Ege Eğitim Dergisi 2006 (7) 2: 75–94

Fonksiyon Öğreniminde Kavramsal Zorluklar

Alattin Ural[1]

Öz

Fonksiyon kavramı matematikte en önemli ve temel fikirlerden biridir. Matematikteki çoğu kavramın tanımlanmasında ve kavramlar arası geçişin sağlanmasında birleştirici bir rol oynar. Öğrenciler fonksiyon kavramı ile ilk olarak dokuzuncu sınıfta karşılaşırlar ve bu kavram onlara oldukça soyut ve anlaşılmaz gelir. Fonksiyon kavramını yapısal boyutuyla kavramada birtakım zorluklar ve kavram yanılgıları yaşarlar. Bu zorluklar ve kavram yanılgıları oldukça çeşitlidir. Bunlar genellikle; fonksiyonun çeşitli gösterimleri, bu gösterimler arası geçişler, fonksiyonla ilgili notasyonlar, sembolik yazılımlar, ters fonksiyon, bileşke fonksiyon ile ilgili kavramsal bilgilerdir. Bunların aşılmasında öğretmenin fonksiyon kavramıyla ilgili hazırlayacağı öğretim materyallerinin (içeriğin) ve kullanacağı öğretim yönteminin önemi büyüktür. Bu çalışmada; yaşanan bilişsel zorluklara, kavram yanılgılarına ve fonksiyon kavramının hangi temelde öğretilmesi gerektiğine dair geniş bir literatür bilgisi verilmeye çalışılmıştır.

Anahtar Sözcükler: *Fonksiyon, Kavram Yanılgısı, Kavramsal Zorluk.*

[1] Dr. Alattin Ural, Aydınlıkevler Anadolu Lisesi, Keçiören/Ankara E-Posta: altnurl@gmail.com

Ege Eğitim Dergisi 2006 (7) _: _–_

Conceptual Obstacles Concerning the Learning of the Function

Abstract

The concept of function is one of the most important and central ideas in mathematics. It plays an important role in describing most many concepts and connecting the concepts in mathematics. Students learn this concept in ninth grade and it seems quite complex and abstract to them. They face obstacles and misconceptions while working with functions on the structural side of it. These obstacles and misconceptions are various. In general, these are conceptual knowledge about different representations of a function, transitions among these representations, notions of function, symbolical representations, inverse function, composite function. Instructual materials and teaching methods are very important to succeed in them. In this study; wide range of literatural knowledge about the known cognitive obstacles, misconceptions and how to teach the concept of function have been submitted.

Key Words: *Function, Misconceptions, Cognitive obstacles.*

1. Öğrencilerin Fonksiyon Kavramıyla İlgili Yaşadıkları Zorluklar ve Kavram Yanılgıları

Fonksiyon kavramı, matematiğin temel ve birleştirici bir fikridir (Brieske, 1973) ve çoğu matematikçi ve matematik öğretmeni de bu fikre katılır (Selden ve Selden, 1992) (Akt. Rho, 2000). NCTM (1989; 2000) tarafından matematikte birleştirici kavramların önemi vurgulanarak; fonksiyon kavramı, orta ve yüksek öğretim matematik müfredatı için merkezi ve diğer kavramları organize edici bir fikir olarak görülmüştür (Akt. Dennis, 2001). Sajka (2003) fonksiyon kavramının gösteriminin ve yorumunun çeşitliliğiyle matematiğin temel kavramlarından biri olduğunu belirtmiştir. Biehler, Scholz ve Winkelman'e (1993) göre fonksiyon kavramı matematik müfredatının tamamını etkileyen ve başka matematiksel kavramların öğretiminde kullanılan bir kavramdır. Matematik dersi diğer derslere göre daha güçlü bir sıralı yapıya sahip olduğundan Altun (1998), fonksiyonu tam olarak kavrayamayan bir öğrencinin fonksiyon kavramının önşart olduğu başka bir kavramı da kavramasının zor olacağını belirtmiştir. Breidenbach (1992), Even (1990), Moschkovich (1993), Schwarz&Yerushalmy (1992) ve Sfard (1992) fonksiyonları işlem ve kavram açısından tanımlamışlar ve bu kavramların ikisinin de cebir öğreniminde önemli olduğunu belirtmişlerdir (Akt: Moschkovich, 2004). Breslich (1928), nicelikler arasındaki ilişkileri ele alan fonksiyonel düşünme olmadan matematiği anlamanın ve değerini bilmenin mümkün olamayacağını belirtmiştir.

1450 ve 1650 yılları arasında fonksiyon kavramına zemin teşkil edecek çeşitli gelişmeler olmuştur. Bunlar; reel sayıları ve hatta karmaşık sayıları kapsayan sayı kavramının genişlemesi (Bombeli, Stifel ve diğerleri), sembolik bir cebirin geliştirilmesi (Viete, Descartes ve diğerleri), bilimin temel problemlerinden olan hareket araştırmalarının yapılması (Kepler, Galileo ve diğerleri) ve cebir ile geometrinin buluşmasıdır (Fermat, Descartes ve diğerleri). Fakat 18. yy'ın başlarına kadar fonksiyon notasyonlarının henüz yayılmamış olmasında, reel sayıların kontinyumu (continiuum) ve sembolik notasyonların gelişimi gibi gerekli olan cebirsel yapıların oluşmaması ve fonksiyonun soyut notasyonun tanımlanmasını gerektirecek ihtiyacın ortaya çıkmamasından kaynaklı motivasyon yetersizliği başlıca nedenler olarak gösterilmiştir (Kleiner, 1989).

Vinner (1983), fonksiyon notasyonunun fonksiyonun kuralının karekteristiğiyle sınırlanmaması gerektiğini, çünkü kuralın fonksiyonların farklı açılardan düşünülebilir olma özelliğiyle çeliştiğini belirtmiştir. Sierpinska (1992) fonksiyon notasyonunu, insanların dünyadaki gözlenen ve yaşanan değişimlere uyum sağlama çabasının bir sonucu olarak görmektedir. Sierpinska, değişen objeleri x ve y sembolleriyle göstererek; f sembolünü, objeleri başka objelere dönüştüren bir işlem veya değişimler arasındaki bir bağıntı olarak tanımlamıştır (Akt: Rho, 2000).

Schaaf (1930), fonksiyon kavramının geometrik, cebirsel ve girdi-çıktı makinesi (fonksiyon makinesi) olarak zihinsel görüntülerinin olduğunu belirtmiştir. Schaaf (1930), fonksiyon kavramının geometrik ve cebirsel iki zihinsel imaj arasında bir rekabete neden olduğunu, ardından bu rekabete fonksiyonun bir girdi-çıktı makinesinin ussal imajı ile benzerliğinin yarattığı yeni bir kavramın da katıldığını ve böylece fonksiyonun geometrik kavramının gittikçe terk edilmeye başlandığını ve yeni rekabetin ussal (soyut, farazi, postulatlara dayalı) fonksiyon kavramı ile eski cebirsel (somut, analitik, yapısal) fonksiyon kavramı arasında olacağını ifade etmiştir.

