Herbart'ın Geometri Felsefesi ve Riemann Geometrisi Üzerindeki Etkisi

Ahmet Dinçer ÇEVİK[*]

Özet

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), analiz ve diferansiyel geometri başta olmak üzere matematiğin birçok dalında çok önemli katkıları olan bir matematikçidir. Riemann'ın ünlü 1854 tarihli Habilitationsvortrag[1]*'ında uzaya ilişkin felsefe, matematik ve fizik açısından son derece önemli tespitlerde bulunmuştur. Bu anlamda zaman zaman Riemann'ın sergilediği resim matematik, fizik ve felsefe tarafından oluşturulan "büyülü üçlü"*[2] *olarak anılır. Riemann'ın matematiksel çalışmalarının felsefi meseleler ile paralel olarak ilerlediğini söyleyebiliriz. Riemann'ın çalışmalarının felsefi arka planı bakımından, 1941 yılına kadar Göttingen'de profesörlük yapan Johann Friedrich Herbart çok önemlidir. Bu bağlamda bu makalede iki amacım var. Öncelikle Herbart'ın uzay ve geometriyi kavrayış şekli temelinde Kant ile ilişkisini inceleyeceğim. İkinci olarak Herbart'ın fikirlerinin genel olarak Riemann'ın matematiğinde özelde ise manifold kavramının kuruluşunda ne dereceye kadar etkili olduğu ile ilgili farklı görüşleri sunduktan sonra Herbart'ın Riemann'ı genel olarak matematiğinin epistemolojisi ve matematiğin kavramsal metodolojisi anlamında etkilediğini iddia edeceğim.*

Anahtar Kelimeler: *G.F.B. Riemann, J.F.H. Herbart, uzay, manifold*

* Araştırma Görevlisi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Felsefe Bölümü

1 Riemann'ın yaşadığı dönemde üniversitede bir akademik pozisyon elde edebilmek için tüm fakültelere ve halka açık olarak verilen ders.

2 Ferreiros, J. (2006). "Riemann's Habilitationsvortrag at the Crossroads of Mathematics, Physics and Philosophy", J. Gray, Ferreiros, J. (Eds.), *The Architecture of modern mathematics*, New York: Oxford University Press, içinde s. 67. Ferreiros "büyülü üçlü" (magic triangle) ifadesini Sanchez Ron'un Einstein ile ilgili bir makalede kullandığı şekline atıfta bulunarak kullanır.

Herbart's Philosophy of Geometry and Its Influence on the Riemann's Geometry

Abstract

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) has mainly contributed to analysis and differential geometry and the other fields of the mathematics as well. In his famous Habilitationsvortrag he underlines important points on the very nature of space with respect to philosophy, mathematics, and physics. In this sense, sometimes the picture Riemann represents is called as "magic triangle consisting of mathematics, physics and philosophy. So, it is possible to see that interest for philosophical issues goes hand in hand with Riemann's mathematical studies. In this context we see Johann Friedrich Herbart, a professor at Göttingen until 1941, appears in philosophical background of Riemann's studies. In this paper, I aim two things: First, I will investigate the relationship between Herbart's philosophy and that of Kant's with respect to former's conception of space and geometry. Second, after representing views concerning to which extent Herbart's ideas gave a way to Riemann's studies and his concept of manifold, I will claim that Herbart's influence on Riemann is seen in the epistemology and conceptual methodology of mathematics.

Key Words: *G.F.B. Riemann, J.F. Herbart, space, manifold.*

1. Herbart'ın Felsefesi ve Kant ile İlişkisi

Herbart idealist Fichte'nin öğrencisiydi. Herbart öğrencilik zamanlarının sonuna doğru, bu dönem Almanya'sını idealizm etkisi altına almasına rağmen hocasını eleştirerek kendisini realist olarak tanımlayacak kadar Fichte'nin fikirlerinin karşısında yer alır (Ferreiros, 2006: 43). Fichte'nin görüşlerinden sıyrılarak Herbart kendisini Kant'ın bir destekçisi olarak değerlendirmeye başlar. Ancak uzayın kavramsallaştırılmasında Herbart Kant ile aynı fikirde değildir. Herbart uzayın kavramsallaştırılmasında Kant'ın uzayı saf görünün formu olarak ele almasının karşısına Leibniz-Wolff sistemindeki monad anlayışının dinamik bir yorumunu koyar. Bu yorumda Herbart'ın metafiziğinde duyumları nitelikleri ve büyüklükleriyle beraber ilksel özellikler olarak ele alır ve bu ilksel özellikler üzerine psikofizik temelli uzay anlayışını kurar. Empirik karakterli böylesi bir felsefi programın doğal sonucu, uzayı ve geometriyi inşa edilebilir bir şey olarak tasarlamak ve her şeyin geometrikleştirilebileceği fikirleridir.

Herbart matematiği felsefeye en yakın bilimsel disiplin olarak görür (Ferreiros, 2006: 46). Bu görüşü anlamak için Herbart'ın felsefesinin genel hatlarına bakılabilir. Herbart, felsefenin bilimlerle kurduğu ilişki içinde gelişmesi gerektiğini savunur. Ona göre her disiplin teorik gelişmelerin onun temelinde ilerleyebileceği merkezi bir kavram etrafında kurulmalıdır. Bu iki görüşe onun her şeyin geometrikselleştirilebileceği fikri de eklenince, Herbart'ın neden matematiği felsefeye en yakın disiplin olarak gördüğü açığa kavuşur.

19. yüzyılın ilk yarısında Alman idealistleri Kant'ın zaman ve mekân anlayışına karşıydılar. Kabaca, Kant '*Birinci Kritik*"inde, '*Transendental Estetik*' bölümünde zaman ve mekânı 'saf görünün formları' (pure forms of intuition) olarak tanımlar ve bu anlamıyla onlar her türlü mümkün deneyimin ön koşuludur. Herbart, Fichte, Schelling, Hegel ve Schleiermacher gibi idealistlerin yanında yer alarak Kant'ın bu anlayışını eleştirir. Burada idealist felsefenin Kant'a karşı çıkışını ayrıntılı olarak incelemek yerine odağım olan Herbart'ın zaman ve uzayın doğasına ilişkin görüşlerini ele alacağım.

