



Üçgende Gergonne Noktası ile İlgili Farklı Bakış Açıları ve Yeni Özellikler Oluşturma

Ferhat İPEK^{*1}, Melis EMEKLİ², Dilşad ERGEN³

¹Adana Çukurova Bilim ve Sanat Merkezi, 01170, Çukurova, Adana, Türkiye

²İstanbul Vehbi Koç Vakfı Koç Özel Lisesi, 34959, Tuzla, İstanbul, Türkiye

³Adana Çukurova Bilim ve Sanat Merkezi, 01170, Çukurova, Adana, Türkiye

¹(ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-0986-2297>)

²(ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7537-5920>)

³(ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8528-6620>)

(Alınış / Received: 08.01.2026, Kabul / Accepted: 30.01.2026, Online Yayınlanma / Published Online: 31.01.2026)

*İlgili yazar ve danışmanı : ferhatipek0133@gmail.com, melisemekli@gmail.com, dilsad2501@gmail.com

Özet: Öklid geometrisi kapsamında üçgen konusu ile ilgili çalışmalarda önemli bir yere sahip olan Gergonne noktası, üçgenin iç teğet çemberinin kenarlara değdiği noktalar ile karşı köşeleri birleştiren doğruların kesişim noktası olarak tanımlanmaktadır. Bu çalışma, kapsamlı bir literatür taramasından hareketle, Gergonne noktasının düzlemdeki farklı noktalarla arasındaki uzaklık ilişkilerini incelemeyi ve bu bağlamda yeni geometrik bağıntılar ortaya koymayı amaçlamaktadır. Çalışmanın ilk aşamasında, Gergonne noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıklarına ilişkin hesaplamalar elde edilmiştir. Bu süreçte, Gergonne noktası ile düzlemdeki herhangi bir nokta arasındaki uzaklığa yönelik daha genel bir bağıntı tespit edilmiş söz konusu bağıntı teorem hâlinde sunulularak ispatlanmıştır. Bu sonuçtan yararlanılarak, Gergonne noktasının köşelere olan uzaklıkları ile üçgenin kenar uzunlukları arasında yeni bir bağıntı kurulmuş ve bu nicelikler arasında anlamlı bir ilişki elde edilmiştir. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde, özel bir üçgen sınıfı olarak dik üçgenler ele alınmış ve dik üçgenlerde Gergonne noktasına ilişkin özgün bağıntılar ortaya konmuştur. Son olarak, Gergonne noktası kullanılarak dik üçgenler için alternatif bir alan formülü türetilmiştir. Bulgular sunulurken, deneysel gözlemler ve geometrik çıkarımlar yoluyla elde edilen varsayımlar sistematik biçimde ele alınmış ardından bu varsayımlar doğrudan ispat yöntemi ve algoritmik adımlar kullanılarak kanıtlanmıştır. Elde edilen sonuçlar, Öklid geometrisine ilişkin literatüre yeni katkılar sunarak Gergonne noktasının genel ve özel durumlar için özgün sonuçlar ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gergonne Noktası, İç Teğet Çember, Dik Üçgen

Different Perspectives on the Gergonne Point in a Triangle and the Construction of New Properties

Abstract: In Euclidean geometry, the Gergonne point, which holds a significant place in studies related to triangles, is defined as the intersection point of the points where the inscribed circle of the triangle touches the sides and the lines connecting the opposite vertices. This study aims to examine the distance relationships between the Gergonne point and different points in the plane, based on a comprehensive literature review, and to establish new geometric relationships in this context. In the first stage of the study, calculations regarding the distances of the Gergonne point to the vertices of the triangle were obtained. In this process, a more general relationship for the distance between the Gergonne point and any point in the plane was identified and proven by presenting this relationship as a theorem. Using this result, a new relationship was established between the distances of the Gergonne point to the vertices and the side lengths of the triangle, and a meaningful relationship was obtained between these quantities. In the later sections of the study, right triangles, as a special class of triangles, are considered, and original relationships regarding the Gergonne point in right triangles are presented. Finally, an alternative area formula for right triangles is derived using the Gergonne point. In presenting the findings, assumptions obtained through experimental observations and geometric inferences are systematically addressed, and then these assumptions are proven using direct proof methods.

and algorithmic steps. The results offer new contributions to the literature on Euclidean geometry, revealing original results for both general and specific cases of the Gergonne point.

Keywords: Gergonne Point, Incircle, Right-Angled Triangle

1. Giriş

Matematik; aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adıdır. Geometri ise bireylerin matematiksel düşünmesini kolaylaştıran ve geometrik şekilleri kullanarak bireylerin çözüme ulaşmasını sağlayan bir bilim dalıdır. Soyut bir disiplin olarak görülen matematiğin, somut yönünün en iyi fark edilebildiği bir alanıdır. Bunun dışında günlük yaşam problemlerini çözmede ve bilim, sanat gibi farklı disiplinlerde kullanılmaktadır (Hızarcı, 2004).

Geometri alanında şimdiye kadar yapılmış çalışmalarda üçgenlerdeki özel noktalar ve merkezler büyük önem taşımıştır. Venema (2006) çalışmasında; klasik üçgen merkezlerinin tanımlamasını yapıp açık uçlu problemler ortaya koymuştur. Literatürde bir üçgenin ağırlık merkezi, iç teğet çemberin merkezi, diklik merkezi, çevrel çemberin merkezi, vb. çok fazla sayıda merkez tanımlanmıştır (Akyar ve Akyar, 2016).

Sastry (2000) çalışmasında; üçgenin iç noktalarının bilinen özellikleri ile üçgenin kenarortayı ile üçgenin diğer bir kenarını karşı köşe ile birleştiren doğru parçasının üçgenin Gergonne noktasında kesiştirilmesi yoluyla Heron üçgenlerinin üretilmesini vermiştir.

Bir üçgende iç teğet çemberin kenarlara değme noktaları ile karşı köşeleri birleştiren doğruların kesişim noktasına Gergonne noktası denir ve genellikle G_e ile gösterilir. Bu nokta, klasik üçgen merkezleri arasında yer almakta olup adını Fransız matematikçi Joseph Diaz Gergonne'dan almaktadır (Queiroz Filho, 2016). Gergonne noktası uzun süredir geometri literatüründe ilgi gören özel noktalardan biri olarak kabul edilmektedir.

