INESJOURNAL
ULUSLARARASI EĞİTİM BİLİMLERİ DERGİSİ
THE JOURNAL OF INTERNATIONAL EDUCATION SCIENCE

Yıl: 2, Sayı: 2, Mart 2015, s. 84-95

Ahmet DOĞAN[1], Dağıstan ŞİMŞEK[2]

İKİ KATLI İNTEGRAL KONUSUNDA LİSANS ÖĞRENCİLERİNİN YANILGILARI, ÖĞRENME GÜÇLÜKLERİ VE ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

Özet

Bu çalışmanın amacı; üniversite öğrencilerinin iki katlı integral konusundaki yanılgıları ile öğrenme güçlüklerini belirlemektir. Nitel araştırma yöntemi olan öğrenim deneyinin kullanıldığı bu araştırmada bilgi toplama grubunu; Manas Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Uygulamalı Matematik bölümlerinde okuyan 27 tane 2. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Bu araştırmada, kalıcı öğrenmede grafik kullanımının etkisi, öğrenim deneyi sürecinde katılımcıların grafik kullanma tercihlerindeki gelişme incelenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin en çok dikkat çeken yanılgıları; integrasyon bölgesinin daima basit dikdörtgen bölge olacağı yanılgısı ile dx.dy = du.dv yanılgısı olarak belirlenmiştir. İki katlı integral işlemlerinde integral bölgesinin matematik cümlesi olarak yazılışında, integral bölgesinin grafiğinin çiziminde, basit düşey bölge ile basit yatay bölge yazılışlarında zorlandıkları, daha çok analitik yolla çözüm yapmaya çalıştıkları ve grafik kullanmada isteksiz davrandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin kavram bilgisindeki eksiklikler giderilip grafik çizimi ile ilgili deneyimleri arttırıldığında görsel strateji eğilimlerinin de arttığı gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki Katlı İntegral, Grafik Metodu, Yanılgı

UNDERGRADUATE STUDENTS' MISCONCEPTIONS, LEARNING DIFFICULTIES AND SOLUTIONS SUGGESTIONS IN DOUBLE INTEGRALS

Abstract

The aim of this study is to determine the misconceptions and learning difficulties in double integral of the university students. The information gathering groups for qualitative research methods was selected of the second year 27 students of the Department of Mathematics and the Department of Applied Mathematics and Informatics, Faculty of Science at the Manas University. The influence of the use of the graphics and the devolepment in the preference of the use of graphics in learning processes were analyzed. At the result of this study, it was observed that the important misconception of the thought of the region of integral is the simple rectangular region. In addition the misconception of dx.dy = du.dv is also observed. In double integral processes, the region of integral as mathematical sentence, the drawing of graphics in integral region, the difficulties of simple vercital regions and simple horizontal region. It was also observed that students have some preferences in using analytical method and difficulties in the

[1] Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ahmet.dogan@manas.edu.kg
[2] Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Fakültesi, Uygulamalı Matematik ve Enformatik Bölümü, Selçuk Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi Endüstri Mühendisliği Bölümü, dagistan.simsek@manas.edu.kg,

use of graphical methods. When the lack of information in mathematical concepts is removed, the experience of graphical drawing is accumulated, the trends in visual strategies is also accumulated.

Keywords: Double Integral, Graphic Method, Misconception

1. GİRİŞ

Geçmişi Antik çağlara kadar uzanan ve analitik düşünme becerilerinin geliştirilmesinde önemli bir geçiş kapısı olan analiz, matematiğin temel taşlarından biridir. Matematik öğretiminde önemli bir yeri olan analiz dersinin içeriği incelendiğinde, çok fazla görsel öge içerdiği ve kavramların iyi anlaşılabilmesi için görselleştirmeye çok fazla ihtiyacımız olduğu görülmektedir. Zimmerman (1991), Limit, Türev, İntegral gibi analizin temel kavramlarını anlamada görselleştirmenin önemli ve birçok problemi başarıyla çözebilmenin görsel imajlara (Grafikler, Diyagramlar, Tablolar gibi) bağlı olduğunu belirt~~il~~mektedir (akt. George, 1997). Zimmerman'a (1991) göre, analizde görsel düşünmenin ilk şartı, grafiklerdeki önemli özellikleri belirlemek, cebir ve geometrinin de matematiksel düşünceleri anlamada alternatif diller olduğunu bilmektir (akt. George, 1997). Oberg (2000) yaptığı bir araştırmada; öğrencilerin integralle ilgili problemlerin çözümünde sonuca gidemedikleri zaman, geometrik yardım almaya isteksiz olduklarını, cebirsel olarak verilen bir belirli integralin çözümünde algoritmaları kullanmayı tercih ettiklerini, grafik veya geometrik metotları denemek istemediklerini gözlemlemiştir.