Herbart, Kant'ın uzayı saf görünün formu olarak ele almasından rahatsızlık duyar ve bu nedenle Kant'ın *Eleştirel* felsefesini yeniden ele alır. Bu amacın merkezinde ise zaman- uzay ile kendinde şey (thing in itself) arasındaki ilişki yatar. Herbart'a göre Kant'ın bu ikisi arasında kurduğu ilişki açık değildir. Herbart bu ilişkiyi açık kılmak için önce Kant'ın nedensellik anlayışını yeniden ele alır. Kant'ın *Eleştiri* öncesi döneminde Leibniz-Wolff sistemi ile Öklid geometrisi ve Newton'un doğa felsefesi arasında denge kurmaya çalışır. Herbart benzer şekilde Kant'ın *Eleştirel* felsefesi ile Leibniz Wolff sistemi arasında bir denge kurmaya çalışır. Kant kendi denge kurma girişiminin sonucunda uzayın üç boyutlu, sonsuz bölünebilir olması gibi uzaysal özelliklerinin Leibniz-Wolff sisteminin monadların içsel ilişkileri ile açıklanan uzay tasarımıyla açıklanamayacağını görmüştü. Çözüm olarak da dış dünya tarafından sağlanan duyusal görünün insanın bilişsel kapasitesi ile nasıl bir ilişkide olduğunun hesabını vermek için *uzayın saf görüsü* kavramını insan zihnine yerleştirmişti. Bu yolla hem uzay görüsünün özel bir karakteri olduğunu vurgulamış hem de anlama yetisinin sağladığı kurallar, şemalar ve genel inşa işlerinin duyusal görünün nesnelerine nasıl uygulandığının hesabını vermişti. Kant'a göre hem rasyonalist hem de ampirist gelenek uzayı kendinde şey ile ilişkisinde değerlendirmiştir. Oysa Kant'a göre uzay şeylerin görünüşleri ile ilgilidir, kendinde-şeylerle değil. Bu anlamda uzay herhangi bir kendinde-şeyin özelliğini temsil edemez, o dış görünüşün formudur ve özne için olanaklı deneyim ile sınırlıdır. Sonuç olarak Kant anlama yetisinin saf kavramlarının uygulanabilirliğini zaman ve uzayda görünüşler dünyasıyla sınırlar. Kant için zaman ve uzay şeylerin bize görüngüler olarak verildiği saf görünün formlarıdır. Nedensellik ise bu görüngüler arasındaki ilişkinin kurulmasına yardım eden yargı gücüne ait bir kategoridir. Dolayısıyla Kant'a göre nedensellik kategorisi olanaklı deneyime, fenomene uygulanabilirken kendinde şeylerin yer aldığı numenal dünyaya uygulanamamaktadır. Herbart'ın sorusu şudur: Nedensellik yalnızca olanaklı deneyim dünyasına uygulanabiliyorsa, olanaklı deneyimin nesnesi olmayan kendinde şey nasıl oluyor da bizim deneyimimizin nedeni olabiliyor? Herbart nedensellik kategorisini yalnızca fenomenal dünyaya uygulanabilen sübjektif bir kategori olmaktan çıkartıp, kendinde şeyin yapısını bir parçası olarak değerlendirir ve bu yolla öznel ve nesnel uzay arasındaki ayrımın kaldırılabileceği iddiasındadır.

Herbart'ın zaman-uzay ile kendinde şeyler arasındaki ilişkiyi tesis etme hedefi açısından katı cisim (rigid body) kavramı kilit bir öneme sahiptir. Herbart'ın bu işlemsel bakışı diğer anahtar kavramların türetimi için de geçerlidir (Lenoir, 2006: 154). O doğru çizgileri harekete olabildiğince az başvurarak tanımlar, benzer şekilde maddeyi de içsel ilişkileri olan ve bu ilişkileri hareket boyunca koruyan noktaların, çizgilerin, yüzeylerin toplamı olarak tanımlar. Herbart için 'katı cisim'i (rigid body) tanımlamak noktaların, çizgilerin, yüzeylerin aktarım ve dönme gibi hareketleri boyunca aynı sistematik özellikleri koruması için tutarlı sabit bir kural belirlemektir (Lenoir, 2006: 154).

Herbart'ın 'katı cisim' tanımakla ilgili vurgusu hem Riemann hem de ondan sonra gelen geometriciler[3] tarafından da ele alınmıştır. Riemann *Habilatitionsvortrag*'da mekânın topolojik özelliklerinin nasıl belirlenebileceği üzerine odaklanmıştır. Bu topolojik özellikler figürlerin mekânsal, dönüşümlerde değişmeyen yani figür mekânda hareket ettiğinde değişmeden kalan özelliklerdir. Riemann *n* boyutlu bir mekânda yani *n* tane sürekli ve bağımsız değişken tarafından belirlenen bir mekânın sabit eğriliğe sahip olduğunu mekânsal figürlerin formları bozulmadan hareket ettirilebileceğini, döndürülebileceği *hipotezine* dayanarak gösterir.

Figürlerin mekândan bağımsız olarak bulunması ancak ve ancak cisimler hareket ettirildiklerinde değişmeyen bazı özellikleri olduğunda mümkündür. Yani, eğer

3 Örneğin Helmholtz 1868 tarihli *"Geometrinin Temellerindeki Gerçekler"* (*On the Facts Underlying Geometry*) makalesinde benzer ama bir yanıyla farklı bir konuya odaklanır. O da Riemann ile figürleri kıyaslamadan ve ölçmeden geometri yapmamızın imkânsız olduğunu ve bu işlemleri yapabilmek için de ölçüm aletlerimizin değişmeden kalan bazı özelliklerinin bulunması konusunda hemfikirdir. Ama onun sorusu daha spesifiktir; figürlerin özelliklerinin değişmeden kaldığı hareketlere dair geometrik *aksiyomlarımız* neler olmalıdır? Helmholtz bu soruyu "kalıplaşmış hareketler" (rigid motions) ile yanıtlamaya çalışır. Bu hareketler nesnelerin özelliklerini koruyan hareketlerdir. Örneğin bir küre kendi merkezi ekseni etrafında döndürüldüğünde bu hareket kürenin *X* ve *Y* eksenlerindeki simetrisini korur, dolayısıyla bu simetriler dönüşümlerde değişmezler.

