

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN OSMANLIYA GİRİŞİ INTRODUCTION OF INVERSE TRİGONOMETRIC FUNCTIONS INTO THE OTTOMAN

*Ayşe KÖKCÜ**

Özet

Bu makale, Osmanlı'ya trigonometri konularından biri olan ters trigonometrik fonksiyonların nasıl girdiği ve kimler tarafından çalışıldığı hakkındadır. Öncelikle trigonometrinin kısa tarihçesi verilmiştir. Ardından Osmanlı matematiğine ters trigonometrik fonksiyonların girişi anlatılmaya çalışılmıştır.

Ters trigonometrik fonksiyonlar ilk kez 1700'lerde Daniel Bernoulli tarafından kullanılmıştır. Osmanlı'ya ise (tespit edebildiğimiz kadarıyla) Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa'nın adlieseriyle tanıtılmıştır. Vidinli Tevfik Paşa 'in dışında ters trigonometrik fonksiyonlardan arctanx'in türevi ve seriye açılımı ile ilgili dergisinde bir makale yayınlamıştır.

Anahtar Kelimeler: Osmanlı matematiği, Ters Trigonometrik Fonksiyonlar, Başhoca İshak Efendi, Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa.

Abstract

In this article, we have studied to find out how inverse trigonometric functions were introduced into Ottoman mathematics and who studied on this subject. Firstly, a brief history of trigonometry has been presented and then we have examined how inverse trigonometric functions were introduced into Ottoman mathematics.

* Ankara Üniversitesi, D.T.C.F. Bilim Tarihi Anabilim Dalı Doktora öğrencisi, ceydayse@hotmail.com.

Inverse trigonometric functions were first used by Daniel Bernoulli in 1700s. On the other hand, it was used as a term in Ottomans by Vidinli Hüseyin Tevfik Pasha in his textbook called *Zeyl-i Usûl-i Cebr* as far as we have found out in our search. Apart from *Zeyl-i Usûl-i Cebr*, Vidinli Hüseyin Tevfik Pasha published an article related to derivatives and series expansions of arctanx, which is one of the inverse trigonometric functions, in the journal of *Mebâhis-i İlmiye*.

Keywords: Ottoman Mathematics, Inverse Trigonometric Functions, the chief instructor Ishak Efendi, Vidinli Hüseyin Tevfik Pasha.

1.1. Trigonometrik Fonksiyonlar ve Kısa Tarihiçesi

Üçgenlerin kenar ve açılarının hesaplanması ile ilgili olan matematik dalına trigonometri diyoruz. Trigonometrinin kökeni M.Ö. 2000-3000'li yıllara, Babilliler'e kadar uzanmaktadır. Babilliler'in trigonometriye en büyük katkıları daireyi 360 parçaya bölerek bugünkü birim çemberin temelini atmış olmalarıdır. Babilliler'in dışında üçgenin kenar ve açılarıyla Mısırlılar ve Eski Yunanlılar da ilgilenmişlerdir.

Yunanlılar hesaplamalarında kırışlerden faydalanırken, Hintliler ise trigonometrik fonksiyonlardan sinüs'ü kullanıyorlardı. Bugünkü sinüs fonksiyonunun Arapça kelimesinin tercümesinden geldiği bilinmektedir (Sezgin, 2008, s. 30).

Doğuda ise trigonometri diğer pozitif bilimlerin de altın çağını yaşadığı ve çeviri ve bilimsel faaliyetlerin en yoğun olduğu bir dönemde, 9. yüzyılda görülmüştür. Tanjant fonksiyonunun mucidi olarak kabul edilen Habeş el-Hâsib de bu yüzyılda yaşamıştır. Yine aynı yüzyılda yaşayan El-Battani ile trigonometri büyük bir gelişme kaydetmiştir. El-Battani Batı'ya sinüs fonksiyonunu tanıtmış, tanjant, cotanjant ve küresel üçgenlerdeki cosinüs teoremini bulmuştur.

