölümde farklı tabaka sayılarındaki ve farklı uzunluklardaki AISI 1080 ve AISI 1065 malzemelerinden oluşan yaprak yay setlerinin 90° burulmaları için deney setinden elde edilen tork değerleri sunulmuş ve bu değerlerin analitik yaklaşım ve sonlu elemanlar yaklaşımıyla elde edilen değerlerle karşılaştırılması verilmiştir.

Şekil 11'de her iki malzeme için tabaka sayısına göre 500 mm ve 650 mm aralığındaki farklı uzunluklarda 35 mm $\times$ 2,78 mm kesit geometrisindeki çubuklardan oluşan yaprak yay sistemlerinin 90° burulması için uygulanması gereken tork miktarlarının deneysel sonuçları verilmiştir. Her iki malzeme için genel davranış benzer olup yay sayısı arttıkça uzunluğun etkisi belirginleşmektedir. Örneğin AISI 1080 malzemesinde tek bir yay için ($n=1$) gerekli tork miktarı boya bağlı olarak 63,22 N.m (500 mm için) ile 50,1 N.m (650 mm için) gibi dar bir aralıkta değişirken $n=11$ tabakalı yay sisteminde bu değerler sırasıyla 622,21 N.m ile 481,56 N.m gibi daha geniş bir aralıkta değişmektedir. AISI 1065 çeliği için ise kayma modülü ve akma mukavemetindeki farklılıktan dolayı tork değerlerinin bir miktar daha düşük olduğu görülmektedir.

Şekil 12'de deneysel olarak elde edilen tork değerlerinin analitik yaklaşım ve sonlu elemanlar modeli ile elde edilen sonuçlarla



Şekil 11. Farklı tabaka sayıları için $\theta = 90^\circ$ burulma açısı sağlayan deneysel tork değerleri a) 1080 çeliği, b) 1065 çeliği (Experimental torque values providing a $\theta = 90^\circ$ angle of twist for different numbers of layers: a) 1080 steel, b) 1065 steel)



Şekil 12. $\theta = 90^\circ$ burulma açısı için farklı tabaka sayıları ve farklı yay uzunlukları için gerekli tork değerlerinin deneysel, analitik ve nümerik olarak karşılaştırması a) 1080 çeliği, b) 1065 çeliği (Experimental, analytical and numerical comparison of the required torque values for different numbers of layers and different spring lengths for an angle of twist of $\theta = 90^\circ$ a) 1080 steel, b) 1065 steel)

karşılaştırması verilmiştir. Bölüm 2’de açıklanan analitik yaklaşımla elde edilen sonuçlarla sonlu elemanlar analizi sonuçlarının ele alınan bütün durumlar için oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Bu uyum yay boyu arttıkça daha iyi olmaktadır. Tablo 4’de örnek olarak AISI 1080 çeliği için 90 derecelik burulma açısı için gerekli tork değerlerine ait analitik ve nümerik sonuçlar arasındaki farklar sunulmuştur. Buna göre farkların genel olarak % 5’in altında kaldığı görülmektedir. Yay sayısının artmasıyla deneysel sonuçlar ile analitik ve nümerik sonuçlar arasındaki farkın gittikçe arttığı görülmektedir. Bunun nedeni analitik yaklaşımdaki kabuller ile nümerik yöntemdeki model yaklaşımının karmaşık burulma deformasyonunu gerçek haliyle ele alamamasıdır. Özellikle yay sayısı fazla olan yay sisteminde tabakalar arasındaki toplam lineer olmayan bütüşme deformasyonunun artması bu yay sistemlerindeki deneysel sonuçların analitik ve nümerik sonuçlardan farklılığını açıklamaktadır. Ayrıca nümerik analiz modelinde yayların sabitlendiği flanş modeli rijit kabul edilmiştir ancak deneyler esnasında yüksek burulma momenti etkisinde bir miktar esneme gözlemlenmiştir. Bunun yanında analiz modelinde tüm yaylar ideal kalınlık ve boyda modellenmiştir. Bu faktörler de deneysel sonuçlarla oluşan farka etki etmektedir.

