



Mehtap TAŞTEPE<sup>1</sup>, İlyas YAVUZ<sup>2</sup>, Savaş BAŞTÜRK<sup>3</sup>

## SOYUT MATEMATİK DERS KİTAPLARINDAKİ İSPATLARIN BALACHEFF'İN TAKSONOMİSİ BAĞLAMINDA İNCELENMESİ\*

### Özet

Matematik diğer bilimlerin aksine deney ve gözlemlere dayanmadığı için daha soyut bir yapıya sahiptir. Matematiğin bilimsel bir disiplin olmasını sağlayan en önemli hususlardan biri ise şüphesiz ispatlardır. Bu çalışmanın amacı üniversite seviyesinde soyut matematik dersi kapsamında kullanılan ders kitaplarında yer verilen ispatları Balacheff'in ispat taksonomisi bağlamında incelemektir. Bu amaç doğrultusunda güncel olarak kullanılan 4'ü yerli 1'i yabancı olmak üzere 5 adet soyut matematik ders kitabı analiz edilmek üzere seçilmiştir. Yapılan nitel içerik çözümlemesi sonucunda kitaplarda daha çok entelektüel ispat türünün kullanıldığı, kullanılan ispat türünün konulara göre farklılaştığı, en yoğun ispat yapılan konunun kümeler konusu olduğu ve yayın yılı ilerledikçe öğrencilere bırakılan ispat sayısının arttığı belirlenmiştir. En ilginç sonuç ise bazı kitaplarda teorem ya da önerme olarak verilen ifadelerin bazı kitaplarda örnek olarak gösterilmiş olmasıdır.

**Anahtar Kelimeler:** Matematiksel ispat, soyut matematik dersi, ders kitapları, Balacheff'in ispat taksonomisi, matematik öğretimi

## EXAMINING PROOFS IN ABSTRACT MATHEMATICS BOOKS IN THE CONTEXT OF BALACHEFF'S TAXONOMY

### Abstract

Mathematic has more abstract structure because it isn't based on experiments and observations unlike other sciences. One of the most important issues that Mathematic has provided to be a scientific discipline is no doubt proofs. The purpose of this study is to examine the proof given in textbooks which are used in the context of university-level courses in abstract mathematics lesson in the context of Balacheff's taxonomy. For this purpose, actively used in universities 5 abstract mathematics textbooks including 4 domestic books and 1 foreign book were chosen to be analyzed. Based on the results of qualitative content analysis they were determined that more intellectual kind of proof is used in books, proof type used varies according to the subject, sets is the issue proven most intense and when the publication year progresses, the number of proof left to students increases. The most interesting result is the statements given by the theorem or proposition in some books is shown as examples in some books.

**Keywords:** Mathematical proof, abstract mathematics course, textbooks, Balacheff's proof taxonomy, mathematics teaching

<sup>1</sup> Uzm. Öğr. Gör., Sinop Üniversitesi Eğitim Fakültesi, mehtap.tastepe@hotmail.com

<sup>2</sup> Doç. Dr., Marmara Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, iyavuz@marmara.edu.tr

<sup>3</sup> Doç. Dr., Sinop Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, sbasturk@sinop.edu.tr

\* Bu çalışma birinci yazarın yüksek lisans tezinin bir bölümünden elde edilmiştir.

# Soyut Matematik Ders Kitaplarındaki İspatların Balacheff'in Taksonomisine Bağlamında İncelenmesi

## 1. GİRİŞ

İnsanlar belki de ilk çağlardan bu yana yaşadıkları olaylar hakkında çeşitli fikirler ortaya koymuşlar ve bu fikirleri diğer insanlara göstermeye çalışmışlardır. Bu uğraşlar sonucunda da fikir ayrılıkları meydana gelmiş ve bu fikir ayrılıklarını giderebilmek için savundukları fikirlerin doğruluğunu ispat etme çabası ortaya çıkmıştır. Eğer kişi ortaya atmış olduğu fikrini doğru bir şekilde ispat ederse başka bir kişinin ona itiraz etmesini önlemiş olur. Bir fikrin doğruluğunu ispatlamanın en kolay yolu ise göstermektir. Bu ise somut bir olgudur. Fizik, kimya, biyoloji vb. gibi alanlarla kıyasladığımızda daha soyut bir alan olduğundan, matematikte ispata daha çok ihtiyaç duyulmaktadır. Heinze ve Reiss'e (2003) göre matematik deney ve gözlemlere dayanmadığı için bir ispatlama disiplini. Bu matematiğin diğer disiplinlerle olan temel farkıdır. Aksiyomlar, tanımlar, varsayımlar, teoremler ve ispatlar matematiğin bilimsel bir disiplin olmasını sağlamaktadırlar.

İspatın matematikte yadsınamayacak bir öneme sahip olması, matematik eğitiminde yapılan araştırmaları da etkilemektedir. Son zamanlarda, matematik derslerinde akıl yürütme, ispat ve muhakeme ile ilgili konularda yapılan çalışmaların artarak devam ettiği gözlenmektedir (Heinze ve Reis, 2003). Bu kapsamda literatürde, öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat ile ilgili görüş ve düşünceleri, ispatı nasıl kabullendikleri ve nasıl ispat yaptıklarına yönelik olarak çok sayıda araştırmaya rastlanmaktadır (Baştürk, 2010; Jones, 1997; Harel ve Sowder, 1998; Raman, 2003; Weber, 2004b).