Helmholtz da makalesinde katı cisimlere (rigid bodies) ve ışık ışınlarına (light rays) vurgu yapar. Bu iki alet bize geometri yapabilmemize temel teşkil eden düz çizgi ve benzerlik kavramlarını türetebilmemize fırsat verir. Düz çizgi ve benzerlik de yön, mesafe, büyüklük, geometrik inşa gibi kavram ve işlemlerimizin arka planındadırlar. Helmholtz'a göre katı cisimler ve ışık ışınları geometrinin prensiplerinin empirik temelli olduğunu anlamamıza temel teşkil ederler. Bilgi kuramsal olarak bu anlayış, Riemann'ın programının temel bileşenlerinden olan 'serbest hareketlilik' fikrini uca taşımaktadır. Riemann için serbest hareketlilik fiziksel cisimlerin tamamen sağlayamayacağı, yalnızca *yaklaşabileceği* bir özelliktir. Ayrıca Riemann kalıplaşmış hareketlere uzlaşımla karar vermek yerine fiziğin avantajlarını kullanarak daha küçük ölçeklerde daha kesin kavramlara ulaşabileceğimizi düşünür. Yani Riemann için serbest hareketlilik fiziksel geometrinin bir koşulu değil, bir kabuldür. Mikroskobik ilişkileri ve cisimlerin doğası hakkında daha derin bir kavrayışa sahip olduğumuzda pekâlâ bu kabul uygulanamaz hale gelebilecektir. Helmholtz, H. V. (1977). *Epistemological Writings*, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, ed. Robert T., S Cohen and Marx W. Wartofsky, Dordrecht Reidel Publishing, içinde s. 39-71, DiSalle, R (2006). Understanding Space -Time, Cambridge University Press, s. 77-78.

cisimler yerini değiştirdiğinde aynı özelliklerini farklı uzaylarda halen koruyabilirse, özellikleri dönüşüm durumunda da değişmeden kalır. Riemann'a göre bu kabul olmaksızın iki kısa arasındaki en kısa yol olarak ışık ışını ve mesafe ölçümlerinde kullandığımız metre çubuğu gibi katı cisimler güvenilir ölçümleri temellendirebileceğimiz özelliklerden yoksun olurlar. Yani geometrinin temeli olan ölçüm işlemini yapabilmek için bu temel aletler değişmeyen bazı özelliklere sahip olmalıdır.

Herbart katı cisimlerle ilgili geliştirdiği fikirleri "ilişkilerin soyut bilimi"nin bir uygulaması olarak gördüğü geometriye uygular ve duyulur uzayı (sensory space) kurmanın hesabını vermeye çalışır (Lenoir, 2006: 154). Herbart, Kant'ın uzayın saf görü olduğu fikrine alternatif olarak, Locke'ın temsilcisi olduğu şeyleri özellik demetleri (bundle of propeties) olarak ele alan anlayışa paralel bir biçimde psikolojik uzayın, basit duyumlardan yola çıkılarak empirik olarak kurulabileceğini göstermeye çalışır (Lenoir, 2006: 155). Herbart'ın duyumları kuvvetler olarak alması ve psikolojik uzayın temel duyumlardan yola çıkarak kurma projesi Kant'ın *duyumlama yetisi* ile benzerlikler göstermektedir. Hem Kant hem de Herbart için uzay konusunda duyumların bir sentezi söz konusudur. Ancak Herbart Kant'tan *Sürekli Seri Formlar* (*continuierliche Reihenformen*) teorisiyle ayrılır. Herbart'a göre mekânsal kavramlar 'deneyimin formları' olarak iş gören diğer tüm kavramlardan farklı değillerdir. Tıpkı diğer tüm kavramlar gibi mekânsal kavramlar da deneyimdedir. Ancak, ona göre biz felsefi ve bilimsel düşünme ile mekânsal kavramları şekillendirmeliyizdir. Mekân ve zaman Herbart'ın daha genel *sürekli seri formlar* üretebilmesi için başlangıç noktalarıdır. Herbart' a göre biz algı seviyesinde zaten kıyaslama ve ölçmenin psikolojik sürecini yaşarız ve bu sürekliliği olan bir süreçtir. Ona göre örneğin, herhangi bir varyasyon olmadan "do" notasına sürekli maruz kalmak o sesin duyulmamaya başlamasına yol açar. Benzer şekilde gözlerimizi kıpırdatmadan mavi bir kumaş parçasına bakmak da onun yavaş yavaş gözden kaybolmasına sebep olur. Herbart'ın psikofiziğinde algılar yoğunlukta[4] derecelenmek suretiyle birbirlerini dengeleyen kuvvetler olarak değerlendirilir ve duyumlar kuvvetler olarak tanımlanır. Herbart duyumu, dışsal bir etken ile onla iletişim kurulan fizyolojik aygıt arasındaki güç ilişkisinin sonucu olarak anlar (Lenoir, 2006: 155).

Herbart'ın algıları kuvvetler olarak tanımlaması onları kendi yeni psikofiziğinin ölçüsüne indirgeme amacına yönelik olarak düşünülmelidir (Lenoir, 2006: 155). Herbart'a göre görüngüler dünyası basit duyuların ve onların birleşimlerinin deneydeki dinamik ve statik ilişkilerinden yapılaştırılarak kurulur. Bu yeni duyum yetisi anlayışının merkezinde onun az önce tanımladığımız *sürekli seri formlar* doktrini vardı. Bu doktrinin amacı duyular arasındaki ilişkileri yoğunluk, kalite ve niceliğe göre göstermektir. Aynı dinamik kurallar az ya da çok sınırlanmış şekliyle algının her

4 Herbart'ın uzaysız duyumlarla ilgili düşüncelerinin Kant'ın "yoğun büyüklükler doktrini" ile ilişkisi için bkz. Eric, C. Banks (2005). "Kant Herbart and Riemann", *Kant Studies*, Vol 96, Issue 2, s. 211.

modelinin kurulmasını ve onların daha üst derecede düzenli sentezini kontrol eder. Herbart bu daha üst düzenli birliğe "complexions" (Alm. *Complexionen*) ismini verir. Örneğin herhangi bir renk yoğunluğuna bağlı olarak farklılaşabilir. Herbart'a göre böyle bir manifold yoğunluğu artan duyumların lineer serisi olarak gösterilebilir (akt. Lenoir, 2006: 155). Böyle bir anlayışta uzay, manifold olarak 'verili' bir şey değildir daha ziyade dünya ile ilişkimizdeki farklı duyumsal modlarımızın sembolize edildiği ve onların tek bir deneyimde sentez edildiği bir şeydir:

> *Duyusal uzay, kati olmak gerekirse, orijinal olarak tek bir uzay değildir. Daha ziyade gözler ve hissetme ve dokunma birbirlerinden bağımsız olarak uzayın üretimini başlatırlar; hemen sonra hepsi bir araya gelir [verschmolzen] ve daha fazla gelişir. Yeteri kadar sıklıkla tek bir uzay (fenomenal uzay) olduğu şeklindeki önyargıya karşı uyarıda bulunamıyoruz. Uzay diye bir şey yoktur; ama algıları tekrar üretmenin kanunlarının ağı [Gewebe] (ki algılayan için onların nesnesi uzaysaldır) boyunca kaynaştırarak algılar sistemini üretmek için motivasyonlar [Veranlassungen] vardır. Böyle yapılaştırmalar için çok sayıda motivasyon vardır. Bunların hepsi eşit derecede başarılı değildir; uzayı yapılaştırma denemelerinin çoğu eksik ve karanlıkta kalmaktadır; örneğin optik illüzyonlar (Lenoir, 2006: 157).*

Dolayısıyla Herbart'ın amacı farklı manifoldları duyu verisiyle ilişkilendirerek uzayın verili ve tek olmadığını, üretilen bir şey olduğunu göstermektir. Sonuç olarak, Herbart her şeyi 'özellik demeti' olarak anlar. Bizim düşündüğümüz anlamda tek bir mekân yoktur, mekânlar vardır. O, mekânı her birinin farklı bir varoluş karakterine sahip olduğu mekânların toplamı olarak anlar.

Herbart'ın zaman-uzay ile kendinde şeyler arasındaki ilişkiyi tesis etme için ikinci önerisi ise Öklidyen geometrinin bir örnek olacağı farklı uygulamalı geometrilerin temeli olabilecek 'soyut bir ilişkiler bilimi' kurmaktı. Herbart'ın zaman-uzay ile kendinde şey arasındaki ilişkiyi kurmak için öne sürdüğü ikinci önerisi ona göre iki farklı ama paralel problemi çözebilirdi; a) kavranabilir tözlerin uzaysal olmayan dünyasının fenomenel dünya ile ilişkisini ortaya koymak, b) empirik psikolojide dış kaynaklı duyu verisinin bizim üç boyutlu görsel deneyimimiz ile ilişkisini açıklamak (Lenoir, 2006: 152).

Herbart için kavranabilir uzay tutarlı mantıki ilişkilerin soyut bir bilimiydi:

> *Geometri uzayı verili olarak alır ve onun içeriğini, çizgilerini, açılarını yapılaştırma ile elde eder. Ama basit özler için uzay verili değildir (ve doğal felsefe onları gerçek için kati bir zemin oluşturma amacıyla indirgemelidir). O (uzay) onun tüm belirlenimleri ile beraber üretilmelidir. Geometrinin durumu metafizik için çok aşağıdadır. Metafizik onu kullanmadan önce geometrinin olanağını ve geçerliliğini açık hale getirmelidir (Lenoir, 2006: 152).*

Herbart'a göre geometrici tarafından varsayılan uzay duyular dünyasından yani Kant'ın 'uzaysal görüler dünyası'ndan alınmak suretiyle varsayılmaktadır. Herbart'a göre "kavranabilir uzayın geometrisi" (the geometry of intelligible space) geometrinin bir üst biçimidir ve o kavramlarını duyulur deneyimden almaz bunun yerine bu kavramları belli ilk kavramlar temelinde kurar. Herbart "kavranabilir uzay"ın geometrisini kurmaya 'pozisyon', 'aralarında', 'içinde' 'dışında', gibi temel kavramlarla başlar. 'Katı çizgi' (rigid line) ve 'düz' (straight) bu geometri için anahtar kavramlardır. Herbart'ın çizgileri ve düzlemleri tartışması bu bakış açısını ve onun psikolojik ve nesnel uzay ile ilgili görüşleri ile yakından ilgilidir. Herbart çizgiyi 'yönlü büyüklük' olarak anlar ve iki nokta arsındaki en kısa yolu belirlemek için kullanır (Lenoir, 2006: 153). Çizgiyi bu şekilde birleşik yönlerin toplamı olarak düşünen "felsefi" bir geometrinin en önemli sonucu uzaysal boyutların sayısına ilkece sınırlı olmayışımızdır. Aynı prosedür iki ya da üç boyutlu büyüklüklerin inşasında dört, beş ya da daha fazla boyuta izin verecektir. Riemann *Habilitationsvortrag*'ında manifoldun kurulması işleminden bahsederken, tek boyutlu manifoldda tek bir yönde; (ileri ve geri) hareket edilebilirliği benzer şekilde iki boyutlu bir manifold (yüzey) üzerinde hareket tanımlamak için iki ayrı yönün gerektiğini ve *n* boyutlu manifolda *n* tane ayrı yön ile belirlendiğini gösterir. Dolayısıyla Herbart'ın felsefi geometrisinde çizgilerin yönlü büyüklükler olarak tanımlanması Riemann'ın manifoldun tanımını verdiği genel çerçevede görülebilir.

Herbart'ın psikolojik uzayın basit duyumlardan kurulabileceğini gösterebilmesi için çıkış noktası temel renklerin, tonların ve benzerlerinin olmasıdır. Temel renklerin, tonların ve benzerlerinin fark edilebilmeleri için onların arasında farklılık yaratacak bir duyumun olması gerekir.

Herbart'ın kaygılarından biri duyu verisi ile görsel deneyim arasındaki ilişkidir. Ona göre fizyoloji kavranan nesnenin duyumda ortaya çıkışını göstermede başarılı olabilse bile duyu verisi ile görsel deneyim arasındaki ilişkide yine de bir boşluk olacaktır: "Şimdi ruh, retinal görüntüdeki tamamen yok olmuş uzaysal ilişkileri tepeden tırnağa baştan üretmek zorundadır. Ve bunu, algılarına en ufak bir zarar vermeden yapmalıdır. Ama uzaysal bir şeyin algısı, algısı olduğu uzaysal şeye belli bir benzerlik göstermelidir. Yoksa bu algı işlemi sonucu algılanan nesne uzaysal bir şey hariç her şey olabilir" (akt. Lenoir, 2006: 153).

Herbart'a göre retinamızdaki sinirlerin dış dünya kaynaklı duyu verisi ile birebir eşleşmesini temel alan bu tür bakış açılarının hatası empirik psikolojinin konusu olan fenomenal uzayı biyolojik donanımımızda "verili" olarak değerlendirmesinde yatar. Herbart'a göre empirik psikolojinin bakış açısından uzay gerçek ve içine şeylerin yerleştirildiği bir konteynır değildir. Uzay, bizim duyularımız aracılığıyla dünyadaki farklı etkileşimlerin sunulması ve sembolize edilmesi için bir araçtır. Uzayın ölçüsü kendiliğinden verilmez daha ziyade "büyüklüğün tüm kavramları gibi, varlığının uygulandığı nesnelerin doğası uyarınca bükülen ve şekil verilen yalnızca düşünceye yardım olarak düşünülmelidir ve asla yanlış şekilde o nesnelerin gerçek yüklemlerini sunduğu düşünülmemelidir" (akt. Lenoir, 2006: 153).