Şekil 13’de ise önceki numunlerden farklı bir kesit geometrisinde (25,4 mm × 1,57 mm) ve daha kısa boylarda (250 mm ve 300 mm) ve tabaka sayısı 1-15 aralığında değişen AISI 1080 çeliği malzeme kullanılarak elde edilen yay sistemlerinin davranışları incelenmiştir. Önceki sonuçlara paralel olarak analitik ve sayısal yaklaşım sonuçlarının deneysel sonuçlara kıyasla birbirine daha yakın oldukları görülmektedir. Analitik yaklaşımla deneysel sonuçlar arasındaki farkın ise 15 tabakalı sistemlerde %10 mertebesine ulaştığı gözlemlenmiştir. Yay sayısının artışına bağlı olarak 90° burulma açısı için uygulanması gereken tork miktarı da artmaktadır. Aynı tabaka sayısına sahip yayların aynı burulma değerine ulaşması için uygulanması gereken tork miktarının kısa boydaki sistemlerde uzun boya göre daha fazla olduğu görülmektedir.

Şekil 14 ve Şekil 15’de ise AISI 1065 çeliği için uygulanan torka karşı farklı tabaka sayılarında ve farklı boylardaki yaprak yay sistemleri için burulma açısının değişimi deneysel veriler ile gösterilmektedir. Tabaka sayısı arttıkça belli bir burulma açısı için uygulanması gereken tork miktarının artışı bu şekillerden görülmektedir. Tabaka

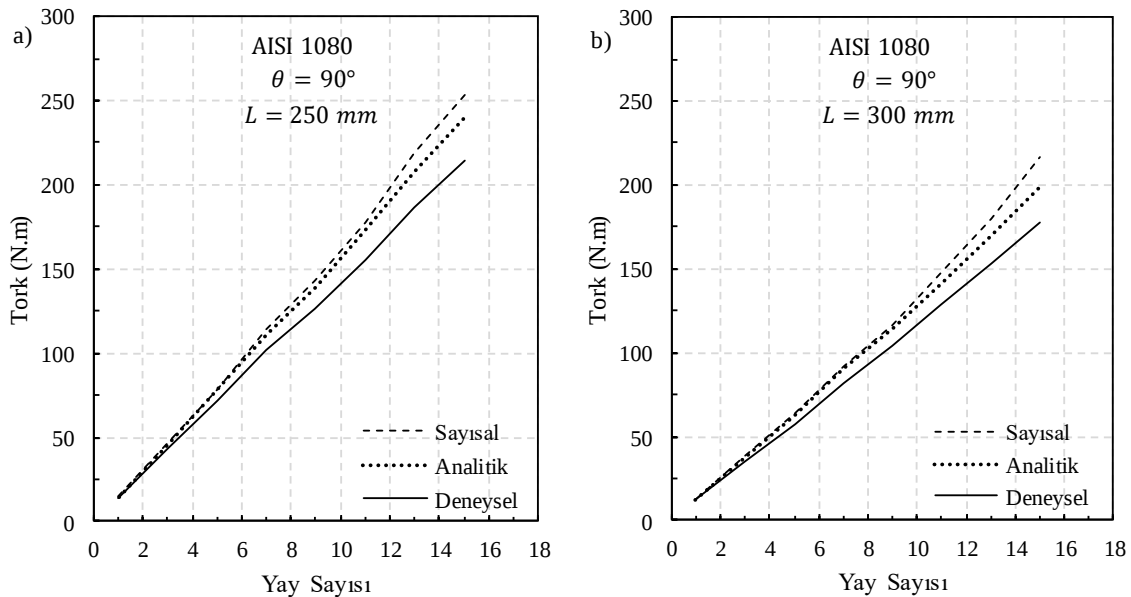
sayısı arttıkça daha büyük burulma açıları için gerekli torkun artış oranının da arttığı şekillerden görülmektedir.

Tablo 4. AISI 1080 için sayısal ve analitik yaklaşım sonuçları arasındaki farklar

(The differences between the analytical and numerical results for AISI 1080)