10. yüzyılda Ebu el-Vefa (940-997), tanjant cetvelini hazırlamış tanjant ve secant fonksiyonlarını tanımlamıştır. Ve sinüs için yarım açı formüllerini bulmuştur. 11. yüzyılda yaşayan İbn el-Heysen kiblenin yönünü tayin etmek için kotanjant teoreminden yararlanmışır. İstenilen konumun Mekke şehrinden sapma açısını,

$$\cot \alpha = \frac{\sin \varphi_1 \cos \theta - \cos \varphi_1 \tan \varphi_2}{\sin \theta} \text{ olarak hesaplamıştır (Sezgin, 2008, s. 131).}$$

(φ_2 Mekke şehrinin enlemini, φ_1 bulunulan yerin enlemini, θ her iki yer arasındaki boylam farkını göstermektedir.)

13. yüzyılda ise Nasireddin et-Tusi (1201-1274)'nin adlı eseri ile trigonometri bir bilim dalı haline gelmiştir.

1.2. Osmanlı Matematikçinde Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Osmanlı matematikçileri 17. yüzyılın sonlarına kadar İslam matematik kaynaklarını kullanmışlardır. Bunun neticesinde 13-17. yüzyıllar arasında Osmanlı

matematik geleneği İslam matematik geleneği çerçevesinde ilerlemiştir. 18. yüzyılın sonlarından itibaren modern anlamda bilim anlayışıyla açılan okullar sayesinde Osmanlı matematik alanında yüzünü Batı'ya dönmüştür. Batı'dan nakledilen matematik konuları arasında trigonometri de bulunmaktadır. Bu alandaki yeni gelişmeler çeviri yoluyla Osmanlı matematiğine aktarılmaya çalışılmıştır.

Trigonometrik fonksiyonlardan ters trigonometrik fonksiyonlar¹ Batı'da ilk kez 1700'lerde Daniel Bernoulli tarafından dikkate alınarak kullanılmaya başlanmıştır. Bernoulli sinüs fonksiyonunun tersi için 'A.sin' gösterimini kullanmıştır. Euler 1736'da ters tanjant fonksiyonu için 'A t' gösterimini, 1772'de Lagrange bugün en sık kullanılan gösterimi, yani 'arcsin' ve 'arctan' notasyonlarını kullanmıştır.

Trigonometrik fonksiyonlar ile üçgenin kenar uzunlukları hesaplanırken, ters trigonometrik fonksiyonlar ile de üçgenin açıları hesaplanabilmektedir.

1.2.1. Ters Trigonometrik Fonksiyonların Osmanlı'ya Girişi

Osmanlı'da Müslüman matematikçilerin eserlerinden faydalanılarak yazılan son trigonometri eseri, Gelenbevi İsmail Efendi'nin "Üçgenlerin kenarları" adlı risalesidir (1805/1806). Bu risalede de beklenildiği üzere ters trigonometrik fonksiyonlardan bahsedilmemektedir (Demir, 1996, S. 25, s. 175-222).

Ters trigonometrik fonksiyonların Osmanlı matematiğine girişi için Modern bilimleri ilk kez Osmanlı'ya tanıtan İshak Hoca'nın adlı eserini başlangıç kabul ettik.

1.2.2. Başhoca İshak Efendi (ö. 1834)

Başhoca İshak Efendi Mühendishâne-i Berrî-i Hümâyûn'un en meşhur hocalarından biridir.

Bilindiği kadarıyla Başhoca İshak Efendi'nin çağdaş eğitime en büyük etkisi adlı 4 ciltlik ders kitabı ile olmuştur. Bu kitabın ikinci cildinin ilk konusu düzlem trigonometridir. İshak Hoca 14 sayfada incelediği bu kısımda; sinüs, tanjant ve sekantın ve bunların tamamlayıcıları olan kosinüs, kotanjant ve kosekantın tanımlarını ve bu fonksiyonlarla ilgili alıştırmaları vermiştir (İshak Hoca 1260/1845, s. 5-19). İshak Hoca'nın eserinde, ters trigonometrik fonksiyonlardan bahsetmediğini görüyoruz.