Gergonne noktası üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde, bu noktanın farklı geometrik bağlamlarda ele alındığı görülmektedir. Queiroz Filho (2021), Gergonne noktasının üçgen düzlemindeki herhangi bir noktaya olan uzaklığını veren metrik bir bağıntı elde etmiş ve bu bağıntıyı geometrik teoremler yardımıyla ispatlamıştır. Bu yaklaşım, Gergonne noktasının yalnızca konumsal bir merkez değil, düzlemdeki noktalarla ölçüsel ilişkiler kurabilen bir yapı olarak incelenebileceğini göstermektedir. Jurkin ve Šimić Horvath (2023) ise Gergonne noktasını izotropik düzlem bağlamında ele alarak bu noktaya bağlı bazı eğrileri incelemiş ve özelliklerini araştırmıştır. Benzer şekilde Katić Žlepalo ve Jurkin (2018), aynı çevrel çembere sahip üçgenlerden oluşan bir üçgen ailesinde Gergonne noktalarının geometrik yerini incelemiş ve bu yerin cebirsel nitelikte bir eğri olduğunu göstermiştir. Bu çalışmalar, Gergonne noktasının dinamik ve kuramsal yönlerini ortaya koymakla birlikte, üçgenin kenarları ve köşeleri ile doğrudan kurulan metrik bağıntılar üzerine sınırlı sayıda sonucun bulunduğunu göstermektedir.

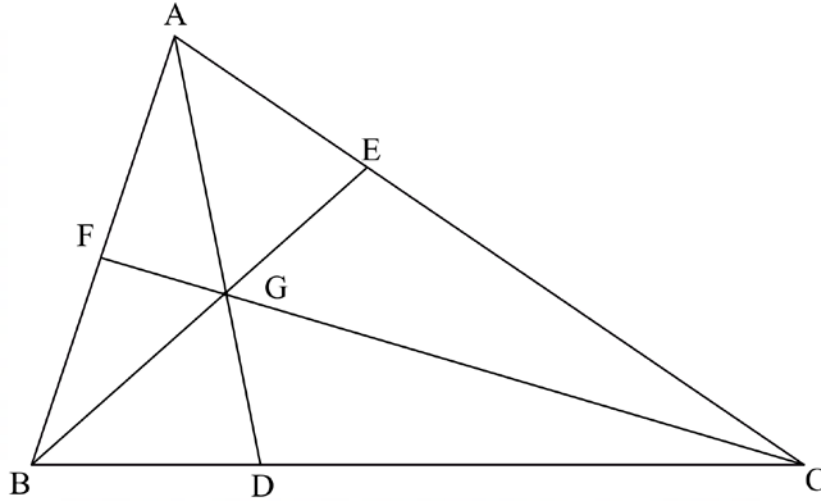
Bu çalışmada Gergonne noktasının metrik özellikleri sistematik biçimde incelenmiştir. İlk aşamada Gergonne noktasının üçgenin köşelerine ve iç teğet çemberin kenarlara değme noktalarına olan uzaklıkları hesaplanmış; ardından Gergonne noktasının düzlem üzerindeki herhangi bir noktaya olan uzaklığına ilişkin genelleştirilmiş bir bağıntı elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuç kullanılarak Gergonne noktasının köşelere olan uzaklıkları ile üçgenin kenar uzunlukları arasında yeni ilişkiler kurulmuştur. Ayrıca dik üçgen özel durumunda Gergonne noktasına ilişkin yeni metrik bağıntılar türetilmiş ve Gergonne noktasından yararlanılarak dik üçgenin alanını veren bir bağıntı ortaya konmuştur.

Bu çerçevede çalışmanın temel amacı, Gergonne noktası aracılığıyla elde edilebilecek yeni bağıntıları ortaya koymaktır. Bunun yanında elde edilen sonuçların, ileri düzey geometri problemlerinde ve özellikle özel noktalara dayalı çözüm yaklaşımlarında kullanılabilirliğinin gösterilmesi hedeflenmektedir. Çalışma, üçgenin klasik merkezlerinden biri olan Gergonne noktasının metrik açıdan daha kapsamlı biçimde ele alınmasına katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

1.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Çalışma boyunca ve özellikle ispat aşamalarında kullanılacak olan temel tanım, teorem ve kavramlar bu bölümde tanıtılacaktır.

Gergonne Noktası: Bir ABC üçgeninde iç teğet çemberlerin değme noktaları ile üçgenin köşelerini birleştiren doğrular aynı noktada kesişirler ve bu nokta Gergonne Noktası olarak adlandırılır. ABC üçgenine ait iç teğet çember, D , E ve F iç teğet çemberin kenarlara değme noktaları, ABC üçgeninin çevresi $2s$ olmak üzere; $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$ doğrularının kesim noktası Gergonne Noktasıdır. Bu durum Şekil 1. de gösterilmiştir.



Şekil 1.

Menelaus Teoremi: ABC bir üçgen ve D, E, F noktaları sırasıyla BC, CA, AB doğruları üzerinde olsun. D, E, F

$$\frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} \cdot \frac{|AF|}{|BF|} = 1$$

noktalarının doğrusal olması için gerek ve yeter koşul olmasıdır (Küpeli, 2013).

Stewart Teoremi: ABC bir üçgen ve $D, [BC]$ doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere,

$$|AD|^2 = \frac{|AB|^2 \cdot |DC| + |AC|^2 \cdot |BD|}{|BC|} - |BD| \cdot |DC|$$

dir (Şahin, 2013).

Ceva Teoremi: ABC bir üçgen ve D, E, F noktaları sırasıyla BC, CA, AB doğruları üzerinde olsun. AD, BE, CF doğrularının bir noktadan geçmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} \cdot \frac{|AF|}{|BF|} = 1$$

olmasıdır (Şahin, 2013).

Ortay Üçgen: ABC bir üçgen ve D, E, F noktaları sırasıyla BC, CA, AB doğrularının kenarlarının orta noktaları olsun. DE, EF, FD doğru parçalarının birleştirilmesi ile oluşan üçgene ABC üçgeninin ortay üçgeni denir.

İç Teğet Çember: Bir üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve üçgenin kenarlarına teğet olan çembere üçgenin iç teğet çember denir. İç teğet çemberin merkezi, üçgenin iç açıortaylarının kesim noktasıdır (Şahin, 2013).

Dış Teğet Çemberler: Bir üçgeninin dış bölgesinde bulunan ve üçgenin kenarlarına teğet olan çemberlere üçgenin dış teğet çemberleri denir. Dış teğet çemberin merkezi, üçgenin bir köşesine ait iç açıortay ile diğer köşelerine ait dış açıortayların kesim noktasıdır. Bir üçgenin üç tane dış teğet çemberi vardır (Şahin, 2013).

2. Materyal ve Metot

Çalışmaya ilk olarak konu seçimi yapılarak başlanmıştır. Bu konu Gergonne Noktası olarak belirlenmiştir. Sonrasında Gergonne Noktası ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar incelenmiştir. Daha sonra hem kâğıt-kalem ile hem de bilgisayar ortamında üçgen çizimleri yapılarak çeşitli deneyler ve gözlemler yapılmış ardından bazı iddialar ortaya atılmış ve bu iddialar ispatlanmıştır. Bundan sonra daha özel üçgenler üzerinde çalışmalar yapılmasına karar verilmiş ve dik üçgenler üzerinde yapılan çalışmalar başlamıştır. Bu aşamada daha önce elde edilen bulgular kullanılarak çeşitli çizimler üzerinde yeni özellikler elde edilmiş ve ispatlanmıştır. İspat aşamalarında doğrudan ispat yöntemi, yapılan çizimler sırasında FX Draw programı, matematiksel ifadeleri yazımı sırasında ise MathType uygulamaları kullanılmıştır.