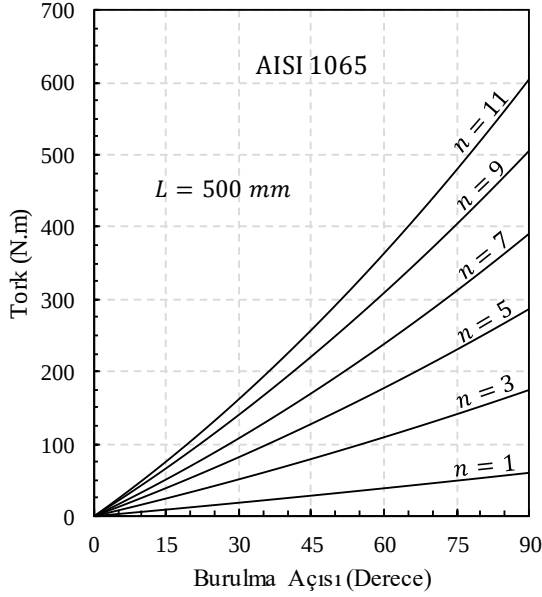
Uzunluk (mm)	Yay Adedi	Analitik (N.m)	Sayısal (N.m)	% Fark
500	1	64,93	69,73	3,71
	3	199,7	206,37	3,45
	5	330,32	344,55	2,26
	7	470,49	478,62	2,09
	9	601,68	620,63	0,29
	11	729,86	759,74	0,22
550	1	60,32	62,89	3,53
	3	180,96	186,19	2,74
	5	301,6	309,36	2,78
	7	422,23	430,38	1,17
	9	542,87	552,17	1,15
	11	663,51	677,58	1,64
600	1	55,29	56,23	3,28
	3	165,88	168,2	2,01
	5	276,46	282,97	1,57
	7	387,05	390,18	0,64
	9	497,63	509,39	-0,54
	11	608,22	619,97	1,29
650	1	51,04	52,27	4,34
	3	153,12	154,83	1,01
	5	255,2	259,68	0,29
	7	357,27	363,56	1,23
	9	459,35	468,83	0,54
	11	561,43	568,03	0,77

Ayrıca bu şekillerden istenen açıya ulaşmak için gerekli tork artışının lineer olmadığı da görülmektedir. Örneğin Şekil 14’de 15°’lik bir burulma açısı sağlamak için tek bir yayda ($n=1$) gerekli tork miktarı 9 N.m iken $n=11$ olan sistemde gerekli tork 78,6 N.m olup aradaki oran yaklaşık 8,7 kattır. Buna karşılık 90°’lik bir burulma açısı için ise bu oran 10,2 kat olmaktadır ($n=1$ için $T=59,1$ N.m ve $n=11$

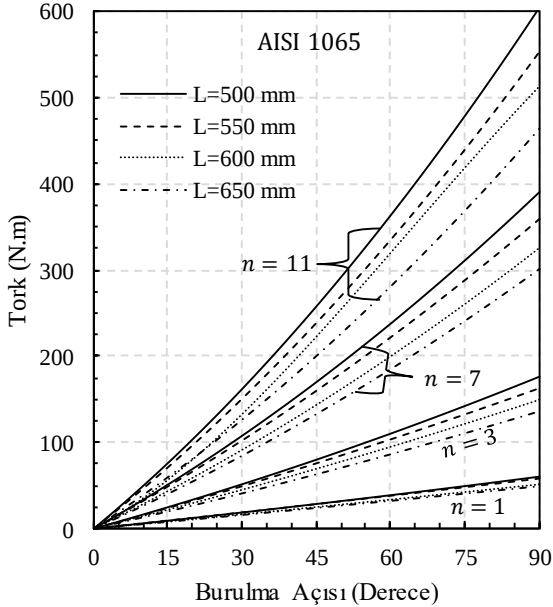


Şekil 13. Farklı tabaka sayılarında 1080 çeliği için $\theta = 90^\circ$ burulma açısı sağlayan tork değerleri a) $L = 250$ mm, b) $L = 300$ mm (Torque values providing a $\theta = 90^\circ$ angle of twist for 1080 steel with different numbers of layers: a) $L = 250$ mm, b) $L = 300$ mm)

için $T = 603,9$ N.m). Şekil 15’de ise bu değişimlerin tabaka sayısı arttıkça boy değişimiyle daha belirgin olduğu görülmektedir. Tek tabaka için boy değişiminin etkisi çok tabakalı yay sistemlerine göre dar bir aralıkta kalmaktadır.