Örneğin, Raman (2003) üniversite öğrencileri ve öğretmenlerinin ispat kavramına nasıl baktıklarını inceleyerek üç farklı düşünce şekli tanımlamış, bunları *buluşsal*, *prosedürel* ve *anahtar* şeklinde isimlendirmiştir. Buluşsal (heuristic) düşünce; informal anlamalara dayanır yani deneysel veriye dayandırılır ya da şekille gösterilir. Anlamli olabilir ama formal ispat tarzında değildir. Prosedürel düşünce; ispat yapmada kullanılır ve informal anlamalarla bağlantı kurmaksızın, mantık ve formal ispata götüren işlemlere dayalıdır. Anahtar düşünce; uygun mantıksal geçerlikle birlikte formal ispata dönüştürülebilir buluşsal düşüncedir.

Weber (2004b) de benzer şekilde ileri matematik derslerinde lisans öğrencilerinin ispat yapmada kullandıkları farklı yaklaşımları tanımlamaya çalışmıştır. Bu yaklaşımlar, *prosedürel ispat yapma*, *sentaktik (syntactic) ispat yapma* ve *semantik ispat yapma* olarak belirlenmiştir. Prosedürel ispat yapma, kişinin öngörölmüş olan eylem ve süreçleri takip ederek ispatı oluşturmasıdır ve kişi bu şekilde geçerli bir ispat oluşturacağına inanır. Sentaktik ispat yapma ise doğru bir şekilde ortaya konan tanımların ve ilişkili diğer gerçeklerin, mantıksal olarak kabul edilebilir bir yolla düzenlenmesi ve inşa edilmesiyle yazılan ispattır. Semantik ispat yapma sürecinde ispatlayan kişi yaptığı formal çıkarımları öne sürmek ve ifade etmek için durumun uygulandığı matematiksel nesnelere gösterimlerini kullanır.

Matematiksel ispatlama durumlarının en çok beklendiği ve uygulandığı eğitim kurumları üniversitelerdir. İspat ve ispat yapmak matematikçiler ve matematik eğitimcileri tarafından önemli bir matematiksel aktivite olarak görölmektedir. Bu nedenle her üniversite matematik öğrencisi matematiksel ispatı anlayabilmeli ve yapılandırabilmelidir (Baştürk, 2010). İspat yapabilmek, birçok öğrenci tarafından oluşturulması zor bir aktivitedir ve bu durum birçok faktöre bağlıdır. Ders kitapları da öğrencilerin öğrenmelerinde oynadıkları rol gereği bu faktörlerden biridir (Taştepe, 2012).

Ders kitapları öğrencilerin öğrendikleri bilgileri pekiştirmelerine, sınavlara hazırlanmalarına ve öğrenme hızlarına uygun olarak çalışma olanağı bulmalarına yardımcı olurlar. Bunlar gibi

sayılabilecek nedenlerle ders kitapları çok iyi hazırlanmış olsalar dahi ders programının genel yaklaşımıyla örtüşmüyorsa veya sahip olmaları gereken özellikleri taşıyorlarsa eğitim ve öğretim programlarının başarısızlığında en önemli nedenlerden biri olacaklarına şüphe yoktur (Karakaya, 2011). Delice, Aydın ve Kardeş'e (2010) göre, ders kitapları öncelikle öğretim programlarının felsefesine ve amaçlarına uygun olarak hazırlanan, öğretim programlarının içeriği ile örtüşen, öğretmenlere derslerinde rehberlik eden ve sınıf içi aktivitelerine yön veren, aynı zamanda öğrenciler için dersi tamamlayıcı rol üstlenen öğretme-öğrenme ortamının vazgeçilmez yazılı ve basılı araçlarıdır.

Eğitim ve öğretim sürecinde oldukça önemli bir yere sahip olan ders kitaplarında ispatın nasıl ve ne düzeyde ele alındığı sorusu cevaplanması gereken bir sorudur. Ne yazık ki, matematik eğitimi araştırmacıları, ispatın öğretimi ve öğreniminde ders kitaplarının rolüne çok az dikkat çekmişlerdir. Özellikle, matematik kitaplarındaki ispatlama durumları, ispat tartışmaları ya da ispat oluşturulmasına dair çalışmalar oldukça sınırlıdır (Hanna ve de Bruyn, 1999). Bu konuda çalışan nadir araştırmacılardan olan Hanna ve de Bruyn (1999), ileri düzey matematik ders kitaplarında ispat öğelerini uzun bir zaman diliminde incelemişlerdir. Sadece geometri kitaplarının bu anlamda iyi olduğunu ve farklı ispat türlerine yer verdiklerini belirtmişlerdir. Ancak, verilen ispatların öğrencilerin ispat üzerine düşünmesine uygun olmadığını vurgulamışlardır. Grenier (2000), Fransa'da müfredat ve ders kitaplarında ispatın yeri ve rolü üzerine çalışmış; müfredatın amaçları ile kitapların içerikleri arasında tutarsızlıklar olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca, müfredat yeni ispat yöntemlerini önerirken kitaplarda daha klasik yöntemlerin kullanıldığına dikkat çekmiştir. Bremler (2003) ise yapmış olduğu çalışmada, ders kitaplarının daha çok alıştırma olarak ispatı koruduklarına dikkat çekmiştir.