3.Bulgular

Bu bölümde üçgenin iç teğet çemberinin kenarlara değme noktaları ile köşeleri arasında kurulan uzaklık ilişkisi verilmiştir.

Teorem 3.1. ABC bir üçgen ve ABC üçgeninin iç teğet çemberinin $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla D , E , F olsun. $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|CA|=b$ olup, üçgenin çevresi $2s$ ile gösterilsin. Bu durumda

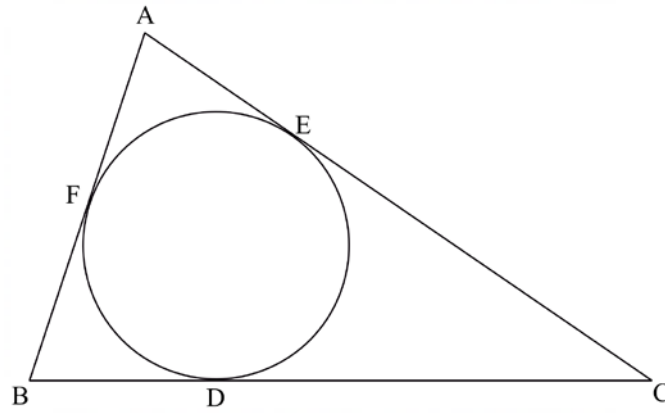
$$|AF|=|AE|=s-a$$

$$|BF|=|BD|=s-b$$

$$|CD|=|CE|=s-c$$

dir.

İspat: ABC üçgenine ait iç teğet çember ve iç teğet çemberin kenarlar değme noktaları değme noktaları ve $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$ doğruları Şekil 2. de gösterilmiştir.



Şekil 2.

$|AB|=c$, $|BC|=a$, $|CA|=b$ olup, üçgenin çevresi $2s$ ile gösterilsin. Ayrıca çemberde teğet özellikleri kullanılarak, $|AF|=|AE|$, $|BF|=|BD|$ ve $|CD|=|CE|$ eşitlikleri görülebilir.

$|AF|=|AE|=x$, $|BF|=|BD|=c-x$, $|CD|=|CE|=b-x$ denilirse,

$$c-x+b-x=a$$

$$c+b=2x+a$$

$$c+b+a=2x+2a$$

$$2s=2(x+a)$$

$$s=x+a$$

$$x=s-a$$

elde edilir. Böylece,

$$|AF|=|AE|=s-a$$

$$|BF|=|BD|=s-b$$

$$|CD|=|CE|=s-c$$

olduğu ispatlanmış olur.

Bu bölümde, üçgende Gergonne Noktası ile iç teğet çemberlerin kenarlara değme noktaları arasındaki uzaklıklar ve köşeler ile Gergonne Noktası arasındaki uzaklıklar arasında kurulan ilişkiler verilmiştir.

Teorem 3.2. ABC bir üçgen ve ABC üçgeninin iç teğet çemberinin $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına teğet olduğu noktalar sırasıyla D , E , F olsun. ABC üçgeninin Gergonne noktası G_e olmak üzere,

$$\text{i. } \frac{|AG_e|}{|G_e D|} = \frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$$

$$\text{ii. } \frac{|BG_e|}{|G_e E|} = \frac{b(s-b)}{(s-a)(s-c)}$$

$$\text{iii. } \frac{|CG_e|}{|G_e F|} = \frac{c(s-c)}{(s-a)(s-b)}$$

$$\text{iv. } |AG_e| = a(s-a) \left[\frac{\sqrt{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c)}}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \right]$$

$$\text{v. } |G_e D| = (s-b)(s-c) \left[\frac{\sqrt{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c)}}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \right]$$

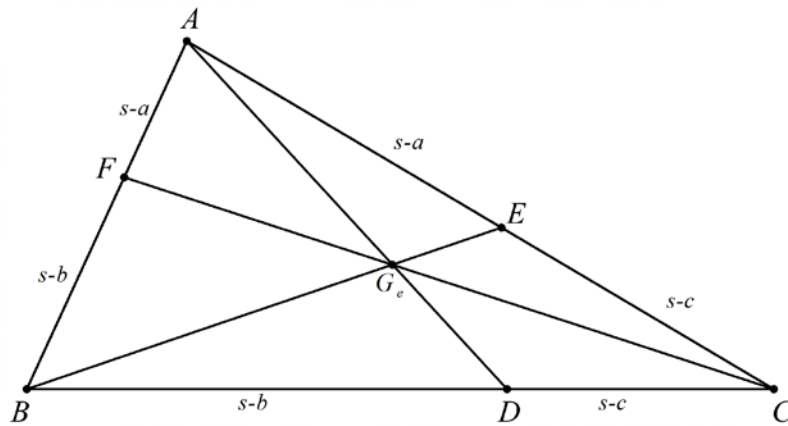
$$\text{vi. } |AG_e| \cdot |G_e D| = \frac{a(s-a)(s-b)(s-c)}{(a(s-a) + (s-b)(s-c))^2} \left(\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c) \right)$$

$$\text{vii. } \frac{|AG_e|}{|AD|} = \frac{a(s-a)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)}$$

$$\text{viii. } \frac{|G_e D|}{|AD|} = \frac{(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)}$$

dir.

İspat (i) : ABC üçgeninde G_e Gergonne noktası olsun. Üçgenin kenar uzunlukları sırasıyla a , b , c ve çevresi $2s$ olmak üzere, $|AF| = |AE| = s - a$, $|BF| = |BD| = s - b$ ve $|CD| = |CE| = s - c$ dir.



Şekil 3.

Şekil 3. de gösterilen ADC üçgeninde Menelaus Teoremi uygulanırsa,

$$\frac{|BD|}{|BC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AG_e|}{|G_e D|} = 1$$

$$\frac{s-b}{2s-b-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{|AG_e|}{|G_e D|} = 1$$

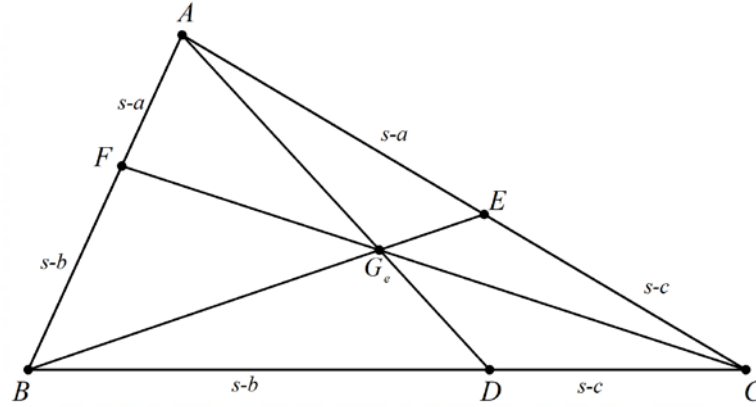
$$\frac{s-b}{a} \cdot \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{|AG_e|}{|G_eD|} = 1$$

$$\frac{|AG_e|}{|G_eD|} = \frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$$

elde edilir.