2. Herbart'ın Riemann Geometrisinin Arka Planı Üzerindeki Etkisi

2.1. Russell'ın Herbart-Riemann İlişkisine Dair Görüşleri

Russell *An Essay on the foundations of geometry*[5] adlı eserinin birinci bölümünü 'metageometriye'[6] ayırır. O metageometrinin tarihini de üçe ayırır. Birinci dönem Gauss, Lobachevski ve Bolyai'yi, ikinci dönem Riemann ve Helmholtz'u, üçüncü dönem de Cayley ve Klein'ı içerir.

Russell'a göre Riemann'ın ait olduğu metageometrinin ikinci dönemi birinci ve üçüncü dönemlere göre dikkate değer bir şekilde farklı bir pozisyona sahiptir. Russell için bu dönem yöntemlerinde yapılaştırıcı (constructive) ve amaçlarında felsefidir. Metodolojik olarak bu dönem metrik geometriyi kullanarak Öklidyen olmayan iki geometrinin; Lobachevski ve küresel (spherical) geometrilerin kuruluşunu göstermiştir. Russell'a göre Riemann'ın mekânı ele alış biçimi mantıksal analiz çerçevesinde değil daha ziyade felsefi bir motivasyonla kurulmuş olan 'manifold' kavramının bir örneğidir (Russell, 1956: 14). Russell bu dönemin temel kavramlarının 'manifold' ve "eğriliğin ölçüsü" (measure of curvature) olduğunu belirler. Ona göre manifold kavramı mekânı çok genel büyüklüklerin (magnitudes) ve özel bir örneği olarak tanımlanışı bakımından felsefi bir öneme sahiptir" (Russell, 1956: 62). Russell Herbart'ın geometri ile ilgili fikirlerinin çok büyük önem arz etmediğini düşünmekle beraber onu Kant'tan sonra gelen felsefeciler arasında geometri teorisini geliştirenlerden birisi olarak görür. Yine de Russell'a göre Herbart'ın önemi Riemann üzerindeki etkisi aracılığıyla anlaşılabilir. O bu etki ile ilgili olarak beş noktaya işaret eder:

> *… Ama onun [Herbart] psikolojik mekân teorisi, uzamı (mekânı) noktalar serisinden yapısallaştırması, onun mekânı ton ve renk serileriyle kıyaslaması, onun genel olarak sürekli olan yerine parçalı olanı tercih etmesi ve son olarak onun mekânı diğer seri formlarla kıyaslamasının önemine dair inancı Riemann'ı çağ açan spekülasyonlarına yol açmış ve onu mekânın yalnızca analitik ve niceliksel özelliklerle açıklanması için cesaretlendirmiştir (Russell, 1956: 62-63).*

2.2. Torretti'nin Herbart-Riemann İlişkisine Dair Görüşleri

Torretti için yukarıdaki alıntıda sıralanan beş nokta arasında Herbart'ın mekânı ton ve renk serileriyle kıyaslamasını içeren üçüncü husus özellikle

---

5 Russell, Bertrand (1956). *An Essay on The Foundations of Geometry*, Dover Publications.

6 Russell "Metageometri"yi Öklidyen olmayan geometriler ile eş anlamlı kullanır, a.g.e., s. 7.

Herbart'çıdır çünkü "bir cinsin özelleşmelerinin kümesi olarak tanımlanan manifold kavramı noktalar olarak düşünülen mekândan daha çok renkler ve renkliliğin manifolduna uygun düşmektedir" (Torretti, 1978: 107). Torretti'ye göre Herbart'ın psikolojik mekân teorisi Kant'taki zaman-uzayı da içeren sınıfı işaret etmek için kullandığı *Manningfaltigkeit* kavramında köklerini bulmaktadır. Torretti Herbart'ın psikolojik mekân teorisinin Riemann'ın 1854 *Habilitationsvortrag*'ındaki üzerindeki etkisini kavramakta zorlandığını belirtir. Ona göre Riemann *Habilitationsvortrag*'da Herbart'tan uzayın temel duyumlardan yola çıkılarak, a priori verili hiçbir şey olmaksızın empirik olarak oluşturulabileceği şeklindeki "empirisist önyargı" noktasında etkilenmiş olabilir. Herbart'a göre bizdeki mekân temsili, empirik olanla başlar ancak Torretti'nin de belirttiği gibi, *Habilatationsvortrag*'da, psikoloji kaynaklı bir mekân algısının (psychogenesis'in) yeri yoktur. Bu iddiasında Torretti haklıdır; *Habilatationsvortrag*'ın giriş kısmında Riemann, kendi zamanında hâkim olan Öklidyen metriğin geçerli olduğu mekânın ön kabullerinin gerekliliğini ve a priori olup olmadığını sorgularken felsefi bir motivasyona sahiptir. İkinci bölümde, Riemann bu felsefi motivasyonun açtığı yolu takip etmiş ve diferansiyel metodların olanağını genişletmiştir. Sonuç kısmında ise yönteminin sonuçları üzerinden Fizik ile ilgili spekülasyonlarda bulunmuştur. Dolayısıyla dersinin herhangi bir yerinde Riemann uzayın psikolojik değerlendirmesine girişmez. Russell'ın listesindeki parçalı olanın sürekli olana tercih edilmesi iddiası ile ilgili olarak Torretti Russell'ın bunu iddia ederken tam olarak neyi düşünmüş olabileceği hakkında bir fikri olmadığını, böyle bir tercihin Riemann'ın yazılarının neresinde rastlanıldığını anlayamadığını söyler (Torretti, 1978: 107). Torretti'nin bu iddialarında da haklı olduğunu düşünüyorum, çünkü Riemann *Habilitationsvortrag*'ında günlük hayatta parçalı manifoldların (discrete manifold) örneklerine çok, sürekli manifold örneklerine ise az rastladığımızı söyler ama bizim içinde çalıştığımız yüksek matematikte sürekli manifold örneklerine daha çok rastladığımızı ve bunların daha temel bir rolü olduğunu belirtir. Yani, parçalı manifoldların örneklerine nicelik olarak sürekli manifoldlara nazaran daha çok rastlasak bile Riemann genel olarak matematikte özel olarak da mekân ve geometri çalışmalarında sürekli manifoldlara niteliksel farkından (sürekli olmaları sebebiyle yapılaştırmaya olanak tanımaları) ötürü daha büyük bir önem verir.