Matematik eğitimcileri; öğretmenlerin, matematik kavramları doğru bilmelerinin yanında, bu bilgileri öğrencilere nasıl aktarmaları gerektiğini ve kalıcı öğrenme ortamının nasıl oluşturulacağını da bilmelerinin önemini vurgulamaktadırlar (NCTM, 2000). Bu amaçla öğrencinin matematik başarısının artırılmasını sağlayacak şekilde kullanılabilecek, örnek öğrenme ortamının oluşturulması gerekir. Yapılacak olan çeşitli araştırmalar ile, matematik konularında öğrencilerin hangi yanılgılara sahip olduklarının belirlenmesi öğretmenler açısından önemlidir. Öğretmen; sınıfta konu işlenirken kavramları öğrenmenin nasıl sağlanacağını, öğrencilerin yanlış algılamalarını ve yanlış kavram imajı *(Bir kavramın zihinde kodlanışı)*geliştirmelerini nasıl engelleyebileceğini iyi bilmelidir. Öğrencilerin hata yaptıkları noktada, öğretmenler uzmanca yaklaşım gösterebilecek bilgilerle donanımlı olmalıdır. İki katli integral konusunda yapılan bu çalışmanın, matematik öğretimine önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

Yanılgı; bireyin yanlış inanışları ve deneyimleri sonucu ortaya çıkan davranışlar olup doğru olduğu sanılan yanlış bilgilerdir (Doğan, 2001). Bingölbali ve Özmantar (2009), yanılgıyı; sistematik bir şekilde hata üreten öğrenci davranışı olarak tanımlamışlardır. Görselleştirmeyi; problemle ilgili şekil ve şema çizerek somutlaştırmak olarak düşünebileceğimiz gibi, soyut kavramların geometrik yapılarla ifadesi olarak da tanımlayabiliriz. Literatürde görselleştirme, öğrencinin ilgi ve dikkatini çekerek duygusal tepki vermesini sağlayan şekiller, grafikler ve haritalar yardımı ile soyut kavramları somutlaştırıp öğrenmeyi kolaylaştırmak olarak tanımlanmaktadır. Bilginin çok hızlı bir değişim gösterdiği günümüzde, teknolojik gelişmelere bağlı olarak, öğrenme ile ilgili yeni metotlar geliştirmek ve arındırılmış bilgilerin (*Yanılgılardan ve yanlışlardan temizlenmiş bilgi*) öğretimini kolay kılacak olan görsel stratejilerin kullanımına önem vermek gerekir.

İki katlı integrallerin öğretimi, belirli integralin iyi anlaşılmasına bağlı olarak gelişir. Belirli integralin temelinde yatan kavramların öğretiminde, eğri altında kalan alan kavramı etkili bir araç olarak kullanılabilir (Sealey, 2006). İki katlı integral kavramı, matematiğin birçok kavramı gibi üst düzey bilişsel etkinlik gerektiren soyut bir kavramdır. Soyut kavramların öğretiminde görselleştirme etkili bir yöntemdir (Stylianou, 2002).

Bu çalışma ile; öğrencilerin, iki katlı integral konusundaki yanılgılarını ve öğrenim deneyi sürecinde görsel stratejilerindeki değişimi belirlemek amaçlanmıştır.

2. YÖNTEM

2.1. Araştırma Modeli

İki katlı integral konusunda, Fen Fakültesi Matematik ve Uygulamalı Matematik Bölümü 2. sınıf öğrencilerinin sahip oldukları yanılgıları ve öğrenme güçlüklerini tespit etmeye yönelik bu çalışmada; nitel araştırma yöntemi olan *Öğrenim Deneyi*(öğrencilerin matematik bilgilerini çeşitli yollarla ve araçlarla anlamak ve keşfetmek için uygulanan canlı bir yöntem) ve *Betimsel Tarama Modeli* kullanılmıştır. Betimsel Tarama Modeli, verilen bir durumu olabildiğince tam ve dikkatli bir şekilde tanımlar (Büyüköztürk ve ark., 2009). Karasar (2010) tarafından ise Tarama Modeli, geçmişte ya da halen var olan bir durumu ortaya çıkarmayı amaçlayan çalışma olarak tanımlanır.

2.2. Evren ve Örneklem

Çalışmanın evrenini, Kırgızistan'ın Bişkek şehrindeki üniversitelerin fen fakültelerinin matematik bölümlerinde okuyan 2. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Çalışmanın örneklemini ise Manas Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Uygulamalı Matematik bölümlerinde okuyan 27 tane 2. sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Veri Toplama Grubunun seçiminde, '*Amaçlı Örneklem Seçimi*' yöntemi kullanılmıştır.

2.3. Veri Toplama Aracı

Üç hafta süreyle (- 12 ders saati-) iki katlı integral konusu sınıfta işlenmiş ve öğrenim deneyi sürecinde katılımcılarda oluşan değişiklikler gözlenip not edilmiştir. Konunun işlenişi bittikten sonra, ara vermeden, iki katlı integral ile ilgili ve açık uçlu, yedi soruyu öğrencilerin cevaplandırması istenmiştir. Öğrencilerin grafik çizimi konusundaki yeterliliklerini ve görsel düşünme stratejilerini belirlemek için, her soruda grafik çizmeleri de istenmiştir. Araştırmanın verileri; öğrenim deneyi sürecinde araştırmacının yazdığı gözlem notları ile açık uçlu olarak sorulan yedi adet matematik sorusuna öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilmiştir.

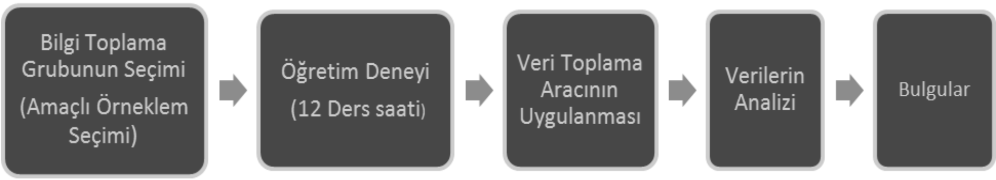
2.4. Verilerin Analizi

Öğrencilerin, veri toplama aracı olarak kullanılan matematik sorularına verdikleri cevaplar incelendi. Öğrenim deneyi sürecinde öğrencilerde görülen değişikliklerle ilgili olarak araştırmacının tuttuğu notlar da dikkate alınarak öğrencilerin yanılgıları belirlendi ve görsel strateji tercihleri hakkında tespitler yapıldı. İki katlı integral ile ilgili olarak öğrencilerin hatalarını, öğrenme güçlüklerini ve yanılgılarını belirlemek amacı ile yapılan bu çalışmada verilerin analizi frekans ve yüzdeler kullanılarak yapılmıştır. Öğrencilerin, matematik sınavındaki sorulara verdikleri cevaplar Tablo 1'deki kategorilere göre analiz edilmiştir.