(ii) ve (iii) de benzer şekilde ispatlanabilir.

(iv) : Şekil 3. de gösterilen ABC üçgeninde AD doğrusuna göre Stewart teoremi uygulanırsa,



Şekil 4.

$$|AD|^2 = \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c) \quad (1)$$

olur. Ayrıca (i) de $\left(\frac{|AG_e|}{|G_eD|} = \frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)} \right)$ elde edilen sonuçlardan hareketle, bir k pozitif reel sayısı için,

$$|AG_e| = a(s-a)k \quad (2)$$

$$|G_eD| = (s-b)(s-c)k \quad (3)$$

olup,

$$|AD| = a(s-a)k + (s-b)(s-c)k = k \cdot [a(s-a) + (s-b)(s-c)] \quad (4)$$

olur. Bu değerler 1 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$k^2 \cdot [a(s-a) + (s-b)(s-c)]^2 = \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c)$$

olup

$$k^2 = \frac{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c)}{[a(s-a) + (s-b)(s-c)]^2}$$

$$k = \frac{\sqrt{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c)}}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \quad (5)$$

elde edilir. 5 eşitliğinde elde edilen değer (2) de yerine yazılırsa

$$|AG_e| = a(s-a)k$$

$$|AG_e| = a(s-a) \left[\frac{\sqrt{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c)}}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \right] \quad (6)$$

elde edilir.

(v) : 2 ve 5 eşitliğinde elde edilen değerler 3 eşitliğinde $(|G_e D| = (s-b)(s-c)k)$ yerine yazılırsa

$$|G_e D| = (s-b)(s-c) \left[\frac{\sqrt{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a}} - (s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \right] \quad (7)$$

olduğu gösterilmiş olur.

(vi) : (6) ve (7) de bulunan eşitlikleri çarpalım.

$$\begin{aligned} |AG_e| \cdot |G_e D| &= \\ a(s-a) \left[\frac{\sqrt{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a}} - (s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \right] \cdot (s-b)(s-c) &\left[\frac{\sqrt{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a}} - (s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \right] \\ &= a(s-a)(s-b)(s-c) \frac{\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c)}{(a(s-a) + (s-b)(s-c))^2} \\ &= a(s-a)(s-b)(s-c) \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c)}{a(a(s-a) + (s-b)(s-c))^2} \\ &= \frac{ab^2(s-a)(s-b)^2(s-c) + ac^2(s-a)(s-b)(s-c)^2 - a^2(s-a)(s-b)^2(s-c)^2}{a(a(s-a) + (s-b)(s-c))^2} \end{aligned}$$

olup

$$|AG_e| \cdot |G_e D| = \frac{a(s-a)(s-b)(s-c)}{(a(s-a) + (s-b)(s-c))^2} \left(\frac{b^2(s-b) + c^2(s-c)}{a} - (s-b)(s-c) \right) \quad (8)$$

elde edilir.

(vii) : 2 ve 4 eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{|AG_e|}{|AD|} = \frac{a(s-a)k}{k \cdot [a(s-a) + (s-b)(s-c)]} = \frac{a(s-a)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \quad (9)$$

elde edilir.

(viii): 3 ve 4 eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{|G_e D|}{|AD|} = \frac{(s-b)(s-c)k}{k \cdot [a(s-a) + (s-b)(s-c)]} = \frac{(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \quad (10)$$

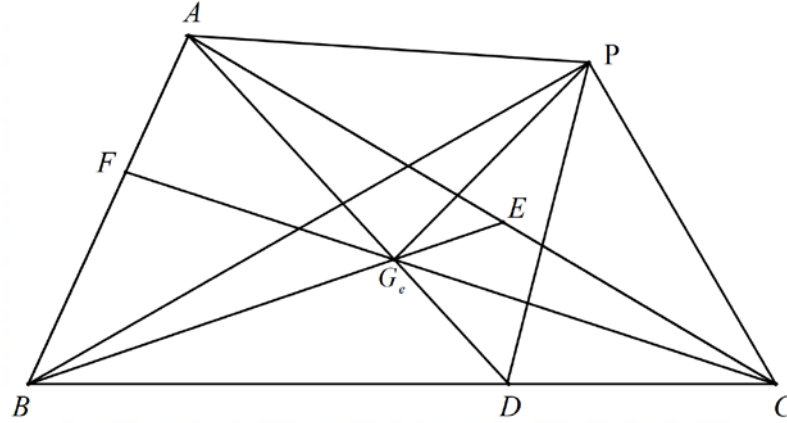
elde edilir.

Bu iddiada Gergonne Noktası'yla düzlem üzerindeki herhangi bir nokta arasındaki uzaklık üçgenin kenar uzunluklarına ve çevresine bağlı olarak bulunacaktır.

Teorem 3.3. ABC bir üçgen, G_e , ABC üçgeninin Gergonne noktası ve P , herhangi bir nokta olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |PG_e|^2 &= \frac{|PA|^2(s-b)(s-c) + |PB|^2(s-a)(s-c) + |PC|^2(s-a)(s-b)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \\ &\quad - \frac{a(s-a)(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \left(1 + \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c)}{a^2(s-a) + a(s-b)(s-c)} \right) \text{ dir.} \end{aligned}$$

İspat: ABC bir üçgen, G_e , ABC üçgeninin Gergonne noktası ve P , herhangi bir nokta olsun. İlgili durum Şekil 5 de gösterilmiştir.



Şekil 5.

BPC üçgeninde Stewart teoremi uygulanırsa

$$|PD|^2 = \frac{|PB|^2(s-c) + |PC|^2(s-b)}{a} - (s-b)(s-c) \quad (11)$$

olur. APD üçgeninde Stewart teoremi uygulanırsa,

$$|PG_e|^2 = \frac{|PA|^2 |G_e D| + |PD|^2 |G_e A|}{|AD|} - |AG_e| \cdot |G_e D|$$

$$|PG_e|^2 = |PA|^2 \cdot \frac{|G_e D|}{|AD|} + |PD|^2 \cdot \frac{|AG_e|}{|AD|} - |AG_e| \cdot |G_e D| \quad (12)$$

olur. 12 eşitliğinde 8, 9 ve 10 eşitlikleri yerine yazılırsa

$$|PG_e|^2 = |PA|^2 \frac{(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} + \left(\frac{|PB|^2(s-c) + |PC|^2(s-b)}{a} - (s-b)(s-c) \right) \frac{a(s-a)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)}$$

$$- a(s-a)(s-b)(s-c) \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c)}{a(a(s-a) + (s-b)(s-c))^2}$$

$$= \frac{|PA|^2(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} + \frac{|PB|^2(s-a)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} + \frac{|PC|^2(s-a)(s-b)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} - \frac{a(s-a)(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)}$$

$$- a(s-a)(s-b)(s-c) \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c)}{a(a(s-a) + (s-b)(s-c))^2}$$

$$= \frac{|PA|^2(s-b)(s-c) + |PB|^2(s-a)(s-c) + |PC|^2(s-a)(s-b)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)}$$

$$- \frac{a(s-a)(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \left(1 + \frac{b^2(s-b) + c^2(s-c) - a(s-b)(s-c)}{a^2(s-a) + a(s-b)(s-c)} \right)$$

bulunur.