Fonksiyonlar, anlaşılmasında zorlukların olduğu bir kavramdır (Hauge, 93; Gaea, Orit ve Kay, 1990; Iaderosa ve Malara, 1999). Bunlar arasında en belirgin olanları Sierpinska (1992) tarafından belirlenen ve açıklanan epistemolojik zorluklardır. Bu zorluklar bir yandan matematiğin felsefesiyle, matematiksel metotlarla ve bilinçsiz yapılan düşünme stratejileriyle, diğer yandan da fonksiyon kavramı ve ilişkili olduğu terimlerle (fonksiyonun tanım kümesi, değer kümesi, görüntü kümesi, fonksiyonun tersi, değişken kavramı, bağımlı ve bağımsız değişkenler, koordinatlar, fonksiyonun grafiği, tablosu, fonksiyonun kuralı gibi) ilgilidir (Akt. Sajka, 2003).

Fonksiyonlar matematiğin temel kavramlarından biri olmasına rağmen Davis (1984), Tall ve Vinner (1981) öğrencilerin çoğunun ne yazık ki fonksiyon kavramını çok basit ve ilkel bir şekilde anlayıp, kökleşmiş kavram yanılgılarına sahip olduklarını belirtmişlerdir (Akt. Meel, 2003). Buna çözüm üretme açısından öğrencilerin fonksiyon kavramını anlama seviyelerini tanımlamak için çok sayıda girişimler olmuştur. Dyrszlag (1978), Bergeron ve Herscovics (1982) ve Vollrath (1984) tarafından böyle seviyeler bulunmaya çalışılmıştır. Sierpinska (1992) tarafından yapılan bir çalışmada öğrencilerin fonksiyon kavramıyla ilgili yaptıkları aktiviteler ve belli başlı anlama kategorileri şu şekilde tanımlanmıştır:

1. Fonksiyonu nümerik denklemler ve bilinmeyenler olarak düşünme,

2. Fonksiyonu yeni bir işleme veya düşünmeye başlama noktası olarak görme (Bir denklemi belirtme başlangıcı olarak görme). Böylece fonksiyonu bir denklemi çözmeyle ilişkilendirme,

3. Fonksiyonu bir formül olarak değerlendirme,

4. Fonksiyonu bir işlem süreci olarak görme (Bir sayı verildiğinde yeni bir sayı bulma) ve

5. Grafik çizmeye yarayan bir çeşit formül olarak görme.

Fonksiyon yapısal olarak bir kavramı, işlemsel olarak ise bir işlem sürecini ifade eder ve fonksiyonların farklı iki yolla anlaşılması fonksiyon öğreniminde bir zorluk yaratır (Sfard, 1991). Kuratowski ve Mostowski (1966) fonksiyonunun yapısal açıdan bir sıralı ikililer kümesi olduğunu, Skemp (1971) işlemsel olarak da bir hesaplama süreci veya iyi tanımlı bir sistemden bir başka sistem oluşturma metodu olduğunu belirtmiştir (Akt: Sajka, 2003). Sfard'a (1991) göre biri diğerine baskın gelmeyen bu iki anlama yolu aslında birbirini tamamlamakta ve tutarlı bir bütünlük oluşturmaktadır.

Fonksiyon notasyonu bir başka açıdan da birden fazla anlama gelir. Sierpinska (1992) fonksiyonları anlamada esnekliğin gerekli olduğunu vurgulamıştır. Örneğin f(x) sembolü bir fonksiyonun adını ve aynı zamanda da f fonksiyonunun değerini gösterir. Sierpinska yorumun içeriğe bağlı olduğunu ancak bu durumun ileri seviyede olmayan bir öğrencinin kafasını karıştırabileceğini belirtmiştir.

Even (1993), fonksiyonun günümüzde kullanılan tanımını şu şekilde vermiştir: A ve B verilen iki küme olmak üzere, AxB kartezyen kümesinin özel bir şartı sağlayan bir alt kümesine, A kümesinden B kümesine bir f fonksiyonu denir. Bu özel şart; A'daki her eleman için B'nin sadece bir b elemanı vardır öyle ki $(a,b)\in f$ dir. Burada, A'ya f fonksiyonunun tanım kümesi ve B'ye değer kümesi denir. Bu tanım formal Drichlet-Bourbaki tanımı ile tutarlıdır. Bir çok araştırmacı, öğrencilerin bu tanımı problem çözerken pek kullanmadıklarını belirtmiştir (Dreyfus ve Eisenberg, 1983; Even, 1993; Ferini, Mundy ve Graham, 1991; Markovits, Eylon ve Bruckheimer, 1983, 1986; Marnyanskii, 1975; Vinner, 1983; Vinner ve Dreyfus, 1989) (Akt. Meel, 2003). Vinner ve Dreyfus (1989) tarafından yönetilen bir çalışmada, öğrencilerin fonksiyonu tanımlamaları istenmiş ve alınan cevaplar altı kategoride toplanmıştır.

1) Formal Drichlet-Bourbaki tanımı,
2) İki değişken arasındaki bir bağımlılık bağıntısı,
3) Belirli bir ölçüde düzenlilik gerektiren bir kural,
4) Bir işlem veya işlem süreci,
5) Bir formül, cebirsel ifade veya denklem,
6) Bir grafik veya sembolik formdaki bir gösterim.

Öğrenciler genellikle fonksiyonu taşıma eylemiyle ilişkilendirerek bir formül olarak algılarlar (Graham, Ferini ve Mundy, 1990; Breidenbach, Dubinsky, Hawks ve Nichols, 1992). Bunun bir sebebinin, derslerde fonksiyonlarla ilgili problemlerin büyük bir kısmında öğrencilerin fonksiyonu bir formül olarak ele almalarının olabileceği belirtilmiştir (Even, 1993; Vinner ve Dreyfus, 1989).

Böyle bir bakış fonksiyon kavramının yapısal temelde anlaşılmasını şüphesiz sınırlandıracaktır.

Leinhard (1990) ve Vinner&Dreyfus (1989), öğrencilerin bağıntıları fonksiyon olup olmamalarına göre sınıflamaları esnasında yaptıkları hataların çoğunun Dirichlet-Bourbaki tanımının kabul görmesindeki yetersizliğin bir sonucundan meydana gelmediğini vurgulamışlardır. Öğrencilerin Dirichlet-Bourbaki fonksiyon tanımını kabul ettikleri fakat fonksiyonları sınıflamaları istendiğinde neredeyse fonksiyonun eski tanımlarına oldukça benzeyen kişisel deneyimlerine daha fazla güvendikleri belirtilmiştir. Fonksiyonun eski tanımları şu şekildedir: "iki değişken öyle ilişkilidir ki birindeki değişim diğerinde de değişim yaratır, bu durumda ikinci değişkene birincinin bir fonksiyonu denir" veya "x değişkenini içeren ve x'e bir sayı verildiğinde net bir değer alan matematiksel bir ifadeye x in bir fonksiyonu denir" (Hight, 1968). Bu yüzden, yapılan hataların bir kavram yanılgısının sonucundan kaynaklanmadığı daha çok uygulamada öğrencilerin yanlış kavram bilgisiyle hareket etmelerinden kaynaklandığı vurgulanmıştır (Meel, 2003).