Tablo 1: Değerlendirme Kategorileri

Boş	Cevap verilmemiş olan sorular
Yanlış Çözüm	Çözüm yolu yanlış olan sorular
Eksik Çözüm	Tam çözülememiş olan sorular
Doğru Çözüm	Çözüm yolu ve sonucu doğru olan sorular

Çalışmanın akım şeması aşağıda verilmiştir.



3.BULGULAR VE YORUM

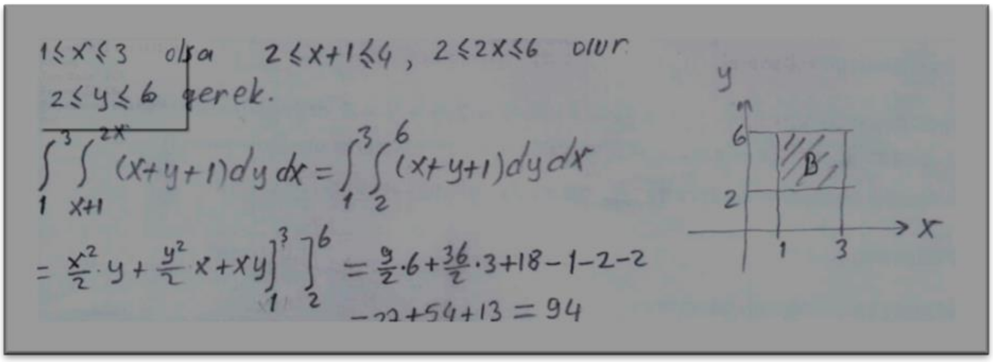
Bu bölümde; öğrencilerin, matematik sınavındaki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular ve araştırmacının öğrenim deneyi sürecinde yazdığı notlar yorumlanmıştır. Matematik sınavı ile ilgili öğrenci cevaplarının frekans ve yüzde dağılımları Tablo 2'de verilmiş, frekans değerleri F ile gösterilmiştir. Öğrencilerin matematik sorularına verdikleri cevaplardan, dikkat çekici olan bazı yanlış çözümler de bu bölümde verilmiştir.

Tablo 2: Matematik Testi Öğrenci Cevaplarının Frekans Ve Yüzde Dağılımları

Soru	Boş		Yanlış Çözüm		Eksik Çözüm		Doğru Çözüm		Toplam
	F	%	F	%	F	%	F	%	
1	0	0	10	37.03	5	18.52	12	44.44	27
2	0	0	7	25,92	5	18,52	15	55,56	27
3	2	7.4	12	44,44	9	33.33	4	14.81	27
4	1	3.7	8	29.26	11	40.74	7	25.92	27
5	2	7.4	7	25.92	10	37.03	8	29.26	27
6	1	3.7	5	18.52	8	29.26	13	48.15	27
7	1	3.7	3	11.11	11	40.74	12	44.44	27

1. Soru : $\iint_B (x+y+1)dx\,dy$ **işlemini yapınız.** $B=\{(x,y): 1 \le x \le 3\ ,\ x+1 \le y \le 2x\}$ **olarak verilen integrasyon bölgesini grafik ile gösteriniz.**

Bu soruyu öğrencilerin %44.44'ü (12 öğrenci) doğru çözdüğü halde, %18.52' si (5 öğrenci) eksik çözmüştür. Yanlış çözen öğrenciler %37.03 (10 öğrenci) dir. 1 tanesi eksik çözüm yapan, 5 tanesi de doğru çözüm yapan öğrencilerden olmak üzere, sadece 6 öğrenci (%22.22) integrasyon bölgesini grafik ile göstermiştir. Ders işleme sürecinde de öğrencilerin genellikle, grafik çizmekten kaçındıkları gözlenmiştir. Sorunun yanlış çözümlerinden biri Şekil 1'de verilmiştir.



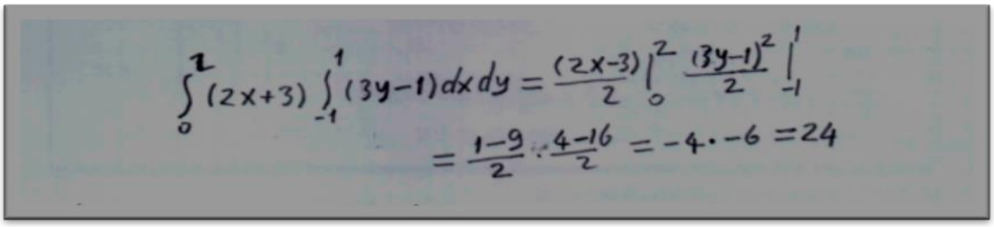
Şekil 1: 1. Sorunun Yanlış Çözümlerinden Alıntı

88

Şekil 1'deki çözümü yapan öğrenci, değişkene bağlı sınırları da sabit değerlere dönüştürüp basit dikdörtgen bölge oluşturmaktadır. Bu öğrenci, iki katlı integral çözümünün, sadece basit dikdörtgen bölgede yapılabileceği düşüncesinde olabilir. Diğer yandan, her iki değişkene göre aynı anda integral alarak işlem yapmıştır. Bu çözümü yapan öğrenci; önce değişkene bağlı sınırları olan integral işleminin yapılması gerektiğini, sonra da sabit sınırlı integral işleminin yapılacağını kavramamıştır.