Her ne kadar yurtdışı literatürde ders kitaplarında ispat kavramının kullanımı ile ilgili bazı çalışmalara rastlansa da, ülkemizde konuyla ilgili pek fazla çalışmanın yapılmadığı görülmektedir. Bu bağlamda, mevcut araştırmada öğrencilerin yoğun bir şekilde ispatla ilk kez karşılaştıkları derslerden biri olan soyut matematik dersinde kullanılan kitaplardaki ispatlar, Balacheff'in taksonomisi bağlamında analiz edilmiştir. Bu taksonominin seçilmesinde, taksonomide ele alınan ispat türlerinin ispat yapma anlamında önemli olmaları ve ders kitaplarındaki tüm ispat durumlarını kapsayabilmeleri etkili olmuştur.

Taksonomiye genel anlamda bakacak olursak, Balacheff (1988) matematiksel ispatı, *pragmatik ispat*, *entellektüel ispat* ve *demonstrasyon ispat* olmak üzere üç düzeye ayırmıştır. Bunlar içerisinde; en alt düzeydeki ispatlar pragmatik ispatlardır. Bunlar, örnek vererek yapılan ispatlardır. Orta seviyede, entellektüel ispatlar yer almaktadır ve bunlar formüllere dayalı olarak yapılan ispatlardır. En ileri seviyedeki ispatlar ise, demonstrasyon ispatları olup, bir teoriyle organize edilmek zorunda olan veya bir topluluk tarafından kabul edilen bilgiler kullanılarak yapılan ispatlardır (Özer ve Arıkan, 2002).

Miyazaki ve Balacheff'in taksonomisini kullandıkları çalışmalarında Özer ve Arıkan (2002), 110 lise 2. sınıf öğrencisinin ispat yapabilme becerilerini ve ispat düzeylerini incelemişlerdir. Elde edilen verilere göre, öğrencilerin büyük bir çoğunluğu pragmatik ispat yapmakta, yani ifadenin doğruluğunu sağlamak için özel birkaç değer vermekle yetinmekte ve bu değerlerin her durum için doğru olduğunu gösterme çabasına girmemektedirler. Tümevarımsal yöntemi kullanarak demonstrasyon ispat yapabilen öğrenciler bulunmakla birlikte, ancak yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında harf kullanmaları istendiğinde öğrencilerin genel sonuca ulaşabildikleri yani entellektüel ispat yapabildikleri gözlenmiştir.

Aşağıda Balacheff'in taksonomisinde yer alan ispat seviyelerine birer örnek verilmiştir:

## Soyut Matematik Ders Kitaplarındaki İspatların Balacheff'in Taksonomisi Bağlamında İncelenmesi

**Pragmatik İspat:** Anlaşılması ve yorumlanması en kolay olan ispat türüdür; ancak örneğin iyi seçilmesi önemli bir unsurdur. Örneğin,

$m, n \in \mathbb{N}$  olsun.  $P: (2 \mid n \wedge 5 \mid m)$  ve  $q: (2 + 5) \mid (n + m)$  önermeleri için  $(p \rightarrow q) \equiv 1$  olup olmadığını araştırınız.

**İspat:** Bunun için de  $p \equiv 1$  iken  $q \equiv 0$  olacak şekilde en az birer tane  $m, n \in \mathbb{N}$  sayılarını bulmamız yeterli olacaktır. Buna göre “ $n = 4$  ve  $m = 5$ ” için  $p$  önermesi doğrudur ama  $(2 + 5) \mid (4 + 5)$  önermesi ise yanlıştır. O halde  $(p \rightarrow q) \equiv 0$  dir (Irmak, 2008, s. 44).

**Entelektüel İspat:** En sık başvurulan ispat türüdür. Matematiksel olarak estetik durur ve kurallara ve tanımlara bağlı olarak yapılır. Örneğin,

Herhangi  $A, B$  ve  $C$  kümeleri için  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$  olduğunu gösteriniz

**İspat:**  $x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$

$\leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

$\leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$

$\leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup (A \cup C)$

Olduğundan  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$  elde edilir (Çallıalp, 1999, s. 18).

**Demonstrasyon İspat:** Bir teoriyle organize edilmek zorunda olan veya matematikçiler tarafından kabul edilen bilgileri kullanan ispatlardır. Örneğin,

Sonsuzdan farklı bir pozitif  $n$  tamsayısı için  $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  olsun. Bu durumda  $\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  olduğunu gösteriniz.