İshak Hoca'dan sonra Osmanlı matematiğinin bir diğer önemli ismi Vidinli

¹ Ters trigonometrik fonksiyonlardan örneğin sinüsün tersi; $f(x) = \sin x$ olmak üzere, sinüs fonksiyonunun tanım aralığı için $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyon birebir ve örtendir (bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için birebir ve örten olma şartı aranır). $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ olmak üzere $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \sin^{-1}x$ veya arcsin ile gösterilir ve arcsin: $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olur.

Hüseyin Tefvik Paşa'nın eserlerinde ters trigonometrik fonksiyonlar konusunu araştırdık.

1.2.3. Vidinli Hüseyin Tefvik Paşa (1832-1901)

Hüseyin Tefvik Paşa, 1832 senesinde bugün Bulgaristan sınırları içerisinde kalan Vidin'de doğdu. Harbiye'de Cambridge Üniversitesi mezunu matematik hocası Tâhir Paşa'dan özel dersler aldı ve onun yardımcılığını yaptı. Tahir Paşa'nın kitabına faiz hesabı, türevler, Taylor ve Maclaurin serileri, denklemler konularını içeren (ilk baskısı 1859/1860) şeklinde bir ek yazdı. Bu ekte Tefvik Paşa $\sin x$, $\cos x$ ve $\tan x$ 'in ters fonksiyonlarının türevlerinin, trigonometrik fonksiyonların türevleri kullanılarak nasıl bulunduğunu anlatmıştır.

Vidinli Tefvik Paşa'da ters trigonometrik fonksiyonların türevlerinden evvel ters fonksiyonun tanımı verilir. Bir fonksiyonun ters fonksiyonunun bulunabilmesi için bire-bir ve örten özellikte olması gerektiğinden üstü kapalı bir şekilde bahsedilir ve ardından üslü bir fonksiyonun tersinin logaritma fonksiyonu olduğu gösterilir.

“Ters fonksiyonun tanımı : Her hangi bir eşitlik içinde bulunan iki değişkenden biri diğerinin fonksiyonu durumundadır. Yani eşitlikte bir fonksiyonu bulduğumuz kuralla diğerini bulabiliyorsak bu iki fonksiyon birbirinin zıddıdır. Bu iki fonksiyondan biri diğerinin ters fonksiyonu olur.

Örneğin $y = b^x$ olsun. Buradan $x = \log_b y$ alınarak x 'in her bir değerine y fonksiyonunun üssünün bir değeri karşılık geldiği gibi, y 'nin her bir değerine $\log_b y$ tabirinin ve x 'in logaritmasının özel bir değeri karşılık geleceğinden, x ve y ile gösterilen iki fonksiyon birbirinin tersi olurlar.” (Vidinli Tefvik, 1859/1860, s. 284)

Ters trigonometrik fonksiyonların türevlerinin hesaplanmasına geçer ve sinüs fonksiyonunun tersinin türevinin nasıl bulunduğu anlatılır.

“ $y = \arcsin x$ ters fonksiyonunun türevi istenilsin

$x = \sin y$ olup $x = \sin y$ 'de $\frac{dx}{dy}$ oranı $\cos y$ değerine yaklaşmakla $\frac{dy}{dx}$ ters oranı $\frac{1}{\cos y}$ değerine eşit olur.

Bundan dolayı

$\dot{y} = \frac{1}{\cos y}$ olacağı aşikârdır. Çünkü $\sin y = x$ olduğunda

$\cos y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ olup y yerine bu değer konulursa

$\dot{y} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - x^2}}$ bulunur.” (Vidinli Tefvik, 1859/1860, s. 285)

Yukarıdaki paydaya ait işaretin, cosinüsün tanım aralığına göre değişeceğini belirttikten sonra aynı metot uygulanarak arccosx'in de türevinin bulunabileceği anlatılır.