2. Soru: : $\int_0^2 \int_{-1}^1 (x+3).(y-1)dydx$ $\int_0^2 \int_{-1}^1 (2x+3).(3y-1)dy\,dx$ **işlemini yapınız. İntegrasyon bölgesini yazarak grafikte gösteriniz.**

Bu soruyu öğrencilerin %77.78'i (21 öğrenci) doğru çözmüştür. %14.81 i (4 öğrenci) eksik çözüm yapmış, %7.4'ü (2 öğrenci) yanlış çözüm yapmıştır. Öğrencilerin hiçbiri integrasyon bölgesinin grafiğini çizmemiştir. Algoritmaya bağlı işlemleri daha kolay yaptıkları görülmektedir.

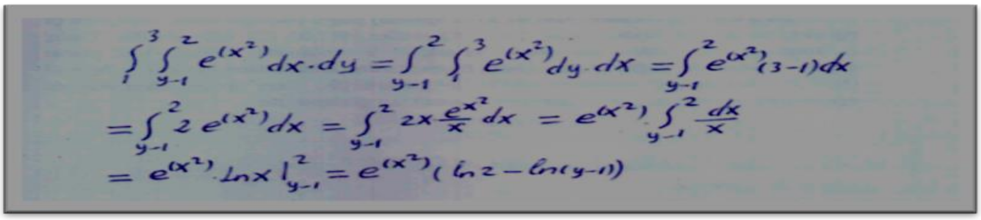


Şekil 2: 2. Sorunun Yanlış Çözümlerinden Alıntı

Şekil 2'deki çözümü yapan öğrenci basit integral ile ilgili yanılgısı (*çarpımın integralini integrallerin çarpımı olarak yazma yanılgısı*) nedeniyle yanlış çözüm yapmıştır. Aynı zamanda işlem hataları da dikkat çekicidir. Burada $\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}|_a^b$ eşitliğindeki yanlış algılama sonucu, aşırı genelleme yapılmış ve $\int_a^b (x+k)^n dx = \frac{(x+k)^{n+1}}{n+1}|_a^b$ $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$ $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$ eşitliği kullanılmıştır. Ders işleme sürecinde bazı öğrencilerin bu yanlış eşitliği kullanmada ısrarcı oldukları gözlenmiştir. Aslında, iki katlı integralin çözümüne yönelik düşüncesi doğrudur. Bu durum gösteriyor ki, ön öğrenmelerdeki eksiklikler ve yanılgılar, sonraki öğrenmeleri zorlaştırıyor.

3. Soru: $\int_{y=1}^{3}\int_{x=y-1}^{2} e^{(x^2)} dx\, dy$ işlemini yapınız. İntegrasyon bölgesini grafikle belirtiniz.

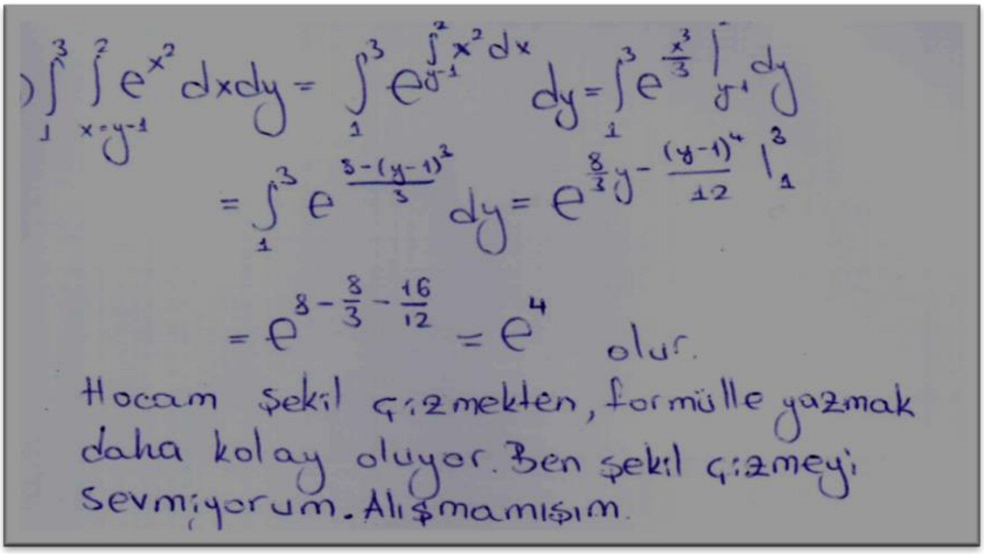
Bu soruyu öğrencilerin sadece %14.81’i (4 öğrenci) doğru çözebilmiştir. %33.33’ü (9 öğrenci) eksik çözmüş, %44.44’ü (12 öğrenci) yanlış çözmüş, %7.4’ü (2 öğrenci) boş bırakmıştır. İntegrasyon bölgesinin grafiğini sadece soruyu doğru çözen 4 öğrenci çizmiştir. Grafik çizerek görselleştirmenin, sorunun çözümünde önemli olduğu görülmektedir. Şekil 3 ve Şekil 4 de, sorunun yanlış çözümlerinden iki ayrı örnek verilmiştir.