$i \in I$

**İspat:** Küme ailesinin birleşimi

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (i) (i \in I \wedge x \in A_i)\}$

$i \in I$

B biçiminde tanımlandığından, birleşimdeki elemanlar (Herhangi bir  $i$ ) ( $i \in I \wedge x \in A_i$ ) önermesini sağlayan tüm nesnelere. Yani  $A_i$  kümelerinden en azından birinde var olan tüm nesnelere oluşur.  $A_i$  nin tüm elemanları bu şartı sağlar; çünkü her  $x \in A_i$  için “ $1 \in I$  ve  $x \in A_1$ ” önermesinin doğru olduğu aşikardır. Benzer biçimde  $A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$  içinde önermelerin doğru olduğu benzer biçimde görülür. (Kısaca söylemek gerekirse,  $k, 1$ ’ den  $n$ ’ ye kadar hangi tam sayı olursa olsun  $x \in A_k$  iken “ $k \in I \wedge x \in A_k$ ” önermesi doğrudur). Bu nedenle  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$  kümelerinin tümündeki elemanlar küme ailesinin birleşiminde vardır.  $I$  indis kümesinde  $1, 2, 3, \dots, n$  den başka eleman olmadığından küme ailesinin birleşiminde bulunan tüm elemanlar sadece bu elemanlardan ibarettir. Sonuç olarak  $\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  olduğu elde edilir (Çelik, 2010, s. 149-150).

## 2. YÖNTEM

Geçmişte ya da halen var olan bir durumu var olduğu şekliyle betimlemeyi amaçladığından, mevcut araştırma tarama modelindedir. Bu modelde araştırma konusu olay,

birey ya da nesne, dışarıdan herhangi bir etki yapılmaksızın kendi koşulları içinde olduğu gibi incelenir (Karasar, 1999).

### 2.1 Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada ispat açısından yazılı materyaller analiz edildiği için temel olarak bir doküman incelemesi çalışmasıdır. Doküman incelemesinde amaçlanan şey araştırılması hedeflenen olgu veya olgular hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin analiz edilmesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

### 2.2 Verilerin İşlenmesi ve Analizi

Matematik öğretiminde yapılan çalışmaların ortaya koydukları sonuçlardan hareketle geliştirilmiş bir analiz çatısı yardımıyla nitel-içerik çözümlemesi yapılarak veriler analiz edilmiştir.

Araştırma kapsamında, 4 tane yerli yayın evlerine ait ve 1 tane yabancı yayınevine ait 1. sınıf soyut matematik ders kitapları “mantık, kümeler ve fonksiyon” konularındaki ispatlama durumlarını incelemek amacıyla seçilmiştir. Bu seçim piyasada mevcut olan ve üniversitelerde bu ders kapsamında kullanılan kitaplar esas alınarak yapılmıştır. Araştırma kapsamında seçilen bu kitapların yazarları ve yayın yılları aşağıdaki gibidir.

**Tablo 1. Araştırma Kapsamında İncelenen Kitaplar**

<b>Kitap A</b>	Soyut Matematik, Orhan Özer, Doğan Çoker ve Kenan Taş, Malatya, 1989
<b>Kitap B</b>	Örneklerle Soyut Matematik, Prof. Dr. Fethi Çallıalp, Marmara Üniversitesi, İstanbul, 1999
<b>Kitap C</b>	Soyut Matematik, Hüseyin Irmak, Pegem Akademi, Ankara, 2008
<b>Kitap D</b>	Soyut Matematik 1, Basri Çelik, Dora Yayınları, Bursa, 2010
<b>Kitap E</b>	Introduction to mathematical Structures, Steven Galovich, Academic Press, 1989

Soyut Matematik ders kitapları analiz edilirken, iki ana temel üzerinde analizler şekillenmektedir. Bunlar kitaplardaki tanım ve ispatların nicel ve nitel analizleridir. Nicel analiz, kitaplarda hangi tanım ve ispatlar vardır ve bunların kullanım frekans ve yüzdeleri nedir konusunda bize bilgiler sağlarken, nitel analiz söz konusu tanım ve ispatlama durumlarının niteliği ve bu niteliğin öğrenciye ispatlama konusunda nasıl bilgiler kazandıracığı düşünülmektedir konusunda bilgiler sağlamaktadır. Ayrıca her iki analizde de kitaplar arasındaki benzerlik ve farklılıklar ortaya konularak karşılaştırmalar yapılmıştır.

İspat türlerinin<sup>4</sup> belirlenmesinde Balacheff’in taksonomisi referans alınmıştır. Bu taksonominin ele alınmasında taksonomide yer alan 3 ispat türünün de ispat yapma anlamında önemli bulunmuş olması ve bu ispat türlerinin kitaplarda var olan bütün ispatlama durumlarını kapsayacak düzeyde olması etkili olmuştur. Mantık, kümeler ve fonksiyonlar konularının seçilmesinde ise, öncelikle, kitapların paralel incelenebilmesi anlamında, bu üç konunun bütün kitaplarda bulunması ve daha sonraki çalışmalar adına ispatlama olarak öğrencilerin bu konulara daha hâkim olma olasılıkları etkili olmuştur.