“y = arccosx türevinin bulunması isteniyor.

x = cosy'de $\frac{dx}{dy}$ oranı -siny değerine yaklaşmakla $\frac{dy}{dx}$ ters oranı $\frac{1}{-siny}$ değerine eşit olur.

Bundan dolayı

$$y' = \frac{1}{-siny} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}} \text{ bulunur.}$$

Kök işareti için siny tabirinin işareti koyulur.” (Vidinli Tefvik, 1859/1860, s. 286)

Son olarak arctanx'in türevinin bulunuşu anlatılır.

“ y = arctanx ters fonksiyonunun türevi istenilsin. Öncelikle

x = tan y olsun.

Buradan $\frac{dx}{dy}$ bölümünün türevi $\frac{1}{\cos^2 x}$ olduğundan, $\frac{dy}{dx}$ bölümünün türevi $\cos^2 y$ olur ve $y' = \cos^2 y = \frac{1}{\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

bulunur.”(Vidinli Tefvik, 1276/1860, s. 286)

Vidinli Tefvik Paşa Zeyl-i Usûl-i Cebr'in dışında ters trigonometrik fonksiyonlardan arctanx ile ilgili olarak Mebâhis-i İlmiye dergisinde bir makale yayınlamıştır (Mebâhis-i İlmiye 1867, C. 2, s. 171-179) . 1868 yılında yayınlanan makalede “Logx ve kavs-i mümâs x'in müştaklarına ve bunların silsileye tevsi'lerine dair ruhban sınıfından Mösyö Sofle'in hâşiyesi” başlığıyla logx ve arctanx'in türevlerinin ve seriye açılışlarının bulunuşları anlatılmıştır. Tefvik Paşa, makalenin kaynağını dipnotta Nouvelles Annales de Mathématique adlı Fransız dergisinin 438'inci sayfası olarak vermiştir.

Makalede, Tefvik Paşa'nın ruhban sınıfından Mösyö Sofle olarak ifade ettiği zat, Abbé Soufflet 'tir. Söz konusu, Nouvelles Annales de Mathématique'te 1853 yılında yayınlanan “Note sur les dérivées de Log x et arc tang x et sur leur développements en série” başlıklı makalesidir. Osmanlı matematiğinde arctanx'in türevi ve seriye açılımı ilk defa Mebâhis-i İlmiye'de yayınlanan bu makale ile gösterilmiş diyebiliriz.

Kaynakça

- Demir. Remzi (1996). “İsmail Gelenbevi'nin Adlı Risâlesi”. . C. 9. S. 25. s. 175-222.
- Günergun. Feza (2007). “Matematiksel Bilimlerde İlk Türkçe Dergi: (1867-68)”. . VIII/2. s. 1-42.
- Sezgin. Fuat (2008). C. 3. İstanbul: İstanbul Büyükşehir Belediyesi Kültür A.Ş. Yayınları.
- Hoca İshak Efendi (1260/1845). . C. 2. Mısır: Bulak Matbaası.
- Vidinli Hüseyin Tevfik (1285/1868-1869)“Logx ve kavs-i mümâs x'in müştaklarına ve bunların silsileye tevsi'lerine dair ruhban sınıfından Mösyö Sofle'in hâşiyesi”.. İstanbul. C. 2. s. 171-179.
- Vidinli Hüseyin Tevfik (1276/(1859/1860)). İstanbul: Mekteb-i Fünûn-ı Harbiye Matbaası.
- Caferov. Vakıf (1999). . Anadolu Üniversitesi Yayınları: <http://eogrenme.anadolu.edu.tr/eKitap/MAT302U.pdf> Çevrimiçi: 15 Ocak 2014).