Carlson (1998), çoğu öğrencinin cebirsel tanımlı bir fonksiyonu ve denklemi ayrı tutmada zorluk yaşadığını belirtmiştir. Carlson ve Oehrtman'a (2005) göre eşitlik işaretinin çeşitli kullanımları olduğu ve çoğu eğitimcinin bir denklem gibi formül kullanmayı tercih ettikleri düşünüldüğünde bu şaşırtıcı değildir. Öğrenciler için denklem kelimesinin belirsiz ve çeşitli şekillerde kullanımı, öğrencilerin iki değişen nicelik arasındaki bir ilişkiyi temsil etmede kullanılan eşittir işaretinin kullanımı ile iki ifadenin eşitliğini ifade etmede kullanılan eşitlik işaretinin kullanımını ayırt etmelerinde zorluk yaşamalarına sebep olmaktadır.

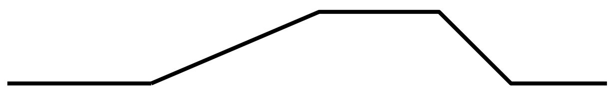
Carlson ve Oehrtman (2005) öğrencilerin fonksiyonu; girdi değerlerinin kümesini, çıktı değerlerinin kümesine eşleme şeklinde kavramamalarının sonucunda, fonksiyonun grafiğini sabit bir nesne gibi gördüklerini belirtmiştir. Carlson ve Oehrtman'a (2005) göre öğrenciler, bir fonksiyonun grafiğini düzlemde bir eğri veya sabit bir obje olarak düşünürler ve girdi değerlerinin kümesini çıktı değerlerinin kümesine bir eşleme olarak göz önüne almazlar. Bu durum, öğrencilerin bir fonksiyonun grafiğini çözümlemelerini ve yorumlamalarını şüphesiz engellemektedir.

Breidenbach'a (1992) göre, öğrencilerin çoğu fonksiyonun tek bir cebirsel formülle tanımlanabilir olduğuna inanmaya eğilimlidirler ve bu yüzden bir fonksiyonun kuralı parçalı olarak verildiğinde kafaları karışır. Bu eğilimleri öğrencilerin, fonksiyonlar hakkında esnek düşünmelerini engeller ve bütün fonksiyonların her zaman düzgün bir şekilde davrandıkları şeklinde hatalı bir bilgiye sahip olmalarına yol açar. Öğrenciler örneğin

$f_1(n) = n^2$ ve $f_2(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ gibi aynı fonksiyonu temsil eden farklı formül kullanımlarını kavramada güçlük çekerler (Carlson ve Oehrtman, 2005).

Diğer taraftan, Schwarz ve Hershkowitz (1999) çoğu öğrencinin fonksiyonları lineer (1. dereceden) veya kuadratik (2. dereceden) olduğunu varsayma eğilimde olduğunu belirtmiştir. Carlson ve Oehrtman (2005) bu durumun nedenini fonksiyonların tipik olarak okul müfredatlarında çoğu zaman lineer veya kuadratik olarak tanıtılmasına bağlamaktadır. Örneğin öğrenciler rasyonel veya köklü ifadeleri fonksiyon olarak değerlendirmeyebilirler.

Öğrencilerin fonksiyonlarda yaşadığı bir başka zorluk ise fiziksel bir olayın görsel nitelikleri ile olayı modelleyen bir fonksiyonun grafiğinin benzer niteliklerini karıştırmalarıdır. Bir fonksiyonun grafiğini, girdi değerlerinin bir kümesinden çıktı değerlerinin bir kümesine bir dönüşüm olarak düşünmekten ziyade konu olan fiziksel durumun bir resmi olarak düşünürler. Reel yaşamda somut durumları modellemede fonksiyonları kullanırken sık sık topografiksel yapılar kullanılır ve öğrenciler bir fonksiyonel ilişkinin grafiğini çizerken bu topografiksel şeklin belirgin özelliklerinden etkilenebilirler. Böylece öğrencilerin yapabileceği çeşitli hata tipleri ortaya çıkar (Carlson, 1998; Monk, 1992; Monk ve Nemirovsky, 1994). Örneğin Şekil 1'de inişli-çıkışlı bir arazinin yandan grafiksel bir resmi verilmiştir. Bu arazide bisiklet süren bir sürücünün hız-konum grafiğini çizerken öğrenciler çizecekleri grafiğe verilen arazi şeklinin özelliklerini yansıtabilirler (Monk, 1992).



Şekil 1. Bir arazinin yandan topografiksel resmi

Öğrencilerin fonksiyonlarla çalışırken yaşadığı bir diğer yaygın bilişsel zorluk, fonksiyon notasyonlarını kullanabilmeleriyle ilgilidir. Notasyonlar geniş çapta bir bilgiyi özetler nitelikte olduğu için anlamakta zorluk çekerler. Örneğin Carlson (1998) öğrencilere, s'yi t'nin bir fonksiyonu olarak göstermeleri istendiğinde hangisinin bağımlı hangisinin bağımsız değişken olduğu veya bunun nasıl yazılacağı konusunda zorluklar yaşadığını belirtmiştir.

Öğrenciler ters fonksiyon kavramıyla ilgili olarak da öğrenme zorluğu yaşarlar. Girdi ve çıktıların genel bir görüntüsü olmaksızın öğrenciler bir fonksiyonu ters çevrilebilir bir işlem süreci olarak düşünemezler. Fakat sadece x ve y değişkenlerinin yerlerini değiştirerek x'i çözme veya fonksiyonun grafiğini y=x doğrusuna göre simetriğini alma gibi işlemlerle ters alma işlemlerini pratik olarak yapabilirler ve ters fonksiyon kavramını anlamaları bu kadarla sınırlıdır. Eğer bu yaptıklarının mantığını anlayamazlarsa bu işlemsel yaklaşım öğrenciler için gerçek bir anlam taşımaz veya çok az bir anlam taşır (Carlson, Oehrtman, 2005). Carlson, Oehrtman ve Engelke (2005) tarafından iki bin öğrenci üzerinde yapılan bir araştırmada, fonksiyonun bazı değerlerine ait bir tablo verildiğinde, öğrencilerin sadece %17'sinin verilen bir değer için fonksiyonun tersinin değerine karar verebildikleri belirlenmiştir.

Diğer bir zorluk ise öğrencilerin bir durumu veya modeli açıklayıcı bir fonksiyona ait tabloyu tamamlamaya çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. Ayrıca öğrenciler fonksiyonel değişkenler olan sembolleri tablodan denkleme dönüştürürken de zorluk yaşarlar (Herscovics, 1989). Kieran (1992) öğrencilerin denklemlerden ve tablolardan hareketle grafik çizmede ve grafiği yorumlamada da zorluklar yaşadıklarını belirtmiştir (Akt. Olsen, 1995).