$$\int_1^3\int_{y-1}^2 e^{(x^2)} dx\cdot dy = \int_{y-1}^2\int_1^3 e^{(x^2)} dy\cdot dx = \int_{y-1}^2 e^{(x^2)}(3-1)dx$$
$$= \int_{y-1}^2 2\, e^{(x^2)} dx = \int_{y-1}^2 2x\frac{e^{x^2}}{x} dx = e^{(x^2)}\int_{y-1}^2 \frac{dx}{x}$$
$$= e^{(x^2)} \ln x\,|_{y-1}^2 = e^{(x^2)}(\ln 2 - \ln(y-1))$$

Şekil 3: 3. Sorunun Yanlış Çözümlerinden Birinci Alıntı

Şekil 3'deki çözümü yapan öğrenci; integral içindeki ifadeyi, değişkene bağlı bir ifade ile çarpıp bölerek işlem yapmıştır. Bu çözümde öğrenci hem ikinci çözümdeki yanılgıyı (*çarpımın integralini integrallerin çarpımı olarak yazmak*) yapmış, hem de integral içindeki bir ifadeyi değişkene bağlı olduğu halde integralin dışına çıkarmıştır. Böylece; integral içindeki sabit çarpanı integral dışına çıkarma düşüncesinde aşırı genelleme yapmış, değişkene bağlı bir ifadeyi de integral dışına çıkarabileceğini düşünerek bir yanılgı üretmiştir. Bu öğrenci, basit yatay bölgeyi, basit düşey bölge olarak yazmayı düşünememiş olabilir. Bölgenin grafiği için doğru çözüm planını oluşturamamıştır. İntegralin verilişindeki diferansiyel sırasına göre çözüm yapmak zorunda olduğunu düşünüyor.

INESJOURNAL
Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi / The Journal of International Education Science
Yıl: 2, Sayı: 2, Mart 2015, s. 84-95

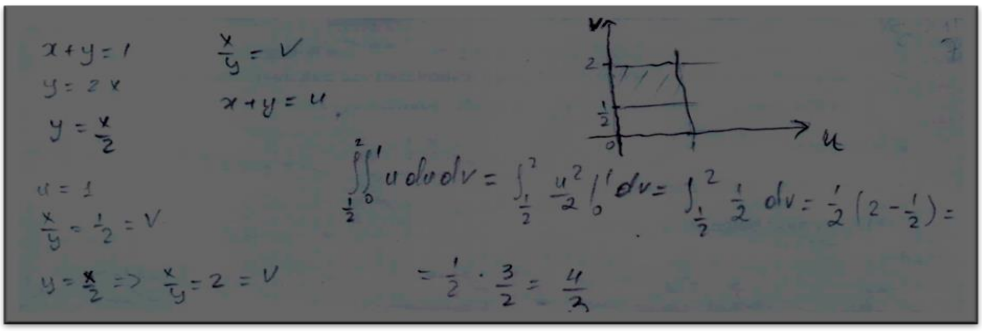


Şekil 4: 3. Sorunun Yanlış Çözümlerinden İkinci Alıntı

Şekil 4'deki çözümü yapan öğrenci, $\int A^{f(x)}dx = A^{\int f(x)dx}$ yanılgısına sahiptir. Yanlış çözüm yapan bazı öğrenciler de $\int A^{f(x)}dx = \frac{A^{f(x)}}{f'(x)}$ yanılgısına sahiptir. Bu öğrencilerin, ders işleme sürecinde de bu yanlış eşitlikleri kullanmada ısrarlı oldukları gözlenmiştir.

4. Soru: $\boldsymbol{x + y = 1}$ **,** $\boldsymbol{y = 2x}$ **,** $\boldsymbol{y = \frac{x}{2}}$ **doğruları ile sınırlı B bölgesinde** $\boldsymbol{x + y = u}$ **,** $\boldsymbol{\frac{x}{y} = v}$ **dönüşümlerini kullanarak** $\boldsymbol{\iint_B (x + y)dx\,dy}$ **işlemini yapınız.**

Bu soruyu öğrencilerin %25.92'si (7 öğrenci) doğru çözmüştür. Öğrencilerin %40.74'ü (11 öğrenci) eksik çözmüş, %29.26'sı (8 öğrenci) yanlış çözmüş, %3.7'si (1 öğrenci) boş bırakmıştır. Sorunun yanlış çözümlerinden biri Şekil 5 de verilmiştir.

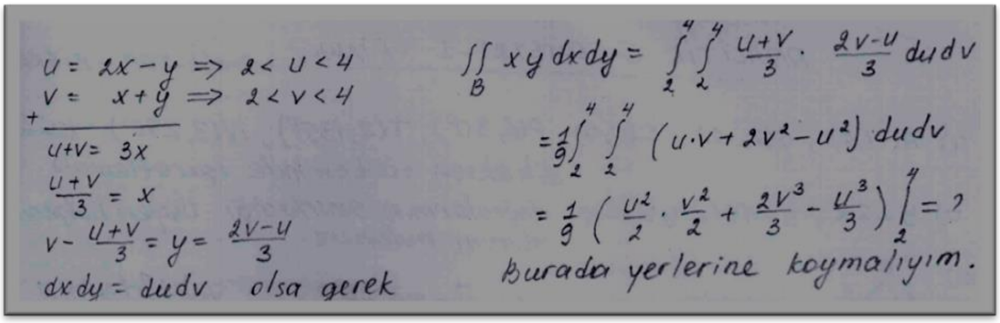


Şekil 5: 4. Sorunun Yanlış Çözümlerinden Alıntı

Şekil 5'deki çözümü yapan öğrenciler, $dx \cdot dy = du \cdot dv$ yanılgısına sahiptirler. Jakobien bulunuşunu ve bölge dönüşmelerini kavrayamamışlar. Bu tür soruların çözümünde öğrencilerin, ders işleme sürecinde de zorlandıkları ve bu yanlış eşitliği kullanmada ısrar ettikleri tespit edilmiştir. Bu bölüm işlenirken, kolaydan zora doğru, çok miktarda problem çözümü ile öğrenme güçlüklerinin aşılabildiği gözlenmiştir.