Bu bölümde, Gergonne Noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıkları ve kenarlar arasında elde edilen bağıntı verilecektir.

Teorem 3.4. ABC bir üçgen ve ABC üçgeninin Gergonne Noktası G_e olsun. $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$ ve $\frac{a+b+c}{2} = s$ olmak üzere,

$$\frac{|G_e A|^2 (s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} + \frac{|G_e B|^2 (s-a)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} + \frac{|G_e C|^2 (s-a)(s-b)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} - \frac{a(s-a)(s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{(s-a)(as-(b-c)^2)}{[a(s-a)+(s-b)(s-c)]^2} (s-a)(s-b)(s-c)$$

dir.

İspat: 3.3 bölümünde elde edilen eşitlikte $P = G_e$ olarak alınırsa $|PG_e| = 0$ olup

$$0 = \frac{|PA|^2 (s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} + \frac{|PB|^2 (s-a)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} + \frac{|PC|^2 (s-a)(s-b)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} - \frac{a(s-a)(s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)}$$

$$- \frac{(s-a)(as-(b-c)^2)}{[a(s-a)+(s-b)(s-c)]^2} (s-a)(s-b)(s-c)$$

olur. Bu eşitlikte P yerine G_e yazılırsa

$$\frac{|G_e A|^2 (s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} + \frac{|G_e B|^2 (s-a)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} + \frac{|G_e C|^2 (s-a)(s-b)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)} - \frac{a(s-a)(s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{(s-a)(as-(b-c)^2)}{[a(s-a)+(s-b)(s-c)]^2} (s-a)(s-b)(s-c)$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Bu bölümde bir dik üçgende Gergonne Noktası ile ilgili elde ettiğimiz bağıntılar ortaya konulacak ve ispatlanacaktır.

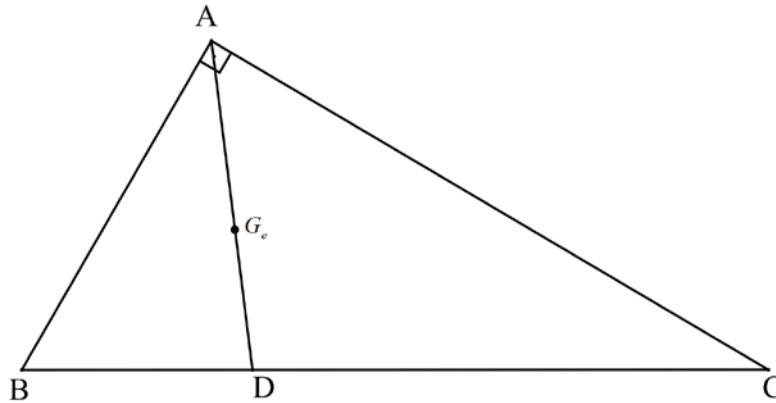
Teorem 3.5. ABC bir dik üçgen ve $m(\angle BAC) = 90^\circ$ olsun. $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $2s = a + b + c$, ABC üçgeninin

Gergonne noktası G_e ve $[BC]$ üzerindeki bir D noktası için $[AD]$, G_e den geçen bir doğru parçası olmak üzere,

$$\text{i. } \frac{|AG_e|}{|G_e D|} = \frac{a}{s}$$

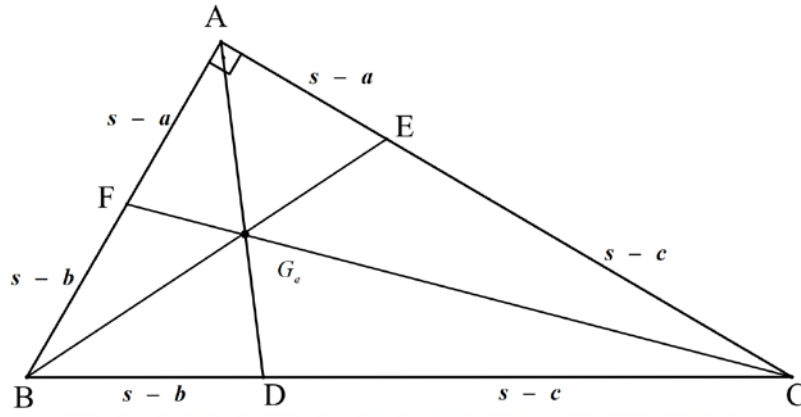
$$\text{ii. } \frac{|AD|}{|G_e D|} = \frac{s+a}{s}$$

dir.



Şekil 6.

İspat: ABC dik üçgeninde G_e noktasından geçen $[BE]$ ve $[CF]$ doğru parçalarını çizelim ve ilgili kenar uzunluklarını üçgenin kenar uzunlukları ve yarı çevresi cinsinden yazalım.



Şekil 7.

$\frac{|AG_e|}{|G_eD|} = \frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$ olduğu zaten bulunmuştur. Ayrıca ABC üçgeninde Pisagor Teoremi kullanılırsa,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$[(s-b) + (s-c)]^2 = [(s-a) + (s-c)]^2 + [(s-a) + (s-b)]^2$$

$$(s-b)^2 + 2(s-b)(s-c) + (s-c)^2 = (s-a)^2 + 2(s-a)(s-c) + (s-c)^2 + (s-a)^2 + 2(s-a)(s-b) + (s-b)^2$$

$$2(s-b)(s-c) = (s-a)^2 + 2(s-a)(s-c) + (s-a)^2 + 2(s-a)(s-b)$$

$$2(s-b)(s-c) = (s-a)[(s-a) + 2(s-c) + (s-a) + 2(s-b)]$$

$$2(s-b)(s-c) = (s-a)[s-a + 2s - 2c + s-a + 2s - 2b]$$

$$2(s-b)(s-c) = (s-a)[6s - 2a - 2b - 2c]$$

$$2(s-b)(s-c) = (s-a)[6s - 4s]$$

$$2(s-b)(s-c) = (s-a)2s$$

$$\frac{(s-a)}{(s-b)(s-c)} = \frac{1}{s}$$

bulunur. Bu değer yerine yazılırsa,

$$\frac{|AG_e|}{|G_eD|} = \frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)} = a \cdot \frac{1}{s} = \frac{a}{s}$$

elde edilir.