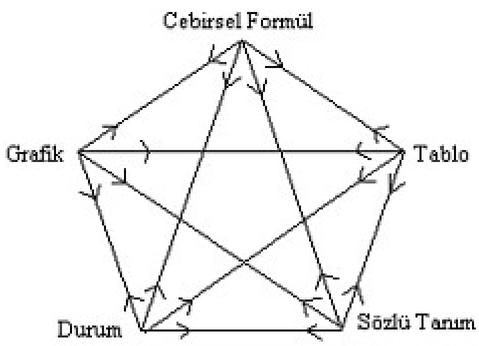
Diğer taraftan, öğrenciler fonksiyonel değişkenleri göstermek için seçilen harflerin keyfiyetinin de farkında değildirler. Onlar literatürde kullanılan bir sembolü değiştirmenin bir fonksiyon tablosunun değerlerinde bir değişikliğe neden olabileceğine inanırlar (Herscovics, 1989). Öğrenciler fonksiyonu genellikle f(x), g(x) gibi sembollerle öğrendiklerinden $\varphi(\sigma)=2\sigma+k$ gibi bir ifadeyi fonksiyon olarak algılamakta güçlük çekerler.

2. Fonksiyon Kavramının Öğretimine İlişkin Görüşler

Fonksiyon kavramı bağıntısal anlamda, girdilerin kümesi ile çıktıların kümesi arasında neden sonuç ilişkilerini kapsayan bir bağıntı olarak tanımlanacağı gibi, temel düşünce olarak bir niceliğin bir ya da daha fazla nicelikle olan bağıntısı olarak da tanımlanabilir (Hedrick, 1938). Burada karşımıza iki soru çıkmaktadır; bağımlı ve bağımsız olan nicelikler hangileridir? Bağımlı ve bağımsız değişkenler birbirleriyle nasıl etkileşmektedirler? Bu sorular matematiksel konuların yanısıra, yaşam içindeki problemlerde ve bir çok bilim dalında da karşımıza çıkar. Bu soruları düşünmeyle fonksiyonel düşünme de başlar. Bir otomobilin hareketini etkileyen hava direncini düşünürsek; direncin hıza bağlı olduğunu söylediğimizde fonksiyonel düşünmeye başlamış oluruz. Fonksiyonel düşünmek için tam formülü bilmemize gerek yoktur. Herhangi bir gözlemin sonucunda hızın arttıkça direncin de artacağını söyleyebiliriz. Deneysel bilgi araştırması fonksiyonel düşünmenin bir başka aşamasıdır. Çeşitli hızlarda alacağımız direnç ölçüm sonuçlarına dayanarak oluşturacağımız bir tabloya dayanarak çizebileceğimiz bir grafik, fonksiyonel ilişkinin anlaşılmasına yardımcı olur (Hedrick,1938).

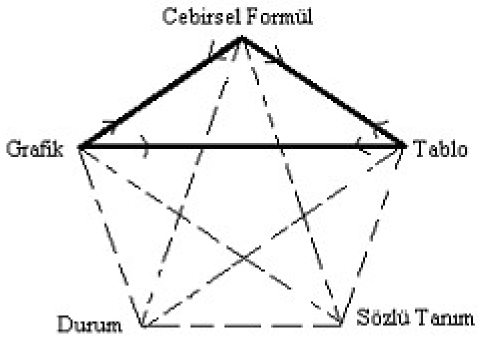
Fonksiyon kavramının anlaşılmasında "değişken" kavramı önemlidir. Değişken kavramının anlaşılmasında da bir takım öğrenme zorlukları vardır ve bununla ilgili bazı yaklaşımlar vardır. Wagner, değişken kavramının anlamsal, söz dizimsel ve matematiksel rolü kadar sembol, referans ve içerik şeklinde sınıflandırabilen diğer üç bileşeninin de önemli olduğunu vurgulamıştır. Usiskin ise değişken kavramına ilişkin yaklaşımında sayı örüntülerini kullanmıştır. Bu şekilde de, öğrencileri genelleme yapmaya yönlendirmiş ve bu noktada değişken kavramının önemini ortaya koymuştur. Daha sonrada, somut materyaller yardımıyla değişken kavramı ile reel dünya arasında bir ilişki kurmaya çalışmıştır. Bu modellere ilave olarak, değişken kavramının öğretiminde bilgisayar ortamlarından da yararlanılabilir (Dede, 2005). Malik'e (1980) göre fonksiyon fikri öğrencilere üç farklı aşamada sunulmalıdır. Öncelikle öğrencilere değişken kavramı öğretilmelidir. Daha sonra ilgili problemlerde değişim fikrini tecrübe etmeleri sağlanmalı ve son olarak da iki küme arasında ilişki kurma fikri verilmelidir.

Janvier (1987), matematiksel fonksiyon kavramını öğrenmede tasarladığı pentagonal modeli bir çatı olarak sunmaktadır (Akt: Bowman, 1993) (Şekil 2). Pentagon modelin beş çizgisi matematiksel fonksiyonun beş yaygın gösterimini belirtmektedir; grafik, tablo, cebirsel formül, sözlü tanım ve durum (içerik). Köşegenler, gösterimler arasındaki geçişi, tek yönlü geçişler ise kaynak-hedef geçişlerini göstermektedir.



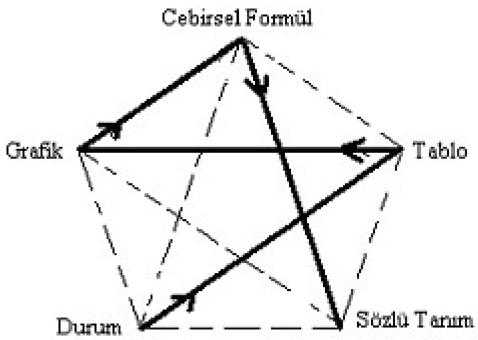
Şekil 2. Pentagonal Model

Matematiksel fonksiyon kavramı Dirichlet-Bourbaki küme-teorik tanımına dayalı matematiksel perspektiften (Vinner ve Dreyfus, 1989) veya fonksiyonun değişken büyüklükler arasındaki bir bağıntı olarak sunulduğu bilimsel perspektiften (Sierpinska, 1992) verilebilir. Matematiksel perspektif; cebirsel formüllere, tablolara, grafiklere ve bu üç gösterim arasındaki ilişkisel dönüşüme odaklanır (Şekil 3). Matematiksel perspektifte; bir fonksiyon boş kümeden farklı A ve B kümeleri arasında, A'nın her bir elemanını B'nin yalnızca bir elemanına eşleyen bir ilişkidir.