### 3. BULGULAR

İncelenen soyut matematik ders kitaplarına ve kullanılan ispat türlerine mantık, kümeler ve fonksiyonlar açısından bakacak olursak;

<sup>4</sup>Kitaplardaki aksiyom, önerme ve teorem adı altındaki tüm başlıklar bu kategoride değerlendirilmiştir.

## Soyut Matematik Ders Kitaplarındaki İspatların Balacheff'in Taksonomisi Bağlamında İncelenmesi

**Tablo 2.** İncelenen Kitaplarda ki İspatların Türlerine Göre Dağılımı

		Pragmatik		Entellektüel		Demonstrasyon		Toplam İspat	Toplam Teorem
		f	%	f	%	f	%		
<b>Kitap A</b>	Mantık	1	10	9	90	-	-	10	25
	Kümeler	3	15,7	11	57,8	5	26,3	19	36
	Fonksiyonlar	-	-	7	46,6	8	53,3	15	19
	Toplam	4	9	27	61,3	13	29,5	44	80
<b>Kitap B</b>	Mantık	-	-	3	60	2	40	5	9
	Kümeler	5	20	13	52	7	28	25	36
	Fonksiyonlar	-	-	5	50	5	50	10	12
	Toplam	5	12,5	21	52,5	14	35	40	57
<b>Kitap C</b>	Mantık	8	32	16	64	1	4	25	51
	Kümeler	-	-	15	100	-	-	15	50
	Fonksiyonlar	-	-	-	-	-	-	-	1
	Toplam	8	20	31	77,5	1	2,5	40	102
<b>Kitap D</b>	Mantık	-	-	5	100	-	-	5	22
	Kümeler	-	-	27	79,4	7	20,5	34	57
	Fonksiyonlar	1	5,2	15	78,9	3	15,7	19	27
	Toplam	1	1,7	47	81	10	17,2	58	106
<b>Kitap E</b>	Mantık	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kümeler	1	6,6	10	66,6	4	26,6	15	30
	Fonksiyonlar	1	11,1	5	55,5	3	33,3	9	12
	Toplam	2	8,3	15	62,5	7	29,1	24	42

Tablo 2’de analiz edilen kitaplarda mantık, kümeler ve fonksiyonlar konularındaki ispatların Balacheff’in taksonomisine göre frekansları bulunmaktadır. Ele alınan üç konuda en çok ispata yer verenin Kitap D, en az ispata yer verenin ise Kitap E olduğu görülmektedir. Kitap A ile Kitap E aynı yıllarda yazılmış olmalarına rağmen, ispata yer verme bakımından birinci lehine önemli farklılıklar söz konusudur. Daha sonra yayınlanmış olan diğer yerli yayın evlerine ait kitaplar için de aynı şey söz konusudur. Bu durumun kitaplarda yer verilen teorem sayılarıyla ilişkili olduğu söylenebilir.

İspat türleri açısından ders kitapları karşılaştırıldığında, pragmatik ispat türü Kitap A’da %9, Kitap B’de %12,5, Kitap C’de %20, Kitap D’de %1,7 ve Kitap E’de ise %8,3 oranında kullanılmıştır. Diğer ispat türlerine göre ders kitaplarının bu tür ispata daha az yer verdiği görülmektedir. Frekans açısından kitaplar arasında çok büyük olmamakla birlikte bir farklılık söz konusudur. Örneğin Kitap D’de 1 tane pragmatik ispat varken, Kitap C’de 8 tane pragmatik ispat vardır. Konular açısından baktığımızda; Kitap C’de verilen 8 tane pragmatik ispat türünün tamamı Mantık konusunda kullanılırken, Kitap B, Kitap D ve Kitap E’de Mantık konusunda bu ispat türü hiç kullanılmamıştır. Bu durum yazarların tercihleri ile ilgili olabilir. Entellektüel ispat; bütün kitaplarda en yoğun kullanılan ispat türüdür. Kitap A’da %61,3, Kitap B’de %52,5, Kitap C’de %77,5, Kitap D’de %81 ve Kitap E’de %62,5 oranında kullanılmıştır. Bu ispat türünün diğer ispat türleri ile kıyaslandığında daha yoğun kullanılmasının sebebi; daha matematiksel olması ve demonstrasyon ispat türü ile kıyaslandığında daha kolay organize edilebiliyor olması olabilir. Kitaplar arasında kıyasladığımızda en yoğun Kitap D’de en az Kitap

B’de kullanılmıştır. Demonstrasyon ispat türünden; Kitap A’da %29,5, Kitap B’de %35, Kitap C’de %2,5 Kitap D’de %17,2 ve Kitap E’de %29,1 oranında kullanılmıştır. Buna göre, bu tür ispatlara en az yer veren Kitap C iken, en fazla yer veren Kitap B’dir.