Öte yandan, Torretti Russell'ın ikinci iddiası, yani Riemann'ın "mekânın noktalar serisinden yapısallaştırılması"nın büyük bir olasılıkla Herbart'ın sistemindeki 'süreklilik teorisi' teorisinden etkilendiği iddiası ile kısmen hemfikirdir (Torretti, 1978, s.108). Çünkü Torretti'ye göre Herbart'ın süreklilik teorisi yardımıyla mekânı oluşturması ile Riemann'ın yapılaştırması arasında fark vardır. Herbart bu yapılaştırmada değişmez, katı dizilerin yapılaştırmasına (rigid line) sınırlı kalırken, Riemann *Habilitationsvortrag*'da sürekli dizilerin (continuous line) yapılaştırmasının yöntemini verir.

Sonuç olarak, Herbart'ın ton ve renk serilerini mekân ile kıyaslamasının Riemann üzerinde etkili olduğu fikrinde Torretti Russell ile hemfikirken, Riemann'ın 'manifold'un yapısallaşmasını "seri geçişler" (continuous transitions) olarak açıklama biçiminin -ki bu bir çeşit noktalar arasında durağan olmayan, karşılıklı, düzenli bir hareketi ima eder- Herbart'ın nokta kümelerinin yapısallaştırılması düşüncesi ile bir benzerliği olduğu iddiasında Russell'dan ayrılır; Riemann'ın yapılaştırma yöntemi sürekliliğin yöntemini verirken Herbart'ın yöntemi değişmez, esnek olmayan nokta kümesini sağlamakla yetinir.

2.3. Ferreiros'un Herbart-Riemann İlişkisine Dair Görüşleri

Ferreiros'a[7] göre Herbart ve Riemann arasındaki doğrudan bağlantılar vardır. Ferreiros Leibniz, Herbart ve Riemann arasında mekâna dair fikirleri bağlamında bir köprü kurmaya çalışır; "Leibniz gibi Herbart da Newton'cu ve Kant'çı, mekân anlayışını reddeder; (Herbart için) mekân daha ziyade, şeylerin "birlikte var olmasının" düzeni gibi görünmektedir" (Ferreiros, 2007: 46).

Ferreiros'a göre, Herbart'ın mekân ile ilgili fikirleri Leibniz'in mekânı aynı anda olmaklığın düzeni (space as order of coexistence) olarak tanımlaması ile uyumludur. Herbart için mekân deneyim sonucunda edinilen zihinsel imgelerin bir sonucu olarak hayal gücümüzde oluşan bir formdur. Bu görüşü takiben, her türlü zihinsel imge 'sürekli seri formların'-ki bu imgelerin hepsinde mekânın kavramlaşması cereyan eder- üretilebilmesine neden olabilirdi. Öyleyse her şey; zaman, mekân, madde, sayı geometrikleştirilebilirdi. Herbart için mekânsal formlar hem fiziksel dünyaya hem zihinsel temsillere uygulanabiliyordu. Herbart'ın Leibniz'ci ilişkisel uzay anlayışını, mekânsal formları türetmek amacıyla model olarak almış olması muhtemeldir. Ferreiros, Herbart-Riemann bağlantısına ilişkin bir noktaya daha dikkat çeker. Ona göre Riemann'ın 1853 makalesinde açıkladığı 'manifold' kavramı Gauss'un 1831 yılındaki makalesinde açıkladığı fikirlerden çok Herbart'ın fikirlerine yakındır. Bahsi geçen makalede Riemann 'manifold' fikrini fiziksel bir sistem içinde iki ya da *n* fiziksel büyüklüğün, değerlerinin belirlendiği ölçüm deneyindeki bütün olasılıklı sonuçların toplamına işaret ederek kullanır. Ferreiros bunu "bir sistem için durumların mekânının kavramı"(2007, s.47) olarak anlayabileceğimizi söyler ve bu şekilde alındığında ona göre 'manifold" Gauss'un

7 Ferreiros Riemann'ın 'manifold' kavramına farklı bir şekilde yaklaşır. Onun bu kavramın şekillenmesindeki temel vurgusu mantık, özellikle de set teori temelindedir. Yine de, Ferreiros (s. 39) set-teorik bakış açısıyla Riemann'ın 'manifold' kavramı arasında direk bir ilişki yerine set teorinin gelişiminin Riemann'ın kavramını yapısallaştırma motivasyonu ile bir paralellik olduğunu önerir. Bkz.: Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland; Boston: Birkhauser. Buna ek olarak, Detlef, L. (1999). *Turning Points in the conception of mathematics, Bernhard Riemann 1826–1866*: Birkhauser, ss. 231–232, de Ferreiros'un set teorinin gelişimi ile Riemann'ın 'manifold' kavramını şekillendirmesi arasında bir ilişki olduğu görüşünü paylaşır. Yine de, bu görüşün geçerli olup olmadığına bu çalışmada yer verilmeyecektir.

1831 tarihli makalesinde kullandığı anlamda 'manifold' tanımından oldukça farklı hale gelir. Gauss bu makalesinde manifoldları ilişkiler ve özellikler açısından ele alır ve manifoldları soyut büyüklükler teorisinden ayırmak gerektiğini ve manifoldların sezgisel örneklemelerinin mekânsal kavramların yardımıyla temsil edilebileceğini iddia eder. Ancak Ferreiros'a göre "Riemann söz konusu kavramın çok boyutlu manifold'a işaret ettiğini gösterir, üstelik bu kavram (multidimensional manifold) tüm geometrinin mekânsal sezgiye güvenmeksizin geliştirilebilmesi için tatmin edici bir zemin sağlar" (2007: 58).

Manifold'un bu şekilde tanımlanışı ve açıklanışı Herbart'ın her şeyin her özelliğinin farklı bir niteliksel süreklilikte yatan özellikler toplamı olarak ele alma düşüncesi ile paralellik göstermektedir.

Sonuç olarak Ferreiros'a göre Herbart'ın felsefesi ile Riemann'ın çalışmaları arasında görece daha çok direk bağlantı vardır. Ferreiros'a göre, Herbart'ın süreklilik ile ilgili açıklaması ile mekânı fiziksel nesnelerin özelliklerine bağlantılı olarak kavramsallaştırması ve Riemann'ın 'manifold'u açıklama ve tanımlama biçimi arasında doğrudan bağlantılar vardır.