Şekil 3. Fonksiyon Kavramına Matematiksel Perspektif

Bir kavramın ortaya çıkmasının temelinde çoğu zaman mevcut yaşanan problemlerin yattığı düşünüldüğünde, fonksiyon kavramına daha bilimsel (sistematik, rasyonel) bir perspektiften yaklaşılabilir. Bilimsel perspektifte tüm bu beş gösterimi ve durumdan tabloya, tablodan grafiğe, grafikten cebirsel formüle ve cebirsel formülden sözlü ifadeye geçişler de dahil edilir (şekil 4) (Akt: Bowman, 1993). Sierpinska (1992), bir kavramın anlamının ona kaynağını veren problemlerde ve sorularda yattığı varsayıldığında, öğrencilerin fonksiyonu kavramaları için bilimsel perspektifin oldukça mantıklı göründüğünü belirtmektedir.



Şekil 4. Fonksiyon Kavramına Bilimsel (Sistematik) Perspektif

Pentagonal modelin çatısındaki bu iki perspektif kıyaslandığında, fonksiyonun çeşitli gösterimleriyle ve fonksiyon kavramının geniş çapta ve derinlemesine anlaşılmasını sağlamasıyla ilgili problemler sadece matematiksel fonksiyonun öğretilmesi yollarına özgü olarak görülebilir. Ancak bu model;

(a) Müfredat tasarlama ve öğretimsel uygulamalardaki eksiklikleri belirlemede,

(b) Matematiksel fonksiyon kavramını öğretme ve öğrenme araştırmalarını tasarlama ve yorumlamada da kullanılabilir. Pentegonal modelin ayrıca,

(a) Matematiksel fonksiyonu öğrenme ve öğretme üzerine yapılmış araştırmaları yeniden analiz etmede,

(b) Matematiksel fonksiyon kavramlarını daha güçlü biçimlendirmek için öğrenenlerin çeşitli gösterimleri nasıl bağladıklarını anlamamızdaki eksiklikleri doldurmaya yönelik araştırmalar için ortak bir eylem planı çatısı kurmada ve

(c) Eğitim araştırmacıları, müfradat uzmanları ve sınıf öğretmenleri arasında iletişim için bir model araç olarak kullanılabileceği önerilmektedir (Bowman,1993).

Wilson ve Lloyd'a (1998) göre, her bir gösterim biçimi farklı içeriklerde çeşitli sınırlılıklara sahip olduğu için, kullanılacak gösterim tercihine ve böyle bir tercihi yapmak için gerekli olan bilgiye sahip olabilme oldukça önem taşımaktadır ve çoklu gösterimlerin kullanılması fonksiyon kavramıyla ilgili bir çok bilişsel zorluğu yenmede öğrenciye yardım edecektir. Wilson ve Lloyd (1998), bir öğrencinin fonksiyon kavramını çeşitli gösterimlerinin birinde anlamasının bir diğer gösterimde anlaması için zorunlu bir ön koşul olmadığını ancak çeşitli gösterimler arasında dönüşüm yapma yeteneğinin, etkili şekilde problem durumlarını yorumlaması için gerekli olduğunu ifade etmiştir.

Sfard (1991), fonksiyon gibi soyut kavramların yapısal ve işlemsel olarak iki farklı temelden kavranabileceğini belirtmiştir. Bu iki yaklaşım görünürde farklı olmalarına rağmen aslında birbirlerini bütünleyicidir. Fonksiyon notasyonunun öncelikle işlemsel olarak kavranabileceğini vurgulamış ve fonksiyonun yapısal formuna geçişin üç aşamada oluştuğunu belirtmiştir. Bu aşamalar bir kavramın yapılandırılmasında kullanılan ve literatürde "interiorization" (aynı objeler arasındaki işlemleri kavrama), "condensation" (bu işlemlerin başka objelere dönüşümü kavrama) ve "reification" dir (yeni bir objeyi eldetme).

Fonksiyonu, girdi değerlerinin kümesini çıktı değerlerinin kümesine eşleme şeklinde kavramanın, öğrencilerin muhakeme yeteneklerinin fonksiyon kavramının çeşitliliğini ve derinliğini yorumlamalarında gerekli olduğunu gösteren çalışmalar vardır (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen ve Hsu, 2002; Thompson, 1994a). Fakat Carlson (1998), Monk ve Nemirovsky (1994) ve Thompson (1994a) öğrencilerin fonksiyonu genellikle sembolik ifadeler ve işlemsel teknikler olarak düşünerek, fonksiyonu eşleme perspektifinden kavramada yetersiz kaldıklarını belirtmişlerdir. Bu eşleme perspektifinin aynı zamanda ileri seviye matematikteki önemli kavramları anlama için de temel olduğu gösterilmiştir (Carlson, Smith ve Persson, 2003; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas ve Vidakovic, 1996; Kaput, 1992; Rasmussen, 2000; Thompson, 1994a; Zandieh, 2000) (Akt. Carlson, Oehrtman, 2005).

Carlson ve Oehrtman (2005) fonksiyonlara işlem perspektifinden veya girdi-çıktı süreci perspektifinden yaklaşılmasını şu şekilde kategorize etmiştir:

İşlem Perspektifinden	**Girdi-Çıktı Süreci Perspektifinden**
1. Bir fonksiyon özel bir kurala, formüle veya hesaplamaya bağlıdır ve özel hesaplamaları veya adımları gerçekleştirmeyi gerektirir.	1. Bir fonksiyon girdi değerlerinin kümesinden çıktı değerlerinin kümesine bir eşleme tanımlayan genelleştirilmiş bir girdi-çıktı işlemidir
2. Bir öğrenci her bir eylemi yapmalı veya düşünmelidir.	2. Bir öğrenci her bir eylemi yapması gerekmeden tüm süreci düşünebilir (çıktı kümesini fonksiyonun alacağı değerleri tek tek bulmadan düşünebilir)
3. Cevap formüle bağlıdır	3. Süreç formülden bağımsızdır.
4. Bir öğrenci girdi veya çıktı olarak sadece tek bir değer düşünebilir (örneğin x, belirli bir değeri simgeler)	4. Öğrenci tüm girdilerin kümesini düşünebilir, onun için girdiler süreklilik arz eder.
5. Ters alma işlemi hemen hemen cebirseldir (x ve y yi yer değiştirp x'i bulma) veya geometriktir (grafiğin y = x doğrusuna göre simetriğini bulma).	5. Bir fonksiyonun tersini bulma; çıktı değerlerinin kümesinden girdi değerlerinin kümesine bir eşleme tanımlayan ters çevrilebilir bir süreçtir.
6. Tanım ve görüntü kümelerini bulma bir cebir problemi gibi düşünülür (payda sıfır olamaz, kökün içi negatif olamaz gibi).	6. Tanım ve görüntü kümeleri, tüm olası girdi ve çıktıların kümesi üzerinde işlem ve yansıtma yapılarak oluşturulur
7. Fonksiyonlar statik olarak düşünülür.	7. Fonksiyonlar dinamik olarak düşünülür
8. Bir fonksiyonun grafiği geometrik bir şekildir	8. Bir fonksiyonun grafiği girdilerin kümesinden çıktıların kümesine belirli bir eşleme olarak düşünülür.