Konular açısından genel olarak bakacak olursak; mantık konusunda ispat frekansları göz önüne alındığında herhangi bir ilişki görülmemektedir. Bu durum yazarın kitap kapsamı üzerindeki etkisi ile ilgili olabilir. Kitap E’de mantık konusunda hiç bulunmaması ise yazarın teoremleri ispat (teoremden kasıt teorem, aksiyom ya da önerme) teorem olarak kabul etmemesi ile ilgili olabilir. Çünkü aynı yılda yayımlanmış olan Kitap A’da teorem olarak verilen ifadeler Kitap E’de örnek olarak ele alınmıştır. Kümeler konusunda Türkçe yayın evlerine ait kitapları kendi içinde değerlendirdiğimizde yıllar açısından Kitap C dışında genel anlamda bir artış söz konusudur. Yabancı yayın evine ait kitap olan Kitap E’de Kitap C ile aynı sayıda ispat bulunmaktadır. Türkçe yayın evlerine ait kitaplar ile kıyaslandığında önemli bir farklılık söz konusu değildir. Ancak kendi içinde değerlendirdiğimizde 24 ispat içerisinde 15 ispatın kümeler konusuna ait olması anlamlı bulunmuştur. Bu durum konunun yoğunluğu ile ilişkilendirilebilir. Fonksiyonlar konusunda Kitap C dikkat çekicidir. Kitap C’de 1 teoremin verilmesi ve bunun ispatının da öğrenciye bırakılması ilginçtir. Kitap D ise en fazla ispatın bulunduğu kitaptır. Yıllar açısından baktığımızda Kitap D en son yayınlanan kitaptır.

Mantık konusunda bütün kitaplarda genel olarak entelektüel ispatın kullanıldığı tespit edilmiştir. Kümeler konusu açısından baktığımızda da; aynı ispat türünün ön plana çıktığı görülmektedir. Fonksiyonlar konusu açısından baktığımızda ise, bu konuda entelektüel ve demonstrasyon ispat türlerinin ikisi de yoğun olarak kullanılmıştır. Fonksiyonlar konusunda demonstrasyon ispat türünün ön plana çıkması ilginç bulunmuştur. Bu durumun konunun içeriği ile ilgili olabileceği düşünülmektedir.

**Tablo 3.İncelenen Konular Kapsamında İspatı Verilmemiş Teoremler**

	İspatı Teorem	Verilmemiş		Toplam Teorem
		f	%	
<b>Kitap A</b>	Mantık	15	60	25
	Kümeler	17	47,2	36
	Fonksiyonlar	4	21	19
	Toplam	36	45	80
<b>Kitap B</b>	Mantık	4	44,4	9
	Kümeler	11	30,5	36
	Fonksiyonlar	2	16,6	12
	Toplam	17	29,8	57
<b>Kitap C</b>	Mantık	26	50,9	51
	Kümeler	35	70	50
	Fonksiyonlar	1	100	1
	Toplam	62	60,7	102
<b>Kitap D</b>	Mantık	17	77,2	22
	Kümeler	23	40,3	57
	Fonksiyonlar	8	29,6	27
	Toplam	48	45,2	106
<b>Kitap E</b>	Mantık	-	-	-

## Soyut Matematik Ders Kitaplarındaki İspatların Balacheff'in Taksonomisi Bağlamında İncelenmesi

Kümeler	15	50	30
Fonksiyonlar	3	25	12
Toplam	18	42,8	42

Kitaplarda mevcut olan teoremlerin ispatlarının verilmeme durumuna bakıldığında kitaplar arasında düzenli bir durum söz konusu değildir. Kitaplardaki toplam teoremlerin sayıları ile kıyaslandığında teorem sayıları arttıkça ispatı verilmeyen teorem sayısının arttığı belirlenmiştir, ancak bu açıdan da kitaplar arasında teorem sayısı ile ispatı verilmemiş teorem sayıları arasındaki oranlarda düzgün bir ilişki söz konusu değildir. En düşük oran %29,8 ile Kitap B'de, en yüksek oran %60,7 ile Kitap C'de gözlenmiştir. Kitap A, Kitap D ve Kitap E'deki oranlar birbirine daha yakındır. Bunun nedeni bazı yazarların ispatları öğrencilerden istemesi ile ilgili olabilir. Bazı ispatların öğrencilere bırakılması olumlu olarak değerlendirilebilir; çünkü bu şekilde kitap kullanıcılarının ispat kavramını kullanma becerilerinin geliştirilmesi isteniyor olabilir.

Kitaplarda kullanılan teoremler ve ispat frekansları arasında belirgin farklılıklar söz konusudur. Bu durumun yazarın bakış açısı ile ilgili olabileceği düşünülmektedir. Kitaplarda kümeler konusunda kullanılan ispat sayısının daha fazla olduğu tespit edilmiştir. Bu durumun konunun içeriğinin geniş olması ile ilgili olabilir. Kullanılan ispat türü açısından baktığımızda; mantık ve kümeler konusunda entelektüel ispat türü ön plana çıkmaktadır. Fonksiyonlar konusunda ise entelektüel ve demonstrasyon ispat türünün ön plana çıktığı tespit edilmiştir. Bu durumun fonksiyonlar konusunun içeriği ile ilgili olabileceği düşünülmektedir.