2.4. Scholz'un Herbart-Riemann İlişkisine Dair Görüşleri

Scholz'e göre Herbart'ın şeyleri 'özellik demetleri' olarak görmesi ve buna bağlı olarak herhangi bir özelliğin 'niteliksel bir süreklilik' (qualitative continuum) olarak ele alınması Riemann'ın hemfikir olduğu bir görüş değildir. Buna zıt olarak, *Habilitationsvortrag*'ında Riemann günlük hayatta sürekli büyüklükler (continuous magnitudes) nadirdir, yalnızca yüksek matematiğin içinde sıklıkla onun örneklerini görürüz iddiasındadır.

Bu bahsedilen nokta, sürekli büyüklükleri yüksek matematiğin içinde görme, 19. yüzyıl matematiğinin baskın eğilimlerinden biriydi. Bu matematiksel eğilim Scholz tarafından şu şekilde açıklanıyor: "Geometrik dili cebirsel ya da birkaç değişkenlilerin analitik sistemlerine transfer etmek- ki bu eğilim en azından kısmen de olsa Gauss yoluyla Riemann tarafından biliniyordu ve bu Herbart'çı felsefeden bağımsız bir eğilimdi (Scholz, 1982: 423).

Scholz Riemann'ın kavram şekillendirmesinin arka planı ile ilgili olarak bir noktaya daha dikkat çeker. Bu nokta Riemann'ın 'manifold' kavramının çok boyutluluğu ayırt edici yenilikçi yanıdır. Ancak Herbart, şeylerin geometrikleştirilmesi fikrinde üç boyuta kendisini sınırlamıştı. Dolayısıyla Riemann'ın 'manifold' kavramını şekillendirmesi Herbart'ın görüşlerinden bağımsız ve daha ziyade yukarıda bahsi geçen matematiksel eğilimin bir sonucudur.

Sonuç olarak, Scholz'a göre büyük olasılıkla Herbart'ın seri formlarla ilgili felsefi spekülasyonları Riemann'ın ilgisini çekmişti. Burada asıl dikkat edilmesi gereken nokta, Scholz'un da altını çizdiği gibi, Riemann'ın 'manifold' kavramının temel özellikleri olan çok boyutluluk, bölgesel basit ve genel ölçekte karmaşıklık, uzatılmış büyüklüklerin niteliksel yüzünün niceliksel olanlardan ayrılması ve ondaki yapıların içsel bağlılığı ve ayrılması gibi özelliklerinin Herbart'ın geometrik düşünceleriyle bir ilgisinin olmaması, Riemann'ın tüm bunları matematiksel olandan geliştirmesidir. Scholz Herbart'ın asıl etkisinin, en açık haliyle Riemann'ın matematiğin amacı ile ilgili düşünceleri bağlamında görüleceğini iddia eder (Scholz, 1982: 424).

Scholz'un değerlendirmelerini takiben Riemann'ın ve Herbart'ın bilim anlayışları ile ilgili üç temel noktanın altı çizilebilir:

1) Riemann bilimi "doğayı kavramlarla algılama girişimi" (Scholz, 1982: 426) olarak anlar. Bu girişim içerisinde zıtlıklardan doğan problemler çözülür. Bilimsel kavramların biçimlenmesi, gelişmesi ve genişletilmesi bağlamında Riemann matematiğin pozisyonunu Herbart'ın felsefeye atfettiği role benzer şekilde görür. Herbart felsefeye merkezi kavramlar oluşturma ve bu kavramlar aracılığıyla birlikteki çokluğa ulaşılması rolünü biçmişti. Riemann da benzer şekilde bilimler içerisinde bu merkezi kavramlara ulaşma ve onlar etrafında çalışmanın matematikle mümkün olacağını düşünmektedir.

2) Riemann'ın matematiğin farklı alanlarındaki (karmaşık fonksiyon teorisi, geometri) çalışmaları "kavramsal yapıların" ayrıntılandırılmasını göstermektedir.

3) Bu nokta -ki **1.** maddenin açıklanmasını içermektedir- Herbart için felsefenin amaçlarından ve Riemann için matematiğin amaçları arasındaki benzerliklerden kaynaklanmaktadır. Herbart'ın bilimler ve felsefe arasında gördüğü ilişki Riemann'ın matematik ile bilimler arasında gördüğü ilişkiye paralellik göstermektedir. Sonuç olarak matematik, bilimler ve felsefe arasındaki ilişkide Riemann matematiği, Herbart da felsefeyi bilimler ile ilişkide bir çeşit köprü olarak görür. Öte yandan hem Herbart hem de Riemann için felsefe ile matematik arasında daha yakın bir ilişki vardır. Matematik, bilimler ve felsefe arasında kurulan bu karşılıklılık ilişkileri Riemann'ın matematiksel çalışmalarının epistemolojik arka planında durmaktadır. O bu ilişkileri bir matematikçi gözüyle inceleyip yorumlamış ve matematik yapma biçimine dâhil etmiştir. Özellikle Herbart'ın matematiksel araştırmanın yönüyle ilgili fikirleri Riemann'ın matematik yapma biçiminin merkezinde durmaktadır. Riemann'ın matematiksel ve geometrik fikirleri üzerinde Herbart'ın felsefesinin etkisinin dolaylı olması onun Riemann matematikte öne sürdüğü yenilikçi düşüncelere üzerindeki etkisinin önemini azaltmamalıdır.

3. Sonuç

Şu halde ortaya çıkan sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

1) Herbart'ın 'seri formlar teorisi' (*Reihenformen*) Riemann'ın 'manifold' kavramını şekillendirmesinde teşvik edici bir rol oynamıştır.

2) Yine de Scholz'un açık bir şekilde vurguladığı gibi 'manifold' kavramı köklerini 19. yy. Almanya'sının matematiğinin ruhunda bulunmaktadır. Bu dönemde geometrik olmayan alanların geometrikleştirilmesi eğilimleri vardı.

3) Riemann'ın matematiğe bakışı ile Herbart'ın felsefeye bakışı temel bazı benzerlikler taşımaktadır. Hatırlamak gerekirse, Herbart'a göre matematik felsefi biçimde ele alındığında felsefenin bir parçasıdır, Riemann'ın matematik yapma biçimi de tam da Herbart'ın matematiğin metodu ile ilgili önerisi ile uyumludur.