Carlson ve Oehrtman'a (2005) göre süreç bakış açısına sahip olan öğrenciler bileşke ve ters alma gibi fonksiyon durumlarını anlayabilmede daha iyidirler.

Böyle öğrenciler çoğunlukla bir işlemin çıktılarını ikinci bir işlemin girdileri olarak koordine ederek çeşitli gösterimlerde verilen kavramsal ve işlemsel sorulara doğru cevap oluşturabilirler. Carlson ve Oehrtman (2005) bir süreç bakış açısına sahip olmanın tüm fonksiyonel mantık yürütmelerde başarıyı garanti etmediği gibi, fonksiyonlara işlem açısından yaklaşımın da her açıdan olmamakla beraber öğrencilerin fonksiyonlar kavramını derinlemesine ve etraflıca anlamasına zarar verdiğini belirtmiştir. Carlson ve Oehrtman (2005) yine de bir süreç bakış açısına sahip olmanın kavramsal anlamayı zenginleştirmede kritik bir öneme sahip olduğunu da vurgulamıştır.

Carlson ve Oehrtman (2005)'a göre fonksiyonlarda süreç bakış açısının öğrencilere kazandırılması için:

1. Öğrencilerin temel fonksiyon gerçeklerini girdi-çıktı süreci açısından açıklamaları istenmelidir. Örneğin, $(f\circ g)^{-1}$ nin $f^{-1}\circ g^{-1}$ mi yoksa $g^{-1}\circ f^{-1}$ mi olduğuna karar vermeleri ve nedenini açıklamaları istenmelidir.

2. Öğrencilere "değişim" mantığı kavratılmalıdır. Örneğin, hız-zaman değişimi veya şişedeki suyun yüksekliğiyle hacminin değişimi gibi dinamik fonksiyon ilişkilerini öğrenciler araştırmaya başlarlarken, bir değişkenin diğerini nasıl etkilediğini düşünmeye başlamaya gerek duyacaklardır. Öğrenci böyle değişimleri koordine ederken bir dinamik fonksiyon olayının grafiğindeki önemli özellikleri gösterebilmeli ve yorumlayabilmelidir. Öğrenciler değişim kavramını, sıralı ikililer, tablolar, grafikler ve denklemlerle göstermelidirler.

Çok basit bir örnek olarak, güçlü bir süreç bakış açısına sahip bir öğrencinin, bir karenin alanına karar verirken olası girdi değerlerinin bir kümesi için $A(s) = s^2$ cebirsel formülünü görebilme ihtimali yüksektir. Yani girdi ve çıktı kümeleri arasındaki genel ilişkiyi görebilir. Bu olayda, öğrenci s nin artarken A nın da artacağını fark etmeye başlar. Nümerik modelleri araştırırken ve/veya fonksiyonun grafiğini oluştururken, öğrenci s nin pozitif tamsayı değerleri için, A'nın artış miktarının çok daha büyük olduğunu da gözlemleyebilir. Ayrıca, s sürekli artarken alanın çok daha hızlı büyüdüğünü de fark eder (Carlson ve Oehrtman, 2005).

Evangelidou, Spyrou, Elia ve Gagatsis (2004) tarafından eğitim fakültesi 2. sınıf öğrencileri üzerinde yapılan bir araştırmada; öğrencilerin verilen bir fonksiyon durumuna, fonksiyonun Venn diagramı ile grafiği arasında bağ kurarak ve tipik fonksiyon gösterimleri ile bağ kurarak yaklaşanlar şeklinde iki kutupta toplandığı belirlenmiştir. Birinci gruptakilerin fonksiyonu kavramalarının daha başarılı olduğu tespit edilmiştir. Bu durumda, fonksiyona girdi-çıktı sürecinden yaklaşımın daha başarılı bir anlama seviyesi sağlayabileceği fikrini desteklediği düşünülebilir.

NCTM (1989) raporunda fonksiyon öğretime ilişkin aşağıdaki maddeler benimsenmiştir (Akt: Cramer, 2001):

1) Ortaokul öğrencilerinin çalışma alanı fonksiyon kavramına kaydırılmalıdır.

2) Öğrencilerin fonksiyon deneyimleri manipulatif materyaller içeren ve öğrencileri bilgi toplamaya yönlendiren problemlere dayalı olmalıdır.

3) Problemler, öğrencilerin somut modellerden sayısal veriler elde edip fonksiyonel ilişkiler kurmasına yol açacak tarzda olmalıdır.

4) Öğrenciler çok yönlü (problemin içinde başka yerlere yönlenebilecekleri, katmerli) ve önemli matematiksel fikirleri, genellemeleri soyutlamalarına yardımcı olabilecek problemlerle çalıştırılmalıdır. Öğretmenin rolü böyle problemler bulmak ve ardışık olarak problemi alt problemlere bölerek organize etmek şeklinde olmalıdır.

5) Öğrenciler işbirlikli öğrenme gruplarında kavram hakkında tartıştırılmalı ve onlara sorular sorarak kavramı yapılandırmaları sağlanmalıdır.

Lloyd ve Wilson (1998) fonksiyon kavramının öğretimine ilişkin şunları önermektedir:

1. Öğrencilere ilk defa fonksiyon kavramı verilirken iki veya daha fazla küme arasındaki ilişki tanımlanarak fonksiyonun çok yönlülüğü vurgulanmalıdır.

2. Okul dışı olarak görülebilecek bir çok fonksiyonel ilişkiler araştırılıp verilmeye çalışılmalıdır. Öğretmenler öğrencileri böyle bir deneyime teşvik ederek öğrencilerin günlük yaşamda fonksiyon kavramıyla ilgili farkındalıklarını artırmalıdırlar.

3. Öğretmenler fonksiyonun değerinin nümerik olması gerekmediğini vurgulamalıdır.

4. Öğretmenler, değişken ve fonksiyon kavramlarını etraflıca ve derinlemesine öğretirken çok çeşitli kaynaklar kullanmalıdırlar. Böylelikle öğrencilerin bu kavramlarla ilgili biliş yapılarının genişlemesi ve sağlamlaşması sağlanmalıdır. Bu kaynaklar güncel yaşamla ilgili olarak gazete ve dergilerin fonksiyon ve değişken kavramlarını içeren özellikle ekonomi sayfaları vs. olabilir. Ayrıca öğrencilere doğada varolan fonksiyonel ilişkileri bulmaları konusunda takım çalışmaları yaptırılabilir. Böylelikle öğrencilerin aynı

zamanda fonksiyon dili kullanımları da zenginleşir. Bunun için öğrencilere tablo yaptırılması da faydalı olabilir, tablodan bağımlı ve bağımsız değişkenler ve fonksiyonun kuralının ne olabileceği buldurulabilir.