Şekil 14. AISI 1065 çeliği için tabaka sayısının burulma açısına etkisi, $L = 500$ mm (The effect of the number of layers on the torsional angle for AISI 1065 steel, $L = 500$ mm)



Şekil 15. AISI 1065 çeliği için yay uzunluğunun burulma açısına etkisi (Effect of spring length on torsional angle for AISI 1065 steel)

6. Sonuçlar (Conclusions)

Yaprak yay sistemleri genellikle eğilme yükü altında çalışmaktadır. Bu nedenle literatürdeki çalışmaların büyük çoğunluğu eğilme momenti etkisindeki davranışları üzerinedir ve burulma momenti altında bu sistemlerin davranışı üzerine yapılan çalışmalar oldukça kısıtlıdır. Buna rağmen askeri araçlarda ve denizaltılarda bulunan personel ve bakım kapaklarındaki gibi bazı özel uygulamalarda bu sistemler burulma momenti altında çalışacak şekilde tasarlanmaktadır. Bu çalışmada burulma yükü altında çalışan tabakalı

yaprak yay sistemlerinde tabaka sayısı ve yay uzunluklarının burulma davranışına olan etkileri açı hassasiyeti 1° ’den küçük 1000 N.m tork kapasiteli ve farklı boy ve katman sayısındaki yay sistemlerine göre ayarlanabilir şekilde tasarlanan bir deney düzeneği ile deneysel olarak incelenmiş ve deneysel sonuçlar analitik ve nümerik yaklaşımla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Deneyler için AISI 1065 ve AISI 1085 olmak üzere iki farklı malzeme ele alınmıştır. 90° lik burulma açısında plastik deformasyon olmayacak şekilde deney numunelerinin boy ve yay adedi parametrelerinin belirlenmesi amacıyla sonlu elemanlar analizi yöntemi ile akma anındaki limit değerler elde edilmiş ve deneysel parametrelerin belirlenmesinde bu limit değerlerden faydalanılmıştır. Genel olarak bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Deneysel çalışma için tüm komponentleri ile sıfırdan bir burulma test düzeneği tasarlanarak imal edilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde uygulanan en büyük tork miktarı 90 derece burulma açısı için 620 N.m olarak gözlemlenmesine karşın 1000 N.m kapasiteli bir tasarım yapılmıştır. Ayrıca yay sistemlerinde boy değişiminin etkisinin incelenebilmesi için boyları 100 mm ve 1500 mm aralığında değişebilen ve farklı kesit geometrilerinde farklı tabaka sayılarındaki yay sistemleri ile çalışılabilecek şekilde hareketli ve ayarlanabilir bir yatak sistemi tasarlanmıştır.
- Genel olarak tabaka sayısının artmasıyla deneysel sonuçların analitik ve nümerik yaklaşımdaki sonuçlar ile arasındaki farkın arttığı görülmektedir. Bu fark 11 tabakalı sistemlerde tek tabakaya göre ortalama %15’e kadar ulaşabilmektedir. Bunun nedeni deneysel çalışmada tabaka sayısının artışıyla bağlı olarak temas eden yüzey sayısının dolayısıyla temas eden alanlardaki lineer olmayan büzüşme deformasyonunun artması ve buna bağlı olarak temasın düzensiz olarak bazı alanlarda ortadan kalkmasıdır. Analitik ve nümerik yaklaşımlarda fiziksel olarak bu düzensiz deformasyonun tanımlanması mümkün olmadığından deneysel sonuçlardan olan fark tabaka sayısı arttıkça belirginleşmektedir. Bununla beraber analitik ve nümerik yaklaşımla elde edilen sonuçlar birbirine yakın olup aralarındaki fark %5’in altında kalmaktadır. Sonuçlar incelendiğinde deneysel olarak belirlenen uygulanması gereken tork miktarının aynı koşullarda analitik ve sayısal yaklaşımdaki değerlerin her zaman altında kaldığı görülmektedir.
- Malzeme açısından bakıldığında AISI 1080 çeliğinin kayma modülü ve akma mukavemeti daha yüksek olduğu için gerekli tork değerlerinin AISI 1065 çeliğine göre ortalama %3 oranında daha fazla olduğu ancak genel burulma trendlerinin benzer olduğu gözlemlenmiştir.
- Bu sonuçlar ışığında burulma momenti etkisi altında çalışacak bir yaprak yay sistemi tasarlanması gerektiğinde tabaka sayısının önemli bir faktör olduğu, sadece sayısal analiz üzerine tasarım kurgulandığında özellikle tabaka sayısının fazla olduğu durumlarda tasarımın başarısız olma ihtimalinin yüksek olduğu dikkate alınmalıdır.
- Yay kesit geometrisinin etkisinin daha net incelenebilmesi için bu çalışmanın aynı uzunluklarda farklı kesit geometrileri için tekrarlanması, malzeme etkisinin daha net görülebilmesi için mekanik özellikleri birbirine yakın olmayan malzemeler kullanılması, böylece daha geniş yelpazede elde edilen sonuçlar üzerinden tasarım amacıyla bir düzeltme katsayısı belirlenip belirlenemeyeceğinin incelenmesi gibi çalışmalar ile bu konu genişletilebilir.