4) Riemann Herbart'ın fikirlerini, bir bilim adamının gözüyle Herbart'ın fikirlerini matematikle uyumlu hale getirmiştir. Herbart'ın Riemann üzerindeki etkisi genel anlamda matematiğin metodolojisi ve görevi ile ilgili eğilimlerinde görülür. Riemann Herbart'ın bu konularla ilgili görüşlerini dikkatlice çalışmış ve kendi görüşleri ışığında yorumlamıştır.

Bu değerlendirmeler ışığında temelde Herbart'ın Kant'ın uzay görüsü fikri ile hemfikir olmayıp uzayı daha çok Leibniz'ci bir çerçevede "ilişkisellik" bağlamında ve Kant'ın uzay görüsünü eleyecek şekilde ele alması, geometriyi "soyut ilişkiler bilimi" olarak değerlendirmesi Riemann'ı doğrudan olmayan bir şekilde etkiler. Riemann da, manifoldlarla genel uzay kavramını, fiziksel şeylerin içinde olduğu, fiziksel hareketin içinde gerçekleştiği uzayla ise "Raum"u kasteder. Herbart'ın Kant'ın uzay görüsünü elemeye çalışması Riemann'ın uzay görüsüne başvuru olmaksızın ya da görülenebilir uzayın yalnızca bir seçenek olarak değerlendirilebileceği iddiasında bulunmasında etkili olduğu düşünülebilir.

Öte yandan Herbart'ın Riemann'ın manifold kavramını açıklamasında doğrudan etkilememiş olması, etkisinin daha genel bir seviyede görülmesi anlaşılabilir bir durumdur. Riemann Herbart'ın önerilerini bir matematikçinin[8] gözüyle ele almış ve kendi çalışmalarında değerlendirmiştir. Bu anlamda Riemann'ın bu tutumu tam da Herbart'ın felsefeden bilimlerle ilişkisinde yapmasını beklediği şeydir. Herbart'ın felsefesi Riemann'ın araştırma programının nasıl olması gerektiği ve hangi yönde yapılması gerektiğinin yani matematiksel çalışmanın yönü[9] sorusunun yanıtını vermiştir. Sonuç olarak Herbart'ın Riemann'ın manifold kavramını açıklamasında doğrudan bir etkisinin olmaması bu kavramın açıklanmasında çok önemli bir etkisi olmadığı anlamına gelmemektedir:

8 Herbart, Fichte ve özellikle de Kant'ın düşüncelerini yorumlayan, netleştiren ve bilim insanları için daha kolay kabul edilebilir hale getiren bir filozoftu. Herbart'ın etkilediği diğer bilim insanlarına Mach ve Grassman örnek gösterilebilir. Bkz. Eric, C. Banks (2005). "Kant, Herbart and Riemann", *Kant Studies*, Vol 96 Issue 2, ss. 208-209.

9 Scholz Herbart'ın matematiksel araştırmanın oryantasyonu bağlamındaki Herbart-Riemann ilişkisinin benzerinin Schleiermacher-Grassmann arasında da bulunduğunu iddia eder. Grassmann'ın döneminde çok tanınmamış olması ama Riemann'ın dönemin matemetiğinde merkezi bir figür olması dolayısıyla Herbart-Riemann arasındaki ilişki Schleiermacher ve Grassmann arasındaki ilişkiden daha çok dikkat çekmektedir. Bkz. Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann", *Historia Mathematica*, 9, s. 428.

Herbart'ın genel olarak epistemolojisi özellikle de felsefenin bilimlerle ilişkisi ile ilgili görüşleri Riemann'ın matematiğin neyi başarması gerektiği ile ilgili fikirlerini etkilemiştir. Herbart'ın realist epistemolojisinde bilginin deneyimden yola çıkılarak fenomenin açıklanmasında temelde yatan gerçekliğin kavramsal olarak netleştirilmesi ile elde edilebileceğini düşünür. Bu bakış açısıyla matematiğin bir bilim olarak nesnesine net bir kavramsal bakış geliştirmesi gerektiği fikrinin manifold kavramının açıklanmasında Riemann'ı etkilemiş olması mümkündür. Bu noktada yine Herbart'ın her disiplinde merkezi bir kavramla (*Hauptbegriff*) çalışma önerisi yine Riemann'ın geometrisini etkilemiştir. Manifold kavramı *Habilitationsvortrag*'ın ilk bölümünde tanımlanır ve *Habilitationsvortrag*'ın diğer iki bölümü olan geometri ve fizik kısımlarında tekrar ele alınır. Bu iki kısımda yapılan tüm belirlenimler manifold kavramı temelindedir. Bu girişim kavramlardaki ya da kavramlarla deneyim arasındaki ilişkiler sonucunda ortaya çıkan sorunların dereceli olarak çözülmesiyle gerçekleşir. Burada yine Herbart'ın temel kavramların şekillendirilmesi, geliştirilmesi ve kapsamının genişletilmesi ile ilgili fikirlerinin yankısı görülür. Sonuç olarak Riemann'ın *Habilitationsvortrag*'ında "Yazar (Riemann'ın kendisi) epistemolojide Herbartçıdır, ama ontolojide değil" derken ne demek istediği daha anlaşılır hale gelir. Riemann Herbart'tan epistemolojik olarak iki yönden etkilenmiştir; öncelikle onun epistemolojisinin temellerini alıp soğurup, daha sonra bir matematikçinin gözüyle inceleyip bilim geleneğinin içerisinde bu temelleri geliştirmiştir.

Kaynakça

Detlef, L. (1999). Turning Points in the conception of mathematics, Bernhard Riemann 1826–1866: Birkhauser.

DiSalle, R. (2006). *Understanding Space –Time*, Cambridge University Press, New York.

Eric, C. Banks (2005). "Kant, Herbart and Riemann", *Kant Studies*, Vol 96 Issue 2, s.208-234.

Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics.* Basel, Switzerland; Boston: Birkhauser.

Helmholtz, H. V. (1977). *Epistemological Writings*, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, ed.Robert T., S Cohen and Marx W. Wartofsky, Dordrecht Reidel Publishing, içinde s.39-71.

Kant, I. (2004). *Metaphysical Foundations of Natural Science,* translated and ed. M. Friedman, Cambridge University Press.

Russell, Bertrand (1956). *An Essay on The Foundations of Geometry,* Dover Publications.

Scholz, E. (1982). "Herbart's influence on Bernhard Riemann", 9, *Historia Mathematica*, s. 413-440.

Torretti, R. (1978). *Philosophy of geometry from Riemann to Poincare.* Dordrecht: Reidel: D. Reidel Publishing Company.