Cotret (1986), Janvier (1981), Kerslake (1977), Karplus (1979), Dreyfus ve Einsberg (1983), öğrencilere bir fonksiyonun grafiğinin belli noktaları verilerek taslak olarak çizdirilmesinin ve interpolasyon-ekstrapolasyon örnekleri içinde bir eğrinin tamamlanması şeklindeki uygulamaların öğrencilerin ilgisini çektiğini göstermişlerdir. Sfard (1991) fonksiyonun grafiğinin statik olduğunu, holistik algılamaya yardımcı olduğunu ve kavramın yapısal anlaşılmasına vesile olduğunu vurgulamıştır (Akt Janvier, 1998).

Fonksiyon kavramının öğretiminde karşılaşılan kavramsal zorlukların yanında öğretmenin fonksiyonlar konusundaki yeterli olup olmaması da öğrencilerin bu kavramı anlayabilmelerini şüphesiz etkilemektedir. Öğretmenin fakültede veya mesleğe başladıktan sonra fonksiyon kavramını tam olarak bilip bilmediği bir problem olarak araştırılmaktadır (Sajka, 2003). Işık, Albayrak ve İpek (2005) tarafından bir üniversitenin eğitim fakültesi matematik öğretmenliği anabilim dalında okuyan toplam160 son sınıf öğrencisi üzerinde yapılan bir araştırmada aşağıdaki tabloda verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Fonksiyonu nasıl izah edersiniz?	**%**	**Aşağıdakilerden hangisi fonksiyon kavramını açıklamaz?**	**%**
a) Özel bağıntı şekli	18,1	a)Verilen bir şart altında bir yerden başka bir yere taşıma işi	28,1
b) Eşleme	5	b)Bağıntının özel bir halidir	6,8
c) Taşıma işlemi	6,8	c)İki küme arasında kurulan bir eşlemedir	41,5
d) A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere, A nın her bir elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıdır	30,6	d)Tanım kümesindeki her bir elemanı değer kümesindeki bir elemana eşleyen bağıntıdır	23,7
e) Diğer	36,2		
f) Verilen bir şart altında bir yerden başka bir yere taşıma işi	3,1		

Tablo incelendiğinde öğretmen adaylarının fonksiyon tanımı hakkındaki bilgilerinin yeterli olmadığı görülmektedir. Ayrıca araştırmada ortaya çıkan bir diğer sonuç; deneklerin kavram yanılgılarının, hatırlayabilmede daha yoğun yaşanması olmuştur. Bunun da öğretmen adaylarının kavramlar hakkında eksik veya yanlış bilgi sahibi olduklarının göstergesi olarak algılanabileceği ifade edilmiştir. Bu durumun, hizmet öncesinde alınan alan eğitiminin hizmet içine yönelik olmadığı, öğrenilen bilgilerin yorumlama, analiz ve sentez etme, kendi fikirleri ile bütünleştirerek ifade etme gereği duyulmadan sadece ezberleme yolunun tercih edilmesi şeklinde açıklanabileceği belirtilmiştir.

Bir diğer etken faktör ise öğretim yöntemidir. Cebir ve geometri derslerinde konuların geleneksel yöntemlerle işlenmesi üzerine önemli eleştiriler yapılmıştır. Hedrick (1938), geleneksel yaklaşımda anlatım tarzının çok formal ve fonksiyonel düşünmeyi geliştirmekten uzak olduğunu, yapılanın denklem çözümlemeden öte bir şey olmadığını belirtmiştir. Hedrick'e (1938) göre önemli olan bağımlı bağımsız değişkenleri ortaya koyup bunlar arasındaki bağıntıyı bulma yeteneği ve bilgisidir, son aşamada ise istenen denklemi çözmek işin küçük bir parçasıdır. Denklem çözümü oldukça mekanik bir süreçtir ve fonksiyonel düşünmeyi geliştirmez.

Hitt (1998) fonksiyon kavramı oluşturmanın seviyelerini şu şekilde belirlemiştir.

1. Kavram hakkında kesin olmayan fikirler (kavramın farklı gösterimlerinin tutarsız karışımı)
2. Bir kavramın farklı gösterimlerini belirtme
3. Bir gösterim sisteminden bir başkasına anlamını koruyarak geçme
4. İki gösterim sistemi arasındaki tutarlılığı net olarak ifade etme
5. Bir problemin çözümünde farklı gösterim sistemlerinin tutarlılığını net olarak ifade etme.

Hitt (1998) yaptığı araştırmanın sonuçların şu şekilde özetlemiştir:

1. Öğretmenler fonksiyonun alt kavramlarını belirlemelidir.
2. Öğretmenler tarafından kartezyen koordinatlarla grafik gösterimlerinde değişken kavramıyla bağlantılı fonksiyon tanımı pek tercih edilmiyor, daha çok bağıntının kuralı veya sıralı ikililer kümesi tercih ediliyor ve tanımlar pek kullanılmıyor.
3. Bir analitik ve grafiksel gösteriminde içeriğin içine koyabilmek için bağımsız değişkenler belirlenmiyor ve izole ediliyor.
4. Geleneksel öğretim yöntemlerinde farklı gösterim sistemlerini tutarlı bir şekilde ifade edilmiyor.

3. Sonuç ve Öneriler

Matematik ve diğer bütün bilim dalları için önem arz eden fonksiyonel düşünmenin ve buna bağlı olarak fonksiyon kavramının okullarımızda etraflıca ve derinlemesine öğretilmesi gerekmektedir. Ancak ülkemizde ve genel olarak tüm dünyada öğrenilmesinde zorlukların olduğu, kavram yanılgılarının belki de en yoğun yaşandığı bir kavramdır. Bu nedenle matematikteki bir çok konuyu birleştirici özelliğinden ve ayrıca karmaşık reel dünya durumlarını anlamlı bir şekilde temsil edebilmesi nedeniyle fonksiyon kavramını vurgulayan ilköğretim ve lise müfredat reformu şarttır. Bu da müfredatın, öğrencilerde fonksiyonel düşünme yollarının gelişimini sağlayan ve değerlendiren görevleri, projeleri vs içermesiyle sağlanabilir. Öğretmenlerin öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarını sağlamak için fonksiyonun sadece işlemsel değil aynı zamanda yapısal taraflarını vermesi, kavramın cebirsel, grafiksel, tablosal gibi farklı gösterimleri arasında geçişi göstermesi, güncel yaşam ve doğa olaylarında yer alan fonksiyon durumlarını uygun matematiksel modellemelerle öğretim ortamına uyarlaması gerekmektedir. Hedrick (1938) ilkokulda temel aritmetikten ileri seviyedeki matematik konularına varıncaya kadar fonksiyon kavramının fonksiyonel düşünmeyi geliştirecek şekilde verilmesi gerektiğini belirtmiştir. Ancak okullarımızda fonksiyon kavramının çoğunlukla işlemsel tarafları verilip asıl önemli olan ve fonksiyonel düşünmeyi geliştiren yapısal, kavramsal, gösterimleri arasında ilişkisel ve güncel yaşamdaki pratiksel yönleri verilmemektedir. Bu durumun ortaya çıkmasında, üniversite sınavında fonksiyonla ilgili olarak sorulan soruların sadece işlemsel olması ve buna bağlı olarak öğretmenlerin ve öğrencilerin fonksiyonun işlemsel taraflarına ağırlık vermesi bir etken olabilir.