Kaynaklar (References)

1. Rathore K.K., Singh A.P., Kanchwala H., Biswas S., A Comprehensive Experimental and Numerical Study of Hysteretic Characteristics of Leaf Spring Suspensions. Journal of Vibration Engineering and Technologies, 13 (264), 1-21, 2025.

2. Hedia H.S., Alfozan A.K., Almas M.A., Soliman M.A., Materials selection analysis for multilayers leaf spring using FEA, *Materials Testing*, 67 (10), 665-1674, 2025.
3. Kothari P., Patel A., A review paper on design and analysis of leaf spring, *International Journal of Engineering, Research and Technology*, 3 (3), 1529-1532, 2014.
4. Khudhair M.R., Kamil F., Hasan H.S., Kadhom M.A., Optimum design of leaf spring: A case study, *International Journal of Computational and Experimental Science and Engineering*, 11 (2), 2856-2871, 2025.
5. Özener O., Tabakalı yaprak yayların burulma davranışlarının deneysel ve sonlu elemanlar analizi ile incelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2023.
6. St. Venant B., Memoire sur la torsion des Prismes, *Memoires presentes par divers savants a l'Academie des Sciences (Sect. Mathematiques et Physiques)*, 14, 233-560, 1855.
7. Ugural A.C., Fenster S.K., *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*, Prentice Hall, New York, A.B.D., 2012.
8. Timoshenko S., Goodier J., *Theory of Elasticity*, McGraw Hill Book, New York, A.B.D., 1970.
9. Xunwen S., Shaoping W., Dongmei S.J., Nonlinear characteristic analysis of leaf spring torsion for the actuator loading, *Prognostics and System Health Management Conference*, Macao-Çin, 1-5, 12-14 Ocak, 2010.
10. Theocaris P.S., The warping functions of regular prismatic bars under torsion evaluated by caustics, *Experimental Mechanics*, 29, 285-290, 1989.
11. Tran K.V., Woracek R., Kardjilov N., Markötter H., Abou-Ras D., Puplampu S., Förster C., Penumadu D., Dahlberg C. F.O., Banhart J., Manke I., Torsion of a rectangular bar: Complex phase distribution in 304L steel revealed by neutron tomography, *Materials & Design*, 222, 11103, 2022.
12. Stronge W.J., Zhang T.G., Warping of prismatic bars in torsion, *International Journal of Solids and Structures*, 30 (5), 601-606, 1993.
13. Kostopoulos C., Marzok A., Waisman H., Topology optimization of beams' cross-sectional properties considering torsional and warping behavior, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 68, 28, 2025.
14. Zhang H.-Y., Goman W.M.H., Liu S.-W., Chen L., Chan S.-L., Advanced line-finite-element for lateral-torsional buckling of beams with torsion and warping restraints, *Journal of Constructional Steel Research*, 224, Part A, 109103, 2025.
15. Petrich M., Titze S., Weimann T.L., Kletzin U., Examination on composite strips for springs under torsional load, 1st Compendium of Modern Spring Technologies, Hagen - Almanya, 53-60, Ağustos, 2021.
16. Günay M.G., Torsion of variable stiffness composite laminated beams, *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, 28 (1), 18-25, 2022.
17. Swanson R.S., Torsion of laminated rectangular rods, *Composite Structures*, 42, 23-31, 1998.
18. Danao L.A.M., Cabrera R.M., Torsion of a rectangular prismatic bar: solution using a power fit model, *Philippine Engineering Journal*, 28 (2), 77-98, 2007.
19. Gentiluomo J.A., Design of laminated torsion bar springs, *Procurement Directorate Watervliet Arsenal*, N.Y. 12189, U. S. Army Technical Report, 1980.
20. Močilnik V., Predan J., Gubeljak N., Determination of characteristics of a laminated torsion bar spring by using correction coefficients in respect to clamping conditions, *Tehnički vjesnik*, 27 (3), 819-825, 2020.
21. ASTM International. E1876-15, Standard test method for dynamic young's modulus, shear modulus, and poisson's ratio by impulse excitation of vibration. Pennsylvania: ASTM International, 120, 2012.
22. Gokhale N.S., Deshpande S.S., Bedekar S.V., Thite A.N., *Practical Finite Element Analysis, Finite To Infinite*, Hindistan, 2008.