Kitaplarda mevcut olan teorem ve ispat frekanslarına tanım ve alıştırmaya açısından baktığımızda,

**Tablo 4.** İncelenen Konular Kapsamında Tanım Frekansları

	Kitap A	Kitap B	Kitap C	Kitap D	Kitap E
Mantık	8	13	16	12	6
Kümeler	16	17	16	27	13
Fonksiyonlar	13	12	12	16	8
Toplam	37	36	44	55	27
Teorem	80	57	102	106	42
(Tanım/Teorem)	0,4	0,6	0,4	0,5	0,6

Tanım frekansları ve teorem frekansları arasındaki oranlar birbiriyle yakın olarak tespit edilmiştir. Bu durum tanımlar ve teoremler arasında belli bir ilişki olduğunun göstergesi olabilir.

**Tablo 5.** İncelenen Konular Kapsamındaki Alıştırma Frekansları

	Kitap A	Kitap B	Kitap C	Kitap D	Kitap E
Mantık	15	22	49	37	31
Kümeler	17	33	14	44	31
Fonksiyonlar	26	34	30	32	43
Toplam	58	89	93	111	105
Teorem	80	57	102	106	42
(Alıştırma/Teorem)	0,7	1,5	0,9	1	2,5



Alıştırma frekansları ve teorem frekansları arasında belirgin bir ilişki mevcut değildir. Alıştırma sayısının daha çok yazarın isteği ile ilgili olabileceği düşünülmektedir. Çünkü kitaplar arasında da bu konuda bir paralellik gözlemlenmemiştir.

#### **4. SONUÇ ve TARTIŞMA**

Bu araştırma sonucunda elde edilen verilere baktığımızda; kitaplarda kullanılan teorem ve ispat frekansları arasında belirgin farklılıklar bulunmuştur. Bunun nedeninin yazarların bakış açısı ve tercihleri ile ilgili olabileceği düşünülmektedir. Kitaplarda genel anlamda kümeler konusunda kullanılan ispat sayısının daha fazla olması da bu kavramın içeriğinin diğer kavramlara göre daha geniş olmasından kaynaklanabilir.

Kullanılan ispat türü açısından baktığımızda; mantık ve kümeler konusunda entelektüel ispat türü ön plana çıkarken, fonksiyonlar konusunda ise entelektüel ve demonstrasyon ispat türünün daha fazla kullanıldığı görülmektedir. Fonksiyonların kümeleri ve farklı işlemleri de kapsamı açısından demonstrasyon ispat yapmaya daha uygun olabilmesi sebebiyle böyle bir sonucu doğurduğu düşünülmektedir.

Kitaplar açısından baktığımızda Balacheff'in (1988) en alt seviye ispat olarak nitelendirdiği Pragmatik ispat türü Kitap C'de en yoğun kullanılmıştır. Orta seviye olarak nitelendirilen Entellektüel ispat türü bütün kitaplarda yoğun olmakla birlikte en yoğun Kitap D'de bulunmaktadır. Balacheff'in en üst seviye ispat türü olarak nitelendirdiği demonstrasyon ispatın en çok kullanıldığı kitap Kitap B'dir. Kitap C'de ise sadece 1 tane kullanılmıştır. Buda mantık konusundadır. Kitap A ve Kitap B'de ise daha çok kümeler ve fonksiyonlar konusunda kullanılmıştır. Balacheff'in (1988) taksonomisi anlamında değerlendirdiğimizde Kitap B ve Kitap D entelektüel ispat ve demonstrasyon ispat türünü diğer kitaplara göre daha fazla kullanmaları anlamında daha etkili bulunmuştur. Bu kitapların kullanımının öğrencilerin prosedürel ispat yapabilmeleri ve ispatı tümevarımsal olarak oluşturabilmeleri açısından diğer kitaplara göre daha etkili olabileceği düşünülmektedir.

Özer ve Arıkan'ın (2002) tespitine göre öğrencilerin büyük bir çoğunluğu pragmatik ispat türünü kullanmaktadırlar, ancak kitaplarda pragmatik ispat türü en az kullanılan ispat türü olarak tespit edilmiştir. Bunun nedeni pragmatik ispat türünün Balacheff'e (1988) göre en alt seviyede bulunan ispat türü olması ve yazarların bu ispat türünü daha az kullanma istekleri olabilir. Diğer bir önemli nedenin ise ele alınan konu olduğu düşünülmektedir. Entelektüel ispat türü ise kitaplarda en yoğun kullanılan ispat türü olmasına karşın Özer ve Arıkan'ın (2002) çalışmasında öğrenciler ancak harf kullanımına yönlendirildiklerinde bunu gerçekleştirebilmişlerdir. Demonstrasyon ispat türü ise pragmatik ispattan daha fazla sayıda entelektüel ispattan daha az sayıda olmakla birlikte bu araştırmanın verilerine göre kitaplarda kullanılan bir ispat türüdür. Balacheff (1988) bu ispat türünü en üst düzey ispat türü olarak ifade etmiştir. Özer ve Arıkan'ın (2002) çalışmalarında bazı öğrenciler tümevarımsal yöntemi kullanarak bu ispat türünü yaptıklarını belirtmişlerdir. Bunun nedeninin bu ispat türünün daha çok tümevarımsal düşünme ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Kitaplarda en yoğun kullanılan ispat türünün entelektüel ispat olmasına karşın Özer ve Arıkan'ın (2002) çalışmasına göre öğrencilerde gözlemlenmemesi öğrencilerin lise düzeyinde olması ile ilişkilendirilebilir, çünkü Taştepe (2012) çalışmasının devamında Özer ve Arıkan'ın (2002) çalışmasının aksine öğrencilerin kullandıkları ve tercih ettikleri ispat türünü entellektüel ispat olarak belirlemiştir.