5. Soru: **xy-düzleminde** $y = 2x - 2, y = 2x - 4, x + y = 2, x + y = 4$ **doğrularının sınırladığı B bölgesini;** $u = 2x - y$ *ve* $v = x + y$ **dönüşümlerini yaparak uv-düzleminde D bölgesine dönüştürünüz. Sonra da** $\iint_B xy\, dx\, dy$ **işlemini yapınız.**

Bu soruyu öğrencilerin % 29.26’sı (8 öğrenci) doğru çözmüştür. Öğrencilerin %37.03’ü (10 öğrenci) eksik çözmüş, %25.92’si (7 öğrenci) yanlış çözmüş, %7.4’ü (2 öğrenci) boş bırakmıştır. Öğrencilerden sadece 12 tanesi integral bölgesinin grafiğini doğru çizmiştir. Şekil 6 da yanlış çözümlerden biri verilmiştir.



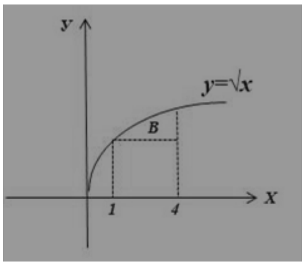
Şekil 6: 5. Sorunun Yanlış Çözümlerinden Alıntı

Şekil 6'daki çözümü yapan öğrenciler, xy-sisteminde verilen integrasyon bölgesini, yeni değişkenlerin oluşturduğu uv-sistemine aktarmakta zorlanıyorlar. *dxdy=|j|dudv* eşitliğindeki Jakobien (j) değerini sadece 8 öğrenci doğru bulabilmiştir. Diğer öğrenciler ya bilmiyorlar ya da *dxdy=dudv* yanılgısına sahipler. Ayrıca; x ve y değişkenlerinin yerlerine, u ve v türünden karşılıklarının konulmasının yeterli olacağını düşünmektedirler.

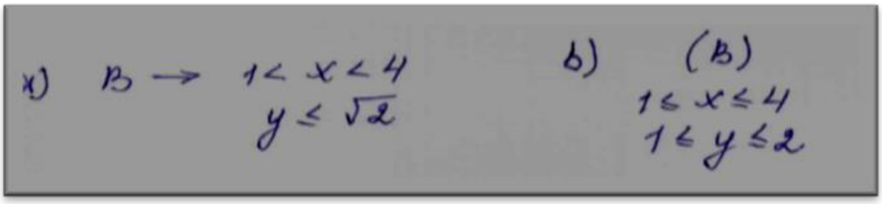
6. Soru: B bölgesini;

a) Düşey basit bölge olarak yazınız.

b) Yatay basit bölge olarak yazınız.



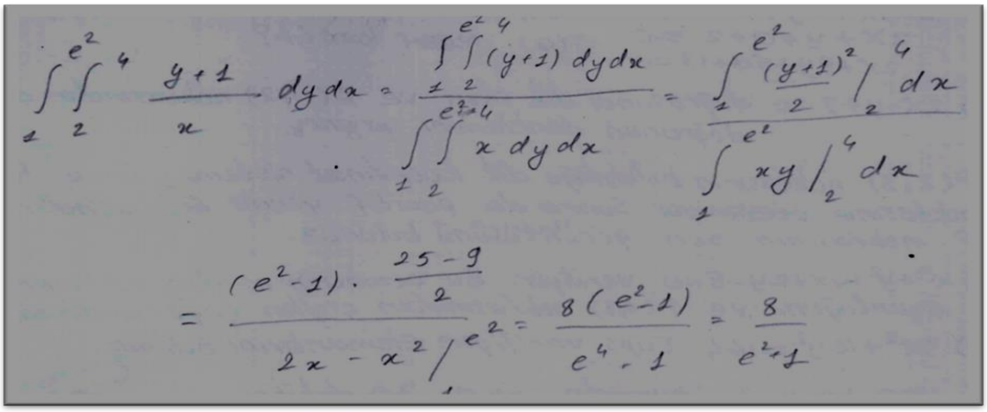
Bu soruyu öğrencilerin %48.15’i (13 öğrenci) doğru cevaplamıştır. Öğrencilerin %29.26’sı (8 öğrenci) eksik çözmüş, %18.52’si (5 öğrenci) yanlış çözmüş, %3.7’si (1 öğrenci) boş bırakmıştır. Verilen grafiği okumayı bilmeyen öğrenciler, grafik olarak verilmiş bölgenin matematik cümlesini yazamıyorlar. Grafiklerle ilgili bilgi eksiklikleri, düşey ve yatay basit bölgeleri yanlış yazmalarına sebep oluyor. Doğru çözüm yapanlarla eksik çözüm yapanlar dikkate alındığında, bu tür soruların çözümünde öğrencilerin başarılı oldukları söylenebilir. Eksik çözüm yapan öğrencilerin, ders işleme sürecinde, araştırmacının yol göstermesi ile doğru sonuca ulaşabildikleri görülmüştür.