ii. $\frac{|AG_e|}{|G_eD|} = \frac{a}{s}$ eşitliğinin her iki yanına 1 eklenirse,

$$\frac{|AG_e|}{|G_eD|} + 1 = \frac{a}{s} + 1$$

$$\frac{|AG_e| + |G_eD|}{|G_eD|} = \frac{a+s}{s}$$

$$\frac{|AD|}{|G_eD|} = \frac{a+s}{s}$$

(13)

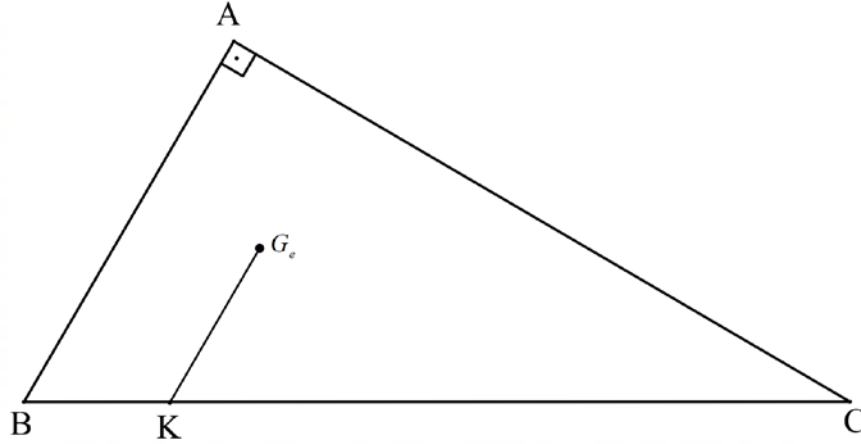
elde edilir.

Teorem 3.6. Teorem 3.7. ve Teorem 3.8. de dik üçgende Gergonne Noktası ile ilgili çeşitli bağıntılar verilmiştir.

Teorem 3.6. ABC bir dik üçgen ve $m(\angle BAC) = 90^\circ$ dir. G_e , ABC üçgeninin Gergonne Noktası ve $[BC]$ üzerindeki bir K noktası için $G_e K \perp AB$ olmak üzere,

$$\frac{|AB| + |CK|}{|G_e K|} = \frac{2|BC|}{|AB|} + 1$$

dir.

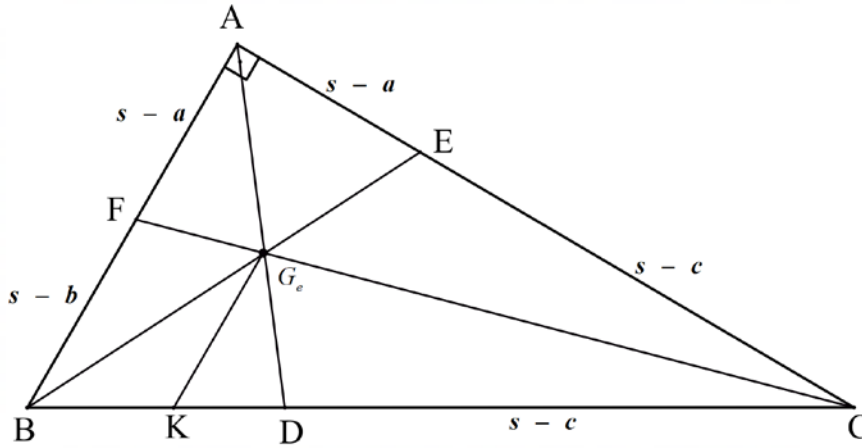


Şekil 8.

İspat: ABC bir dik üçgen ve $m(\angle BAC) = 90^\circ$ olsun G_e , ABC üçgeninin Gergonne Noktası olmak üzere,

$$\frac{|AB| + |CK|}{|G_e K|} = \frac{2|BC|}{|AB|} + 1$$

dir.



Şekil 9.

1. adım: $DG_e K \perp DAB$ olup $\frac{|AB|}{|G_e K|} = \frac{|AD|}{|G_e D|}$ olur. 13 eşitliği yardımıyla

$$\frac{|AB|}{|G_e K|} = \frac{a+s}{s} \quad (14)$$

bulunur.

2. adım: $CG_e K \perp CFB$ olup $\frac{|CK|}{|G_e K|} = \frac{|CB|}{|FB|}$ olur. Yani

$$\frac{|CK|}{|G_e K|} = \frac{a}{s-b} \quad (15)$$

bulunur.

3. adım: (14) ve (15) kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|G_e K|} + \frac{|CK|}{|G_e K|} &= \frac{a}{s-b} + \frac{a+s}{s} = \frac{a}{s-b} + \frac{a}{s} + 1 = \frac{as+as-ab}{s(s-b)} + 1 = \frac{a(s+s-b)}{s(s-b)} + 1 \\ &= \frac{a(2s-b)}{s(s-b)} + 1\end{aligned}$$

olup

$$\frac{|AB|}{|G_e K|} + \frac{|CK|}{|G_e K|} = \frac{a(a+c)}{s(s-b)} + 1$$

(16)

bulunur.

Şimdi $s(s-b)$ ifadesine odaklanalım.

$$\begin{aligned}s(s-b) &= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) = \frac{1}{4}(a+b+c)(a-b+c) = \frac{1}{4}[(a+c)^2 - b^2] \\ &= \frac{1}{4}(a^2 + 2ac + c^2 - b^2) = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2ac + c^2 - b^2) = \frac{1}{4}(2c^2 + 2ac) \\ &= \frac{1}{4}(2c)(c+a)\end{aligned}$$

olup

$$s(s-b) = \frac{1}{2}c(c+a)$$

(17)

olur. 17’de elde edilen ifadeyi 16’da yerine yazalım.

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|G_e K|} + \frac{|CK|}{|G_e K|} &= \frac{a(a+c)}{\frac{1}{2}c(c+a)} + 1 \\ &= \frac{2a}{c} + 1 \\ &= \frac{2a}{c} + 1\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\frac{|AB|+|CK|}{|G_e K|} = \frac{2|BC|}{|AB|} + 1$$

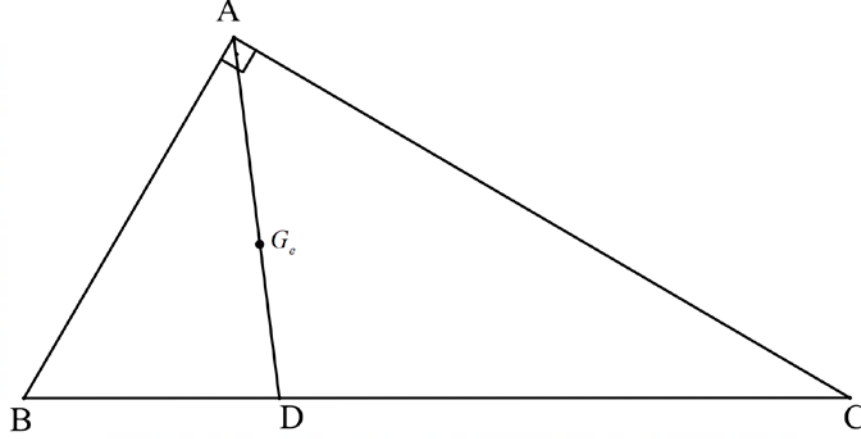
eşitliği ispatlanmış olur.