## Soyut Matematik Ders Kitaplarındaki İspatların Balacheff'in Taksonomisi Bağlamında İncelenmesi

Bu durum üniversite ders kitaplarının öğrenciler üzerindeki ispat türleri açısından etkisinin önemli bir göstergesidir.

Yerli kitaplar yayınlanma yılları açısından kıyaslandığında; verilen teoremlerin ispatlarının öğrenciye bırakılma frekanslarında düzenli olmamakla birlikte bir artış olduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde yabancı kitapta da mevcut teoremlerin önemli bir bölümünün ispatı öğrenciye bırakılmıştır. Bazı ispatların öğrencilere bırakılması olumlu olarak değerlendirilebilir çünkü bu şekilde kitap kullanıcılarının ispat yapma yeteneklerinin geliştirilmesi hedeflenmiş olabilir.

Diğer bir ilginç bulgu ise; bazı kitaplarda teorem ya da önerme olarak verilen ifadelerin bazı kitaplarda örnek olarak gösterilmiş olmasıdır. Bu durumun kitapların yayın yılıyla bir ilişkisi bulunmamıştır. Bu çalışma kapsamında bu durumun tek nedeninin yazarların isteğiyle ilgili olabileceği düşünülmektedir; ancak bu bulguda ayrıca bir araştırma konusu olabilir.

Matematik öğretimini ders kitaplarının nasıl etkilediğini inceleyen çalışmalar genel anlamda, ders kitaplarının pek çok sınıf düzeyindeki öğrencilerin matematiği öğrenebilmelerinde hissedilebilir bir etkiye sahip olduğunu göstermektedir (Stylianides, 2009). Bu bağlamda mevcut araştırmayla ortaya konulan sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi için, analiz edilen ders kitaplarının öğrencilerin öğrenmeleri üzerinde nasıl bir etkisi olduğu yapılacak olan deneysel araştırmalarla incelenebilir.

### KAYNAKÇA

- BALACHEFF, N. ( 1988 ). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, *in D. Pimm (ed ) Mathematics, Teachers and Children, Hodder&Stoughton, London, 216-235.*
- BAŞTÜRK, S. (2010). First - year secondary school mathematics students' conceptions of mathematical proofs and proving, *Educational Studies, 36(3), 283-298.*
- BREMLER, N. (2003), Mattemboken som redskapoch aktör. *En studie av hur derivataintroduceras i svenskaläroböcker 1967-2002, Licentiatethesis. Lärarhögskolan i Stockholm.*
- ÇALLIALP, F. (1999). *Örneklerle soyut matematik.* İstanbul: Marmara Üniversitesi.
- ÇELİK, B. (2010). *Soyut matematik 1.* Bursa: Dora Yayıncılık.
- DELİCE, A., AYDIN, E., ve KARDEŞ, D. (2009). Öğretmen adayı gözüyle matematik ders kitaplarında görsel öğelerin kullanımı. *İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 16(2), 75-92.*
- GALOVICH, (1989). *Introduction to mathematical Structures,* Academic Press.
- GRENİER, D. (2000). 'Learning prof and modelling. Inventory of teaching practice and new problems', *A paper presented at topic study group on Proof and Proving in Mathematics Education, ICME 9, TOKYO.*
- HANNA, G. and DE BRUYN, Y. (1999). Opportunity to learn proof in Ontario grade twelve mathematics texts. *Ontario Mathematics Gazette, 37(4), 23-29.*
- HEİNZE, A. and REİSS, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of prof competence. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.*
- IRMAK, H. (2008). *Soyut matematik.* Ankara: Pegem Akademi.

- KARAKAYA, İ. (2011). *Dokuzuncu sınıf matematik ders kitaplarındaki fonksiyon kavramıyla ilgili görsel objelerin incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- KARASAR, N. (1999). *Bilimsel araştırma yöntemi*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- ÇOKER, D., ÖZER, O., TAŞ, K. (1989). *Soyut matematik*. (1. Baskı). Malatya: İnönü Üniversitesi Yayınevi.
- ÖZER, Ö. ve ARIKAN, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 16-18 Eylül Ankara, Bildiriler Kitabı, II, 1083-1089*.
- RAMAN, M. (2003). Keyideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52*, 319–325.
- STYLİANİDES, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 258–288.
- TAŞTEPE, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- WEBER, K. and ALCOCK, L.J. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics, 56(3)*, 209-234.
- YILDIRIM, A., ve ŞİMŞEK, H. (2003). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.