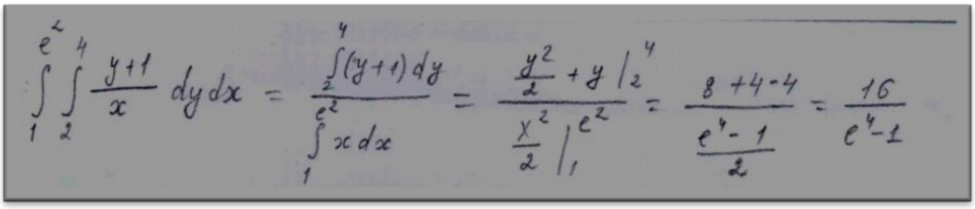
Şekil 7: 6. Sorunun Yanlış Çözümlerinden Alıntı

7. Soru: $\int_1^{e^2}\int_2^4 \frac{y+1}{x}$ **dx işlemini yapınız.**

Bu soruyu öğrencilerin %44.44'ü (12 öğrenci) doğru çözmüştür. Öğrencilerin % 40.74'ü (11 öğrenci) eksik çözmüş, %11.11'i (3 öğrenci) yanlış çözmüş, %3.7'si (1 öğrenci) boş bırakmıştır. Yanlış iki çözüm aşağıda verilmiştir.



Şekil 8: 7. Sorunun Yanlış Çözümlerinden Birinci Alıntı



Şekil 9: 7. Sorunun Yanlış Çözümlerinden İkinci Alıntı

Yukarıdaki yanlış çözüm alıntılarında görüldüğü gibi öğrenciler, basit integrallerle ilgili yanılgılarından kaynaklanan yanlış çözümler yapabiliyorlar. $\int_a^b\int_c^d \frac{f(x)}{g(y)}\,dxdy = \frac{\int_a^b\int_c^d f(x)dx}{\int_a^b\int_c^d g(y)dy}$ ve $\int_a^b\int_c^d \frac{f(x)}{g(y)}\,dxdy = \frac{\int_c^d f(x)dx}{\int_a^b g(y)dy}$ yanılgıları görülmektedir.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; Fen Fakültesi Matematik ve Uygulamalı Matematik bölümünün 2. sınıflarında okuyan öğrencilerin, iki katlı integral konusundaki yanılgılarının ve diğer öğrenme güçlüklerinin belirlenmesine çalışılmıştır. Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin büyük çoğunluğu, kuralları ezberleyerek, bu kurallara dayalı semboller üzerinde anlamını bilmeden işlem yapma yolunu seçiyor. Bu süreç hem öğrenmeyi zorlaştırmakta hem de kalıcı öğrenmeyi engellemektedir. Çünkü kontrol edilemeyen kuralları hatırlamanın, kavramsal yapıları öğrenmekten daha zor olduğunu biliyoruz.

Öğrenciler, kavramsal bilgi ile işlemsel bilgi arasındaki ilişkiyi kuramıyorlar. Öğrencilerin büyük çoğunluğu, grafik ile verilen bir bölgenin matematik cümlesini yatay basit bölge olarak veya düşey basit bölge olarak yazarken zorlanıyorlar. Problemlerin çözümünde grafik çizmek istemiyorlar. Problemleri formül kullanarak çözmeye çalışıyorlar. Bu durum; analitik düzlem ve temel fonksiyon bilgilerinin eksikliğinden olabileceği gibi, öğrencilere grafik çizme alışkanlığının kazandırılamamış olmasından, görselliğin öğrenmedeki öneminin kavranmamış olmasından veya öğretmenin ders işleme metodundan kaynaklanabilir. Öğrenim deneyi sürecinde, öğrencilerin grafik kullanma alışkanlığı kazandıkları ve grafik üzerinden daha iyi yorum yapabildikleri gözlenmiştir. Başlangıçta grafik çizmekten kaçınan birçok öğrenci, öğretim sürecinde grafiklerle ilgili bilgi eksiklikleri giderildiğinde, grafik çizerek problem çözmeye başlamışlardır. Ancak, az da olsa bazı öğrenciler grafik çizmemekte ısrarcı olmuşlardır. Bu öğrenciler, matematik sorularının çözümünde başarısız olan öğrencilerdir. Analitik strateji ile grafik çizme stratejisini birlikte kullanabilen öğrencilerin konuyu daha iyi kavradıkları ve kavramları daha iyi öğrendikleri görülmüştür. Bu durum, Oberg'in (2000) çalışmasında elde ettiği bulgularla uyumludur.

Öğrencilerin temel fonksiyonlar ile ilgili kavramları iyi öğrenememiş olmaları, hem integrasyon bölgesinin yazılışında, hem de bölge dönüşümlerinde başarısız olmalarına sebep olmaktadır. Öğrencilerde, iki katlı integrallerin integrasyon bölgesini dönüştürme becerisinin yeterince gelişmediği görülmektedir. Jakobiyenin bulunması noktasında kısmi türevden kaynaklanan öğrenme güçlükleri vardır.

İntegrasyon bölgesi, $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq g(x)$ olarak verildiğinde; x değişkeninin sınırlarını kullanarak y değişkeninin de sınırlarını sabit değerlere dönüştürüp basit dikdörtgen bölgede integral işlemi yapabilme yanılgısı vardır (Şekil 1).

Bazı öğrenciler; verilen iki katlı integral işlemini yaparken; sınırların değişkene bağlı olup olmadıklarını önemsemeden, her iki değişkene göre aynı anda integral alınabileceği yanılgısı içindedirler. Basit dikdörtgen bölgedeki uygulama üzerinde aşırı genelleme yapıyorlar. Sınırları değişken olan integral işlemini sonra yapabileceği düşüncesi ile, sonucun değişkenlerden birine bağlı olarak bulunabileceği yanılgısına sahiptirler.

$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$ yanılgısı ile yanlış çözüm yapılıyor (Şekil 2).