Özel olarak, $m(ACB) = 30^\circ$ alınırsa, $\frac{|BC|}{|AB|} = 2$ olup, $\frac{|AB|+|CK|}{|G_e K|} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ olup, $|AB|+|CK| = 5|G_e K|$ bağıntısı elde edilir.

Özel olarak, $m(ACB) = 60^\circ$ alınırsa, $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ olup, $\frac{|AB|+|CK|}{|G_e K|} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ olup, $\sqrt{3}(|AB|+|CK|) = (4+\sqrt{3})|G_e K|$ bağıntısı elde edilir.

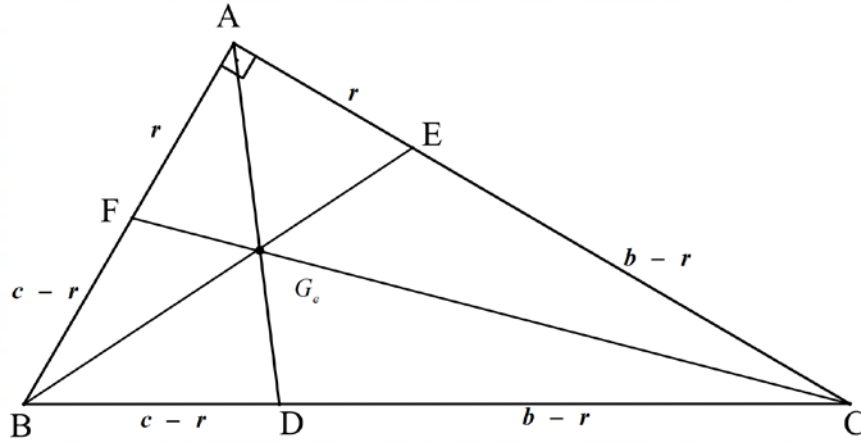
Özel olarak, $m(\angle ACB) = 45^\circ$ alınır, $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ olup, $\frac{|AB| + |CK|}{|G_e K|} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{4 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ olup, $\sqrt{2}(|AB| + |CK|) = (4 + \sqrt{2})|G_e K|$ bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.7. ABC bir dik üçgen ve $m(\angle BAC) = 90^\circ$ dir. G_e , ABC üçgeninin Gergonne noktası ve $[BC]$ üzerindeki bir D noktası için $[AD]$, G_e den geçen bir doğru parçası olmak üzere $A(ABC) = |BD| \cdot |DC|$ dir.



Şekil 10.

İspat: ABC üçgeninde G_e noktasından geçen BE ve CF doğrularını çizelim. ABC üçgeninin iç teğet çember yarıçapının uzunluğu r ile gösterilirse $|AE| = |AF| = r$ olur. Böylece, $|BE| = |BD| = c - r$ ve $|CD| = |CF| = b - r$ olacaktır.



Şekil 11.

$$c - r + b - r = a$$

$$r = \frac{c + b - a}{2}$$

olur. Buradan

$$|BD| = \frac{a - b + c}{2}$$

$$|DC| = \frac{a + b - c}{2}$$

olur. Ayrıca ABC üçgeninde Pisagor teoremi kullanılırsa $a^2 = b^2 + c^2$ olup

$a^2 - b^2 - c^2 = 0$
elde edilir.

$$A(ABC) = \frac{bc}{2}$$

$$A(ABC) = \frac{2bc}{4} \quad (\text{pay ve payda 2 ile çarpıp bölündü})$$

$$A(ABC) = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4} \quad (a^2 - b^2 - c^2 \text{ eklendi.})$$

$$A(ABC) = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4}$$

$$A(ABC) = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4}$$

$$A(ABC) = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4}$$

$$A(ABC) = \frac{(a - b + c)}{2} \cdot \frac{(a + b - c)}{2}$$

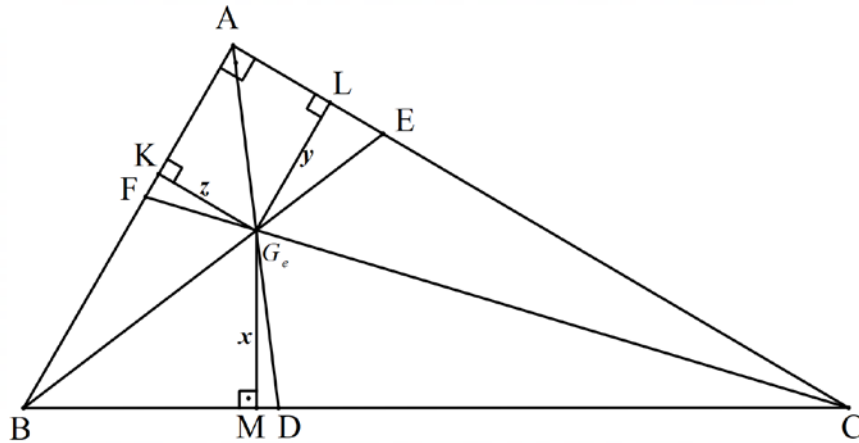
$$A(ABC) = |BD| \cdot |DC|$$

olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 3.8. ABC bir dik üçgen, $m(\angle BAC) = 90^\circ$ dir. G_e , ABC üçgeninin Gergonne noktası olsun. K, M, L noktaları sırasıyla $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarları üzerinde olup $G_e K \perp AB$, $G_e M \perp BC$, $G_e L \perp AC$ olmak üzere

$$\frac{1}{|G_e M|} = \frac{1}{|BK|} + \frac{1}{|CL|} \text{ dir.}$$

İspat: ABC üçgeninde D, E, F noktaları, iç teğet çemberin kenarlara değme noktaları olsun. $|G_e K| = z$, $|G_e M| = x$ ve $|G_e L| = y$ olmak üzere $\frac{1}{x} = \frac{1}{b-z} + \frac{1}{c-y}$ olduğu gösterilmelidir.



Şekil 12.