Diğer taraftan, fonksiyon kavramının daha anlamlı, kalıcı, derinlemesine ve çeşitli yönleriyle ve de fonksiyonel düşünmeyi geliştirecek tarzda öğrenilmesine fırsat sunan öğretim yöntemleri kullanılmalıdır. Sfard (1992) ve Schwingendorf (1992), öğrencilere fonksiyonları öğretmek için fonksiyon kavramı hakkında açık uçlu tartışmaların veya işbirlikli öğrenme gruplarında problem çözmenin yapıldığı yapılandırmacı öğrenme ortamlarında, öğrencilere çeşitli fonksiyon gösterimleri vermişlerdir. Bu çalışma, bu tür öğrenme ortamlarının öğrencilerin fonksiyon kavramını öğrenmelerine yardım ettiği bulgusuyla sonuçlanmıştır. Bu bulgular Carlson (1996), Dubinsky ve Harel (1972) ve tarafından yapılan araştırmalarla da desteklenmektedir (Akt. Rho, 2000). İşbirlikli öğrenmenin fonksiyon öğretiminde etkili olduğu Ural (2007) tarafından yapılan çalışmada da ortaya çıkmıştır.

Kaynakça

Anastasia, E., Spyrou, P., Elia, I. ve Gagatsis, A. (2004). University Students' Conceptions of Function. *Proceedings of the 28th Conference of the Interntional Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, (sf. 351-358).

Altun, M. (1998). Matematik Öğretimi. *Açıköğretim Fakültesi Yayınları, No:591.*

Biehler, R., Scholz, R. ve Winkelmann, B. (1993). Reflections on Mathematical Concepts As Points For Mathematical Thinking. *Didactic of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrect, Boston, London, (sf. 61-72).

Bowman, A.H. (1993). A Theoretical Framework for Research in Algebra: Modification of Janvier's "Star" Model of Function Understanding. *The Annual Meeting Of The American Educational Research Association,* Atlanta, GA, April 12-16.

Breslich, E. R. (1928): Developing functional thinking in secondary school mathematics. (ed. NCTM). The Third Yearbook (42–56). New York, NY: NCTM, Teachers College, Columbia University.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in Collegiate Mathematics Education III*, *CBMS Issues in Mathematics Education*.. 7, (sf. 114–163).

Carlson, M. ve Oehrtman, M. (2005). Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. *The Mathematical Association of America* (Research Sampler).

Carlson, M., Oehrtman, M. ve Engelke, N. (2005). Composition of Functions: What do Precalculus Level Students Understand? *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Eugene, OR: All Academic.

Cramer, K. (2001). Using Models To Build An Understanding Of Functions. *Mathematics Teaching In The Middle School,* 6(5), (sf. 310-318).

Davidenko, S. (1997). Building The Concept Of Function From Students' Everyday Activities. *Mathematics Teacher,* 90, (sf. 144-149).

Davidson, P.M. (1987). Early Function Concepts: Their Development and Relation to Certain Mathematical and Logical Abilities. *The Society for Research in Child Developmant,* 58, (sf. 1542-1555).

Dede, Y. (2005). Değişken Kavramı Üzerine. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(1), (sf. 139-148).

Dennis, E.C. (2001). *An investigation of the numerical experience associated with the global behavior of Polynomial Functions in the traditional Lecture Method and Cooperative Learning Method Classes.* Yayınlanmamış Doktora Tezi. Graduate Faculty of the University of New Orleans.

Dikici, R. (2003). Bağıntı ve Fonksiyon Konusundaki Öğrenme Güçlüklerinin Bazı Değişkenler Açısından İncelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 11(2), (sf. 105-116).

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), (sf. 94–116).

Hedrick, E.R. (1938). The Function Concept in Elementary Teaching and in Advanced Mathematics. *The American Mathematical Monthly,* 45(7), (sf. 448-455).

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In Wagner, S. ve Carolyn, K. (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hight, D. W. (1968). Functions: dependent variables to fickle pickers. *Mathematics Teacher.* 61(6), (sf. 575-579).

Hitt, F. (1998). Diffuculties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), (sf. 123-134).

Işık, C., Albayrak, M. ve İpek, A.S. (2005). Matematik Öğretiminde Kendini Gerçekleştirme. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(1), (sf. 129-138).

Janvier, C. (1998). The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), (sf. 79-103).

Kleiner, I. (1989). Evolution Of The Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal,* 20(4), (sf. 282-300).

Malik, M.A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function.

International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 11, (sf. 489-492).

Meel, D.E. (1999). Prospective Teachers' Understandings: Function and Composite Function. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers:The Journal,* 1, October.

Monk, G.S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. (ed. G. Harel, E. Dubinsky). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy.* Mathematical Association of America, Washington, D.C. (sf. 175-194).

Monk, S., Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education. 4, (sf. 139–168).

Moschkovich, J.N. (2004). Appropriating Mathematical Practise: A Case Study of Learning to Use and Explore Functions Through Interaction with a Tutor. *Educational Studies in Mathematics,* 55, (sf. 49-80).

Olsen, J.R. (1995). The Effect Of The Use Of Number Lines Representations On Student Understanding Of Basic Function Concepts. *The Annual Meeting Of The North American Chapter of the International Group for the Psychology Of Mathematics Education.* (sf. 21-24). 17th PME-NA, Columbus, OH, October.

Rho, K. (2000). A Case Study on the Changes of University Students' Function Concept in a Virtual Environment. *The Annual Meeting Of The American Educational Research Association.* (sf. 24-28). New Orleans, LA, April.

Sajka, M. (2003). A Secondary School Students's Understandings Of The Concept Of Function-A Case Study. *Educational Studies in Mathematics,* 53, (sf. 229-254).

Schaaf, W.A. (1930). Mathematics and World History. *Mathematics Teacher*. 23, (sf. 496-503).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematic,* 22, (sf. 1-36).

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification -- The case of function. (ed. G. Harel, E. Dubinsky). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA Notes, 25, 59-84), Washington.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. (ed. E. Dubinsky, G. Harel). The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, *Mathematical Association of America* (M.A.A.) Notes, 25, (sf. 25–58).

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. (ed. E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld ve J. J. Kaput), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1* (Issues in Mathematics Education. 4, 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Ural, A. (2007). *İşbirlikli Öğrenmenin Matematikteki Akademik Başarıya, Kalıcılığa, Matematik Özyeterlilik Algısına ve Matematiğe Karşı Tutuma Etkisi.* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Vinner, S. ve Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journalfor Research in Mathematics Education*. 20(4), (sf. 356-366).

Wilson, M. ve Lloyd, G. (1998). Supporting Innovation: The Impact of a Teacher's Conceptions of Functions on His Implementation of a Reform. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29(3), (sf. 248-274).