Ayrıca; hem integral içinde sabitlerle yapılabilen işlemlerin (sabit sayıyı integral dışına çıkarmak gibi) değişkenlerle de yapılabileceği yanılgısı, hem de çarpımın integralinin integraller çarpımına eşit olacağı yanılgısı mevcuttur (Şekil 2 ve Şekil 3).

$\int A^{f(x)} \, dx = A^{\int f(x) dx}$ ve $\int A^{f(x)} \, dx = \frac{A^{f(x)}}{f'(x)}$ yanılgıları, iki katlı integral işlemlerinde de devam etmektedir (Şekil 4).

İki katlı integral işlemlerinde bölge dönüşümleri yapılırken; bazı öğrenciler dx.dy = du.dv yanılgısı ile çözüm yapmış, bazı öğrenciler de yeni değişkenlere göre sınırları bulup işlem yapmıştır (Şekil 5 ve Şekil 6).

$\iint_B \frac{f(x)}{g(y)}$ dxdy $= \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_c^d g(y)dy}$ ve $\iint_B \frac{f(x)}{g(y)}$ dx.dy$= \frac{\iint_B f(x)dxdy}{\iint_B g(y)dxdy}$ yanılgıları tespit edilmiştir (Şekil 8 ve Şekil 9).

Elde edilen bulgulara göre aşağıdaki önerileri söyleyebiliriz:

Matematiğin bütün konularında olduğu gibi, iki katlı integral konusunun öğretiminde de; kavramlar bilgisi önemsenmeden, sadece işlemler bilgisi ile çok sayıda benzer problemlerin çözümünü yaparak öğrenmenin oluşacağını düşünmek, öğretimdeki yanılgılarımızdan biridir. Bu durumda öğrenciler, belirli tip soruların çözümünü, belirli kalıplar içinde ezberlemiş olacaklarından kalıcı öğrenme oluşturulamaz. Bu tür öğretim ortamında yetişen öğrenciler; mekanik işlemleri yapabildikleri halde, kavramlar bilgisi ile işlemler bilgisi arasındaki ilişkiyi kuramadıkları için problem çözmede başarısız olmaktadırlar. Ezberledikleri formülleri nasıl kullanacaklarını bilememekte, bilgi transferleri ve yorumları genelleştirememektedirler. Bu sebeblerden bilgi teknolojisinin sunduğu imkanları kullanarak öğrenmeyi kolaylaştırıcı görselliklere önem verilmeli, kavramların daha iyi anlaşılması sağlanmalı, bilgi transferini oluşturacak öğrenci etkinlikleri ile öğrencilerin analitik düşünce yapısı geliştirilmelidir. Stylianau(2002), soyut ve kompleks ifadelerin iyi anlaşılabilmesinde grafik çiziminin uygun bir metot olduğunu ifade etmektedir.

Genelde matematik öğretiminde, özelde iki katlı integral öğretiminde grup çalışmasına ve akran öğretimine önem verilmelidir. Öğrenme, okul ortamındaki insanların kollektif işidir. Derslerin işlenişi sırasında, öğretmenin mutlak hakimiyetinden vazgeçilerek öğrencinin keşfedici yönünü gösterebileceği, karşılıklı etkileşime dayalı, kollektif öğrenme ortamı hazırlanmalıdır. Öğretmenler; suskun sınıf değil, ses kirliliği olmayan, konuşan sınıf ortamını oluşturmalıdırlar. Okullarda bireysel öğrenme ortamından daha çok birlikte öğrenme ortamı oluşturularak ilişkisel öğrenme geliştirilmelidir. Matematikte problem çözme becerisinin artırılabilmesi için kavram bilgisine ağırlık verilmeli ve kavram yanılgılarından uzak, işlemsel bilgi ile kavaramsal bilginin sentezlendiği bir öğretim sağlanmalıdır. Yanılgılarla ilgili bu tür araştırmalar,ileri matamatiğin bütün konularında ve daha geniş öğrenci kitlesi üzerinde yapılabilir.

KAYNAKÇA

Bingölbali, E. Özmantar, M. F. (2009). Matematiksel Kavram Yanılgıları, Sebepleri ve Çözüm Arayışları. Bingölbali, E. Özmantar, M. F. (Eds.) *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri.* Pegem Akademi.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç, E.K., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2009). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (4. Baskı). Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Doğan, A. (2001). *Genel Liselerde Okutulan Trigonometri Konularının Öğretiminde Öğrencilerin Yanılgıları, Yanlışları ve Trigonometri Konularına karşı Öğrenci Tutumları Üzerine Bir Araştırma*, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

George, E.A. (1997). *Reasoning with visual representations: Students use of diagrams, figures and graphs in solving problems on the advanced placement calculus examination.*Unpublished PhD Dissertation, the University of Pittsburgh, USA.

Karasar, N. (2010). *Bilimsel Araştırma Yöntemi* (21. Baskı). Ankara : Nobel Yayın Dağıtım.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston,VA: Author.

Oberg,T.D. (2000). *An investigation of undergraduate Calculus students conceptual understanding of the definite integral*. Unpublished PhD Dissertation, University of Montana.

Sealey,V. (2006). Definite integrals, Riemann Sums and area under a-curve: What is necessary and sufficient?. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Saiz, M. and Mendez, A.(Eds.), Proceedings of the 28 th annual meeting of the North American Chapter of the International Group fort he Psychology of Mathematics Educations, 2 (46).

Stylianau, D.A. (2002). On The intiraction of visualization and analysis: The negotiation of visual representation in exspert problem solving, *The Journal Mathematical Behaviour*, 21 (3).