BKG_e ile BAE üçgenleri benzer olup

$$\frac{z}{c-y} = \frac{s-a}{c}$$

(18)

dir. CLG_e ile CAF üçgenleri benzer olup

$$\frac{y}{b-z} = \frac{s-a}{b} \quad (19)$$

dir. Ayrıca $A(ABC) = A(BG_eC) + A(AG_eC) + A(AG_eB)$ olup $ax + by + cz = bc$ dir. Buradan

$ax = bc - by - cz$ elde edilir. Eşitliğin her iki yanı $b - z$ ve $c - y$ ile bölünüp elde edilenler taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{ax}{b-z} + \frac{ax}{c-y} = \frac{bc-by-cz}{b-z} + \frac{bc-by-cz}{c-y}$$

$$\frac{ax}{b-z} + \frac{ax}{c-y} = \frac{c(b-z)-by}{b-z} + \frac{b(c-y)-cz}{c-y}$$

$$\frac{ax}{b-z} + \frac{ax}{c-y} = c - b\left(\frac{y}{b-z}\right) + b - c\left(\frac{z}{c-y}\right)$$

olur. 17 ve 18 de elde edilen eşitlikler kullanılırsa

$$\frac{ax}{b-z} + \frac{ax}{c-y} = c - \frac{b(s-a)}{b} + b - \frac{c(s-a)}{c}$$

$$\frac{ax}{b-z} + \frac{ax}{c-y} = c - (s-a) + b - (s-a)$$

$$\frac{ax}{b-z} + \frac{ax}{c-y} = c - s + a + b - s + a$$

$$\frac{ax}{b-z} + \frac{ax}{c-y} = a$$

$$\frac{x}{b-z} + \frac{x}{c-y} = 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{b-z} + \frac{1}{c-y}$$

olup, $\frac{1}{|G_eM|} = \frac{1}{|BK|} + \frac{1}{|CL|}$ olduğu ispatlanmış olur.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada bir üçgende Gergonne noktası metrik özellikleri bakımından incelenmiş ve bu özel noktanın üçgenin kenar uzunlukları, köşeler arası uzaklıklar ve belirli doğru parçaları ile olan ilişkileri sistematik biçimde ortaya konulmuştur. Elde edilen bulgular, Gergonne noktasının üçgenin metrik yapısıyla doğrudan bağlantılı olduğunu göstermektedir.

Literatürde Gergonne noktası çoğunlukla tanımsal özellikleri, tarihsel gelişimi ve dinamik geometri bağlamındaki geometrik yer problemleri çerçevesinde ele alınmıştır. Özellikle son yıllarda yapılan çalışmalarda, farklı üçgen grupları altında Gergonne noktasının özellikleri incelenmiş ve bu noktaların oluşturduğu eğrilerin cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Bu çalışmada ise odak noktası doğrudan üçgenin iç yapısındaki uzunluk ilişkileri olmuş ve Gergonne noktasının köşelere olan uzaklıkları ile kenar uzunlukları arasında yeni bağıntılar elde edilmiştir.

Sastry (2000) tarafından yapılan çalışmada üçgen iç noktaları ile sayı teorisi arasında ilişkiler kurulmuşken, bu çalışmada tamamen geometrik bir çerçevede kalınarak uzunluk ve mesafe bağıntıları incelenmiştir. Bu yönüyle çalışma, aritmetik bağıntılardan ziyade metrik geometriye odaklanarak literatürde farklı bir yaklaşım ortaya koymaktadır. Queiroz Filho (2021) tarafından Gergonne noktasının düzlemdeki herhangi bir noktaya olan uzaklığına ilişkin verilen metrik bağıntı, bu çalışmanın ele aldığı problemlerle doğrudan ilişkilidir. Ancak mevcut çalışmada söz konusu ilişki farklı bir yöntemle ele alınmış, elde edilen sonuçlar üçgen köşelerine olan uzaklıklara ve özel olarak dik üçgen durumuna uygulanarak kapsamı genişletilmiştir.

Çalışmanın özgün katkılarından biri, Gergonne noktasının köşelere olan uzaklıkları ile üçgen kenar uzunlukları arasında açık ve sistematik bağıntılar kurulmuş olmasıdır. Ayrıca Gergonne noktasının düzlem üzerindeki herhangi bir noktaya

olan uzaklığına ilişkin elde edilen sonucun, üçgenin özel noktalarına uygulanarak yeni bağıntılar türetilmesi literatürdeki bilgiyi genişletmektedir. Özellikle dik üçgenler için elde edilen sonuçlar, Gergonne noktasının bu özel üçgen türündeki rolünü metrik açıdan ortaya koymakta ve literatürde doğrudan ele alınmamış ilişkileri göstermektedir. Bunun yanında Gergonne noktası kullanılarak dik üçgenin alanını veren bir bağıntının elde edilmesi, bu noktanın ölçüsel büyüklüklerin hesaplanmasında da kullanılabileceğini ortaya koymaktadır.

Sonuç olarak bu çalışma, Gergonne noktasının hem genel üçgenler hem de dik üçgenler için özelliklerini inceleyerek literatüre katkı sunmaktadır. Elde edilen sonuçların, geometri temelli problemlerde ve özellikle özel noktalara dayalı çözüm yaklaşımlarında yeni uygulamalara imkân sağlayabileceği değerlendirilmektedir. Ayrıca bu çalışmanın, üçgendeki diğer özel noktalar için benzer metrik incelemelere yönelik araştırmalara zemin oluşturabileceği düşünülmektedir.

Teşekkür

Bu çalışmanın her aşamasında desteği, bilgisi ve değerli görüşleriyle yanımızda olan ve çalışmaya önemli katkılar sağlayan Yusuf İpek Hocamıza teşekkürlerimizi sunarız.

Etik Beyanı

Bu çalışmada “Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi” kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin “Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler” başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

Kaynakça

- Akyar, H., ve Akyar, E. (2016). Üçgenin Gergonne Noktası Yardımıyla Üçgensel Fuzzy Sayıları Sıralama Yöntemi.
- Hızarcı, S. (2004). Sunuş (Editör: S. Hızarcı, A. Kaplan, AS İpek ve C. Işık). Euclid Geometri ve Özel Öğretimi.
- Jurkin, E., ve Simic Horvath, M. (2023). Curves Related to the Gergonne Point in an Isotropic Plane. Mathematics, 11(7), 1562.
- Katić Žlepalo, M., ve Jurkin, E. (2018). Curves of centroids, Gergonne points and symmedian centers in triangle pencils in isotropic plane. Rad Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti. Matematičke znanosti, (534= 22), 119-127.
- Küpeli, S. (2013). 100 Yılın Olimpiyat Sorularıyla Geometri. İzmir. Altın Nokta Yayınevi.
- Queiroz Filho, J. F. (2021). Gergonne Point of a Triangle and It's Distance Any Point in the Plane.
- Sastry, K. R. S. (2000). Heron triangles: an incenter perspective, Math. Mag. 73, 388 - 392.
- Şahin, M. (2013). Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Geometri-1. Ankara. Palme Yayıncılık.
- Venema, G. A. (2006). Exploring Advanced Euclidean Geometry with Geometer's Sketchpad, Department of Mathematics and Statistics Calvin College, Grand Rapids, Michigan 49546 USA.